# Лабораторна робота№1 «Симплекс-метод»


Виконали:

Студенти групи КС-42 та КУ-41

Асєєв Богдан

Лупандін Антоній

Коломийцева Альона

Чепіга Надія

# ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування - це напрям математичного програмування, що вивчає методи рішення екстремальних завдань, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм.

ЗЛП є задачею знаходження найбільшого (чи найменшого) значення лінійної функції.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow max / min$$

За умови, що змінні *x1,x2 … xn* задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m . \end{cases}$$

# Симплекс-метод

*Симплекс-метод* — це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого. Він є універсальним методом, який дозволяє вирішувати ЗЛП з будь-якою кількістю змінних.

- алгоритм симплекс-методу дає можливість розв'язувати ЗЛП незалежно від геометричного образу області допустимих розв'язків.
- метод визначає *початкове опорне рішення*, яке задовольняє систему обмежень, але не є оптимальним;
- *вказує напрямок переходу* до наступного рішення, яке покращує значення цільової функції.

# Алгоритм Симплекс-методу

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з таких етапів:

- Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
- Побудова симплексної таблиці.
- Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
- Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
- Повторення дій починаючи з 3-го пункту.

# Умова задачі

| Тип сировини | Назва напою | | | Запаси, кг |
|---|---|---|---|---|
| | Еспресо | Американо | Капучіно | |
| Мелена кава | 10 | 10 | 10 | 3 |
| Вода | 50 | 150 | 150 | 15 |
| Молоко | – | – | 50 | 5 |
| Цукор | 5 | 10 | 10 | 20 |

## Визначити:

* *вважати, що 1 мілілітр = 1 грам*

| Еспресо | Американо | Капучіно |
|---|---|---|
| 12 грн. | 13 грн. | 18 грн. |

1) скільки філіжанок кожного виду кави необхідно продавати щодня, щоб місячний дохід був максимальний;

2) суму місячного доходу BUNKER coffee house від продажу кави, якщо відомо, що у звітний період було 22 робочі дні, а кількість проданих філіжанок не змінюється в залежності від дня тижня.

3) рекомендації щодо покращення роботи закладу.

# РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

| Загальна форма | Канонічна форма |
| --- | --- |
| | |

$$F = 12x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_4 = 3000 \\ 50x_1 + 150x_2 + 150x_3 + x_5 = 150 \\ 50x_3 + x_6 = 5000 \\ 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_7 = 20000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3$ – небазисні змінні

$x_4, x_5, x_6, x_7$ – базисні змінні

$\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 3000, 15000, 5000, 20000)$

| Базис | | | | | | | | Вільні члени |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3000 |
| | 50 | 150 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15000 |
| | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5000 |
| | 5 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20000 |
| | -12 | -13 | -18 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

в останньому рядку симплекс-таблиці є від'ємні елементи

$\overline{X}_1 = (0, 0, 0, 3000, 15000, 5000, 20000)$ – не є оптимальним рішенням

- ✔ шукаємо розв'язуючий стовпчик – стовпчик $x_3$
- ✔ додаємо стовпчик «Симплекс-відношення» та розраховуємо його значення

| Базис | | | | | | | | Вільні члени | Симплекс-відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3000 | 3000/10=300 |
| | 50 | 150 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15000 | 15000/150=100 |
| | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5000 | 5000/50=100 |
| | 5 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20000 | 20000/10=2000 |
| | -12 | -13 | -18 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

- ✔ шукаємо розв'язуючий рядок – $x_5$
- ✔ шукаємо розв'язуючий елемент – $x_{53}$

| Базис | | | | | | | | Вільні члени | Симплекс-відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3000 | 300 |
| | 50 | 150 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15000 | 100 |
| | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5000 | 100 |
| | 5 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20000 | 2000 |
| | -12 | -13 | -18 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

*Виводимо з базису* $x_5$ , а вводимо – $x_3$

Оскільки в останньому стовпці є кілька мінімальних елементів 100, то номер рядка вибираємо за ***правилом Креко***.

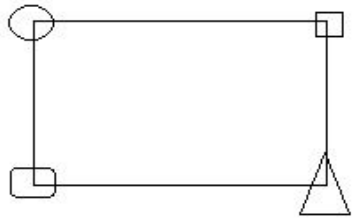
# Правило Креко

- Елементи рядків, що мають однакові найменші значення (у нашому випадку min=100) , поділяються на передбачувані роздільники, а результати заносяться в додаткові рядки. За провідний рядок вибирається той, у якому раніше зустрінеться найменше приватне під час читання таблиці зліва направо стовпцями.
- Отже, при діленні 100 на 150 буде меньше часне, чим при діленні 100 на 50.

