ЛЕКЦИЯ 4

1. **Односторонние пределы.**
2. **Понятие непрерывности функции в точке. Теоремы о непрерывных функциях.**
3. **Понятие бесконечно малой величины, сравнение бесконечно малых.**

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

Определение правого предела в точке

- Число b называется *правым пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$, если при $x > a$ и $x \to a$ значение $f(x) \to b$. Обозначение:

$$b = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

или

$f(x) \to b$ при $x \to a + 0$.

Определение правого предела можно переформулировать в ε-δ обозначениях. См. рисунок

Определение левого предела в точке

- Число b называется *левым пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$, если при $x < a$ и $x \to a$ значение $f(x) \to b$. Обозначение:

$$b = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

или

$f(x) \to b$ при $x \to a - 0$.

Определение левого предела можно переформулировать в ε-δ обозначениях. См. рисунок

Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке

Теорема.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b \text{ и } \lim_{x\to a+0} f(x) = b$$

Из данной теоремы следует, что существуют функции, у которых нет предела в точке $x = a$, но существует левый или правый предел в точке $x = a$.

Примеры таких функций на следующем слайде.

Пример

- $f(x) = e^{1/(x+2)}$ в точке $x = -2$

Пусть $x \to -2-0$, тогда $\frac{1}{x+2} < 0$, поэтому $\frac{1}{x+2} \to -\infty$ и $e^{1/(x+2)} \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-2-0} e^{1/(x+2)} = 0$. Пусть $x \to -2+0$, тогда $\frac{1}{x+2} > 0$, поэтому $\frac{1}{x+2} \to +\infty$ и $e^{1/(x+2)} \to +\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-2+0} e^{1/(x+2)} = +\infty$.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2+0} f(x)$, следовательно, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ не существует. Так как $\lim\limits_{x\to-2+0} e^{1/(x+2)} = +\infty$, то прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x) = e^{1/(x+2)}$

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Определение непрерывности функции в точке

- **Определение.** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого числового промежутка, то она называется *непрерывной на данном числовом промежутке*.

Теорема о непрерывности элементарных функций

- **Теорема.** Любая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения. Если $x = a$ внутренняя точка области определения сложной функции $y = f(g(x))$, то и сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Эта теорема позволяет вычислять пределы элементарных функций в точках, принадлежащих области определения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Определение точки разрыва функции

- **Определение.** Точка $x = a$, принадлежащая области определения функции $y = f(x)$ или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

то точки разрыва возникают при нарушении одного из равенств в этой цепочке равенств.

Точки разрыва 1-го рода

- **Определение.** Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, причем не все три числа $f(a), f(a-0)$ и $f(a+0)$ равны между собой, тогда $x = a$ называется *точкой разрыва I-го рода.*

Виды точек разрыва 1-го рода

- Точки разрыва 1-го рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва*, когда

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a),$$

и на *точки скачка*, когда

$$f(a-0) \neq f(a+0),$$

в последнем случае разность

$$f(a-0) - f(a+0)$$

называется *скачком* функции в точке $x = a$.

Точки разрыва 2-го рода

- **Определение.** Точки разрыва функции $y = f(x)$, не являющиеся точками разрыва *I-го* рода, называются *точками разрыва II-го рода*. В точках разрыва *II* рода хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ либо не существует, либо бесконечен. В последнем случае, график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$.

Пример 1

- Найти точки разрыва функции $y = \frac{x}{x^2-1}$ и определить их род.

Решение. Так как знаменатель $x^2 - 1$ равен 0 при $x = \pm 1$, то эти точки не входят в область определения данной функции (но являются граничными точками) и поэтому являются точками разрыва. Определим род точек разрыва. Имеем $\lim_{x\to -1-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} y = +\infty$, поэтому обе точки $x = \pm 1$ являются точками разрыва II рода, причем прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами графика данной функции $y = \frac{x}{x^2-1}$.

Пример 2

- Показать, что функция $y = arctg\frac{1}{x-2}$ имеет точку разрыва I рода.

Решение. Ясно, что точка $x = 2$ является точкой разрыва, и других точек разрыва нет. Найдем $\lim_{x\to 2-0} arctg\frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$. Аналогично найдем $\lim\limits_{x\to 2+0} arctg\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$. Итак, $x = 2$ - точка разрыва I рода – точка скачка. Скачок функции в этой точке равен $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Пример 3

- Найти точки разрыва функции $y = \frac{x^3-1}{x-1}$ и определить их род.

Решение. Точка $x = 1$ не входит в область определения данной функции, но при $x \neq 1$ можно сократить $y = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$. Следовательно, $\lim_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} y = 3$. Таким образом, $x = 1$ - точка устранимого разрыва. Этот разрыв можно устранить, т.е. сделать данную функцию непрерывной в данной точке (и на всей числовой прямой), если доопределить данную функцию в точке $x = 1$ и положить $y(1) = 3$.

ПОНЯТИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ВЕЛИЧИНЫ, СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Понятие бесконечно малой величины

- **Определение.** Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной в точке $x = a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Обычно бесконечно малые величины обозначают малыми греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Например, функция $\alpha = \alpha(x) = (x-a)^m$ является бесконечно малой в точке $x = a$, а функция $\beta = sinx$ является бесконечно малой в точке $x = 0$, а также во всех точках $x = \pi n, n \in Z$.

Сравнение бесконечно малых

- Бесконечно малые $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ в точке $x = a$ можно сравнивать. Для этого рассматривается $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и исследуются все возможные случаи.

1. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha = \alpha(x)$ - *бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\beta = \beta(x)$.

   Обозначение: $\alpha = o(\beta)$

2. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0$ и существует, то говорят, что $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ - *бесконечно малые одного и того же порядка*.

Обозначение: $\alpha = O(\beta)$

3. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, что $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ - *эквивалентные бесконечно малые.* Обозначение: $\alpha \sim \beta$.

Стандартные бесконечно малые

- Бесконечно малые величины обычно сравнивают с какими-либо стандартными бесконечно малыми. Чаще всего для этого используют функцию $(x-a)^m$, где m - некоторое положительное целое число. При этом, если для некоторой бесконечно малой $\alpha = \alpha(x)$ в точке $x = a$ имеем $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^m} \neq 0$, то говорят, что α - *бесконечно малая порядка* m (относительно $x-a$).

Пример 1

- Пусть $\alpha = \alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$, тогда α - бесконечно малая в точке $x = 2$. Сравним ее с бесконечно малой $(x-2)$, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Следовательно, $\alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$ и $(x-2)$ бесконечно малые одного и того же порядка. Кроме того, из сравнения получаем, что $\alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$ - бесконечно малая 1-го порядка (относительно $(x-2)$).

Пример 2

- Пусть $\alpha(x) = x^3 - 3x + 2$, так как $\alpha(1) = 0$, то $\alpha(x)$ - бесконечно малая в точке $x = 1$. Сравним ее с бесконечно малой $\beta(x) = (x - 1)$, получим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{x - 1} = 0$$

Следовательно, $\alpha(x)$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta = (x - 1)$. Сравним $\alpha(x)$ с $(x - 1)^2$, получим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = 3 \neq 0$$

Следовательно, $\alpha(x) = x^3 - 3x + 2$ - бесконечно малая 2-го порядка.