

# ЛЕКЦИЯ 4

1. **Односторонние пределы.**
2. **Понятие непрерывности функции в точке.  
Теоремы о непрерывных функциях.**
3. **Понятие бесконечно малой величины,  
сравнение бесконечно малых.**

# **ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ**

# Определение правого предела в точке

- Число  $b$  называется *правым пределом* функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ , если при  $x > a$  и  $x \rightarrow a$  значение  $f(x) \rightarrow b$ . Обозначение:

$$b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

или

$f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a + 0$ .

Определение правого предела можно переформулировать в  $\varepsilon$ - $\delta$  обозначениях. См. рисунок

# Определение левого предела в точке

- Число  $b$  называется *левым пределом* функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ , если при  $x < a$  и  $x \rightarrow a$  значение  $f(x) \rightarrow b$ . Обозначение:

$$b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

или

$f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a - 0$ .

Определение левого предела можно переформулировать в  $\varepsilon$ - $\delta$  обозначениях. См. рисунок

# Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке

**Теорема.**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$$

Из данной теоремы следует, что существуют функции, у которых нет предела в точке  $x = a$ , но существует левый или правый предел в точке  $x = a$ .

Примеры таких функций на следующем слайде.

# Пример

- $f(x) = e^{1/(x+2)}$  в точке  $x = -2$

Пусть  $x \rightarrow -2 - 0$ , тогда  $\frac{1}{x+2} < 0$ , поэтому  $\frac{1}{x+2} \rightarrow -\infty$  и  $e^{1/(x+2)} \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow -2-0} e^{1/(x+2)} = 0$ . Пусть

$x \rightarrow -2 + 0$ , тогда  $\frac{1}{x+2} > 0$ , поэтому  $\frac{1}{x+2} \rightarrow +\infty$  и  $e^{1/(x+2)} \rightarrow +\infty$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow -2+0} e^{1/(x+2)} = +\infty$ .

Заметим, что  $\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x)$ , следовательно,

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  не существует. Так как  $\lim_{x \rightarrow -2+0} e^{1/(x+2)} = +\infty$ , то

прямая  $x = -2$  является вертикальной асимптотой графика функции  $f(x) = e^{1/(x+2)}$

# **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ**

# Определение непрерывности функции в точке

- **Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x = a$* , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в каждой точке некоторого числового промежутка, то она называется *непрерывной на данном числовом промежутке*.



# Теорема о непрерывности элементарных функций

- **Теорема.** Любая элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения. Если  $x = a$  внутренняя точка области определения сложной функции  $y = f(g(x))$ , то и сложная функция  $y = f(g(x))$  непрерывна в точке  $x = a$ .

Эта теорема позволяет вычислять пределы элементарных функций в точках, принадлежащих области определения:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

# Определение точки разрыва функции

**Определение.** Точка  $x = a$ , принадлежащая области определения функции  $y = f(x)$  или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Так как  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

то точки разрыва возникают при нарушении одного из равенств в этой цепочке равенств.

# Точки разрыва 1-го рода

- **Определение.** Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ , причем не все три числа  $f(a)$ ,  $f(a-0)$  и  $f(a+0)$  равны между собой, тогда  $x = a$  называется *точкой разрыва 1-го рода*.

# Виды точек разрыва 1-го рода

- Точки разрыва 1-го рода подразделяются, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва*, когда

$$f(a - 0) = f(a + 0) \neq f(a),$$

и на *точки скачка*, когда

$$f(a - 0) \neq f(a + 0),$$

в последнем случае разность

$$f(a - 0) - f(a + 0)$$

называется *скачком* функции в точке  $x = a$ .

# Точки разрыва 2-го рода

- **Определение.** Точки разрыва функции  $y = f(x)$ , не являющиеся точками разрыва I-го рода, называются *точками разрыва II-го рода*. В точках разрыва II рода хотя бы один из односторонних пределов  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  либо не существует, либо бесконечен. В последнем случае, график функции  $y = f(x)$  имеет вертикальную асимптоту  $x = a$ .

# Пример 1

- Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x}{x^2-1}$  и определить их род.