- ✔ в стовпчик «Базис» вводимо нову базисну змінну $x_3$ , зберігаючи порядок змінних
- ✔ в комірках на перетині базисних змінних ставимо **1**, в інших комірках відповідних стовпчиків – **0**
- ✔ усі елементи розв'язуючого рядка ділимо на розв'язуючий елемент
- ✔ інші елементи розраховуємо за ***правилом прямокутника***

| Базис | | | | | | | | Вільні члени | Симплекс-відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 10 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3000 | 300 |
| | 50 | 150 | 150 | 0 | 1 | 0 | 0 | 15000 | 100 |
| | 0 | 0 | 50 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5000 | 100 |
| | 5 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20000 | 2000 |
| | -12 | -13 | -18 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

# Правило прямокутника



Треба перерахувати елемент

Елемент

Елемент

Роздільний елемент

Уявно малюємо прямокутник, одна вершина якого збігається з розв'язуючим елементом, інша - з елементом, образ якого ми шукаємо. Дві інші вершини визначаються однозначно.

Тоді елемент у новій таблиці буде дорівнює відповідному елементу попередньої таблиці мінус дріб, в знаменнику якої знаходиться розв'язуючий елемент, а в чисельнику - добуток елементів з двох невикористаних вершин прямокутника.

# Заповнюємо другу симплексну таблицю:

| Базис | | | | | | | | Вільні члени |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 20/3=6,6 | 0 | 0 | 1 | -1/15 | 0 | 0 | 2000 |
| | 50/150=0,33 | 1 | 1 | 0 | 1/150 | 0 | 0 | 100 |
| | -50/3=-16,6 | -50 | 0 | 0 | -1/3 | 1 | 0 | 0 |
| | 5/3=1,6 | 0 | 0 | 0 | -1/15 | 0 | 1 | 19000 |
| | -6 | 5 | 0 | 0 | 0,12 | 0 | 0 | |

X41 = 10 – 50*10/150 = 6,6

X42 = 10 – 1500/150 = 0

X62 = 0 – 50*150/150 = -50

X45 = 0 – 10*1/150 = -1/15=-0,0667

X75 = 0 – 10*1/150 = -1/15 = -0,0667

X6вч = 5000 – 15000*50/150 = 0

X71 = 5 – 50*10/150 = 1,6

X61 = 0 – 50*50/150 = -16,6

X72 = 10 – 1500/150 = 0

X65 = 0 – 50*1/150 = -1/3 = -0,3

X4вч = 3000 – 150000/150 = 2000

X7вч = 20000 – 15000*10/150 = 19000

-12 – 50*(-18)/150 = -6

0 – 0*(-18)/150 = 0,12

-13 – 150 *(-18)/150 = 5

*Не є оптимальним рішенням, з тої причини що в останньому рядку є від'ємне значення. Умови оптимальності не виконані*

# Використовуємо той самий алгоритм, та шукаємо нові симплекс-відношення

| Базис | | | | | | | | Вільні члени |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 20/3=6,6 | 0 | 0 | 1 | -1/15 | 0 | 0 | 2000 |
| | 50/150=0,33 | 1 | 1 | 0 | 1/150 | 0 | 0 | 100 |
| | -50/3=-16,6 | -50 | 0 | 0 | -1/3 | 1 | 0 | 0 |
| | 5/3=1,6 | 0 | 0 | 0 | -1/15 | 0 | 1 | 19000 |
| | -6 | 5 | 0 | 0 | 0,12 | 0 | 0 | |

| Базис | Базис | | | | | | | Вільні члени | Симплекс-відношення |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 20/3=6,6 | 0 | 0 | 1 | -1/15 | 0 | 0 | 2000 | 300 |
| | 50/150=0,33 | 1 | 1 | 0 | 1/150 | 0 | 0 | 100 | 300 |
| | -50/3=-16,6 | -50 | 0 | 0 | -1/3 | 1 | 0 | 0 | (0) - |
| | 5/3=1,667 | 0 | 0 | 0 | -1/15 | 0 | 1 | 19000 | 11400 |
| | -6 | 5 | 0 | 0 | 0,12 | 0 | 0 | | |

2000/20/3 = 3/10 = 300
100/(50/150)=3/10=300
19000/(5/3)=57/5=11400

# Заповнюємо третю симплексну таблицю:

| Базис | | | | | | | | Вільні члени |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1/(20/3) | (-1/15) / (20/3) | 0 | 0 | 300 |
| | 0 | 1 | 1 | -0,05 | 0,01 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | -50 | 0 | -2,5 | 0,5 | 1 | 0 | 5000 |
| | 0 | 0 | 0 | -0,25 | -1/12 | 0 | 1 | 18500 |
| | 0 | 0 | 0 | 9/10=0,9 | 3/50=0, 06 | 0 | 0 | |

X32 = 10=1

X62 = (-50) – 0 = -50

X34 = 0 – 1*(50/150)/(20/3) = -1.20

X64 = 0 - 1*(-50/3)/(20/3) = -5/2

X74 = 0 – 1*(5/3) )/(20/3) = -1/4

X35 = 1/150 - (-1/15)*(50/150)/(20/3) = 1/100

X65 = (-1/3) – (-50/3)*(-1/15) )/(20/3)= -1/2

X75 = (-1/15)-5/3*(-1/15) )/(20/3) = -1/12 = 0,083

0 – 1*(-6)/(20/3) = 0,9

(3/25) – (-6)*(-1/15) )/(20/3) = 0,06

X3вч = 0,1 – 2*(50/150) )/(20/3) = 0

X6вч = 0 – (-50/3)*2)/(20/3) = 5

X7вч = 19 – (5/3)*2)/(20/3) = 37/2 = 18,5

*Умова оптимальності виконана:*

в останньому рядку симплекс-таблиці усі елементи невід'ємні.

# Отже, маємо таке оптимальне рішення:

$$\overline{X}_3 = (300, 0, 0, 0, 0, 5000, 18500)$$

$$F = 12x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$F(\overline{X}_3) = 12*300 + 13*0 + 18*0 + 0*0 + 0*0 + 0*5000 + 0*18500 = 3600 - \text{max value}$$

# Аналіз оптимального плану

- У оптимальний план увійшла додаткова змінна x6. Отже, під час реалізації такого плану є недовикористані ресурси 3-го виду у кількості 5кг.

Молоко не рекомендується використовувати

- У оптимальний план увійшла додаткова змінна x7. Отже, під час реалізації такого плану є недовикористані ресурси 4-го виду у кількості 181/2.