**Решение.** Так как знаменатель  $x^2 - 1$  равен 0 при  $x = \pm 1$ , то эти точки не входят в область определения данной функции (но являются граничными точками) и поэтому являются точками разрыва. Определим род точек разрыва. Имеем  $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$ ,  
поэтому обе точки  $x = \pm 1$  являются точками разрыва II рода, причем прямые  $x = -1$  и  $x = 1$  являются вертикальными асимптотами графика данной функции  $y = \frac{x}{x^2-1}$ .

# Пример 2

- Показать, что функция  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$  имеет точку разрыва I рода.

**Решение.** Ясно, что точка  $x = 2$  является точкой разрыва, и других точек разрыва нет. Найдем  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$ . Аналогично найдем  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}$ . Итак,  $x = 2$  - точка разрыва I рода – точка скачка. Скачок функции в этой точке равен  $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .

# Пример 3

- Найти точки разрыва функции  $y = \frac{x^3-1}{x-1}$  и определить их род.

**Решение.** Точка  $x = 1$  не входит в область определения данной функции, но при  $x \neq 1$  можно сократить  $y = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} y = 3$ . Таким образом,  $x = 1$  - точка устранимого разрыва. Этот разрыв можно устранить, т.е. сделать данную функцию непрерывной в данной точке ( и на всей числовой прямой), если доопределить данную функцию в точке  $x = 1$  и положить  $y(1) = 3$ .



**ПОНЯТИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ  
ВЕЛИЧИНЫ, СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО  
МАЛЫХ**

# Понятие бесконечно малой величины

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется бесконечно малой величиной в точке  $x = a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Обычно бесконечно малые величины обозначают малыми греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Например, функция  $\alpha = \alpha(x) = (x - a)^m$  является бесконечно малой в точке  $x = a$ , а функция  $\beta = \sin x$  является бесконечно малой в точке  $x = 0$ , а также во всех точках  $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

# Сравнение бесконечно малых

Бесконечно малые  $\alpha = \alpha(x)$  и  $\beta = \beta(x)$  в точке  $x = a$  можно сравнивать. Для этого рассматривается  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  и исследуются все возможные случаи.

1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то говорят, что  $\alpha = \alpha(x)$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\beta = \beta(x)$ .

Обозначение:  $\alpha = o(\beta)$

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq 0$  и существует, то говорят, что  $\alpha = \alpha(x)$  и  $\beta = \beta(x)$  - бесконечно малые одного и того же порядка.

Обозначение:  $\alpha = O(\beta)$

3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то говорят, что  $\alpha = \alpha(x)$  и  $\beta = \beta(x)$  - эквивалентные бесконечно малые. Обозначение:  $\alpha \sim \beta$ .

# Стандартные бесконечно малые

- Бесконечно малые величины обычно сравнивают с какими-либо стандартными бесконечно малыми. Чаще всего для этого используют функцию  $(x - a)^m$ , где  $m$  - некоторое положительное целое число. При этом, если для некоторой бесконечно малой  $\alpha = \alpha(x)$  в точке  $x = a$  имеем 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^m} \neq 0,$$
 то говорят, что  $\alpha$  - бесконечно малая порядка  $m$  (относительно  $x - a$ ).

# Пример 1

Пусть  $\alpha = \alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$ , тогда  $\alpha$  - бесконечно малая в точке  $x = 2$ . Сравним ее с бесконечно малой  $(x - 2)$ , получим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4} \neq 0\end{aligned}$$

Следовательно,  $\alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$  и  $(x - 2)$  бесконечно малые одного и того же порядка. Кроме того, из сравнения получаем, что  $\alpha(x) = \sqrt{x+2} - 2$  - бесконечно малая 1-го порядка (относительно  $(x - 2)$ ).

## Пример 2

Пусть  $\alpha(x) = x^3 - 3x + 2$ , так как  $\alpha(1) = 0$ , то  $\alpha(x)$  - бесконечно малая в точке  $x = 1$ . Сравним ее с бесконечно малой  $\beta(x) = (x - 1)$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x - 1} = 0$$

Следовательно,  $\alpha(x)$  - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $\beta = (x - 1)$ . Сравним  $\alpha(x)$  с  $(x - 1)^2$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{(x - 1)^2} = 3 \neq 0$$

Следовательно,  $\alpha(x) = x^3 - 3x + 2$  - бесконечно малая 2-го порядка.