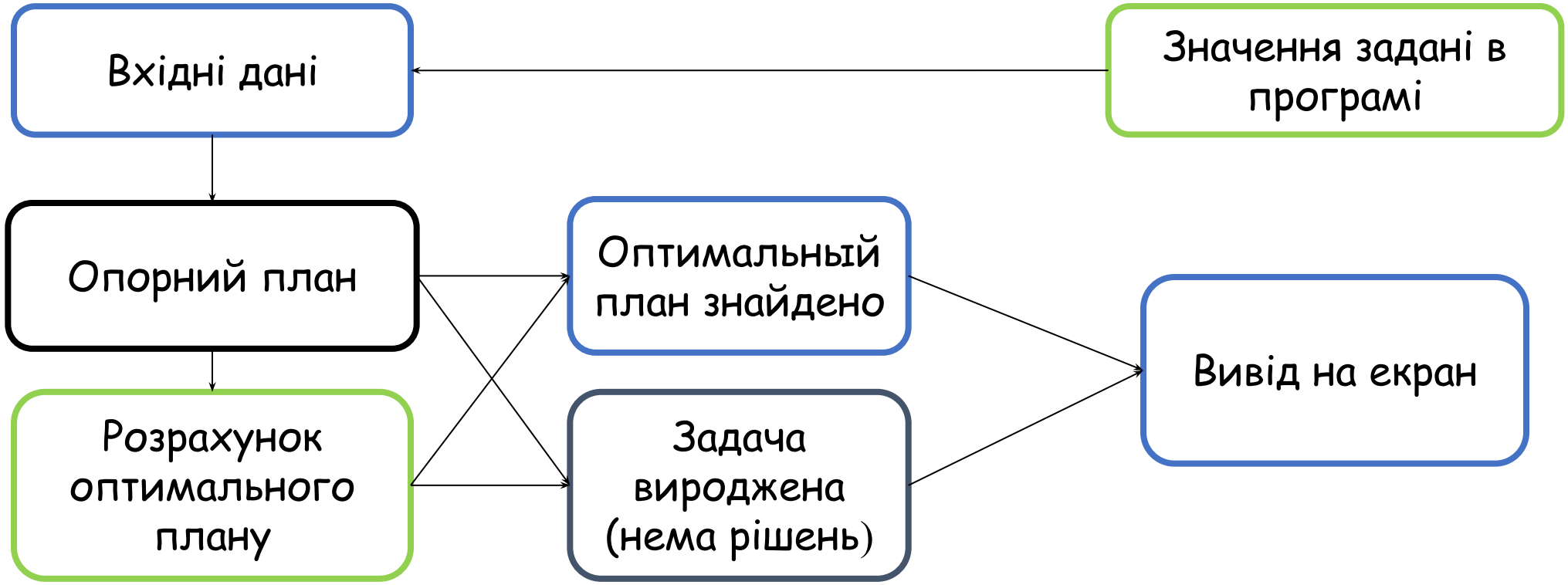
Використано 20-18,5 = 1,5 кг цукру

- Значення 300 у стовпці x1 означає, що

Кава використана майже повністю, у залишку 300 грам

- Значення змінних x2 и x5 равных 0 свідчать про те, що вода була використана повністю.

# Короткий алгоритм програми



```
/Library/Java/JavaVirtualMachines/jdk1.8.0_331.jdk/Contents/Home/bin/java ...
M = 4
N = 3
  10.00   10.00   10.00    1.00    0.00    0.00    0.00 3000.00
  50.00  150.00  150.00    0.00    1.00    0.00    0.00 15000.00
   0.00    0.00   50.00    0.00    0.00    1.00    0.00 5000.00
   5.00   10.00   10.00    0.00    0.00    0.00    1.00 20000.00
  12.00   13.00   18.00    0.00    0.00    0.00    0.00    0.00
value = -0.0

M = 4
N = 3
   6.67    0.00    0.00    1.00   -0.07    0.00    0.00 2000.00
   0.33    1.00    1.00    0.00    0.01    0.00    0.00  100.00
 -16.67  -50.00    0.00    0.00   -0.33    1.00    0.00    0.00
   1.67    0.00    0.00    0.00   -0.07    0.00    1.00 19000.00
   6.00   -5.00    0.00    0.00   -0.12    0.00    0.00 -1800.00
value = 1800.0
x_2 = 100.0

M = 4
N = 3
   1.00    0.00    0.00    0.15   -0.01    0.00    0.00  300.00
   0.00    1.00    1.00   -0.05    0.01    0.00    0.00    0.00
   0.00  -50.00    0.00    2.50   -0.50    1.00    0.00 5000.00
   0.00    0.00    0.00   -0.25   -0.05    0.00    1.00 18500.00
   0.00   -5.00    0.00   -0.90   -0.06    0.00    0.00 -3600.00
value = 3600.0
x_0 = 300.0
x_2 = 0.0

x[0] = 300.0
x[1] = 0.0
x[2] = 0.0
Solution: 3600.0

Process finished with exit code 0
```

1

2

3

4

# Результат роботи програми

1. Перша симплексна таблиця
2. Друга симплексна таблиця
3. Третя симплексна таблиця
4. Максимальне значення

# РЕКОМЕНДАЦІЇ

- За даними умовами та обмеженнями максимальний виторг на день буде складати 3600 грн, та 79200 на місяць. Використовувати рекомендується з наявних ресурсів тільки каву та воду. Все інше з метою збільшення прибутку використовувати не рекомендується.
- Щоб досягти максимального прибутку, рекомендується продавати виключно еспресо, в кількості 300 чашок на день, з урахуванням наявних обмежень у ресурсах. За таких умов прибуток буде 3600 грн. на день, що буде максимально можливим показником. З метою приведення до рентабельності надання інших послуг рекомендується значно підвищити вартість.
- Також, якщо збільшити кількість води на 1,5 літри, можна підвищити щоденний виторг на 10% (360 грн), за наявності таких саме обсягів кави, та коштовності. Відповідно місячний виторг зросте до 87120 грн (+7920 грн).

# ВИСНОВОК

- При виконанні даної лабораторної роботи, основна мета поставленого завдання була досягнута.
- Було вивчено базові завдання лінійного програмування, розраховано симплекс-таблиці та проаналізовано отриманий результат.
- Також було написано програму, яка автоматизує вирішення задачі лінійного програмування симплекс-методом.

# Дякуємо за увагу