



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 «СИМПЛЕКС-МЕТОД»

ВИКОНАЛИ:

СТУДЕНТИ ГРУПИ КС-42 ТА КУ-41

АСЕЄВ БОГДАН

ЛУПАНДІН АНТОНІЙ

КОЛОМІЙЦЕВА АЛЬОНА

ЧЕПІГА НАДІЯ

ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування - це напрям математичного програмування, що вивчає методи рішення екстремальних завдань, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм.

ЗЛП є задачею знаходження найбільшого (чи найменшого) значення лінійної функції.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max / \min$$

За умови, що змінні $x_1, x_2 \dots x_n$ задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_m. \end{cases}$$



СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод — це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого. Він є універсальним методом, який дозволяє вирішувати ЗЛП з будь-якою кількістю змінних.

- алгоритм симплекс-методу дає можливість розв'язувати ЗЛП незалежно від геометричного образу області допустимих розв'язків.
- метод визначає *початкове опорне рішення*, яке задовольняє систему обмежень, але не є оптимальним;
- *вказує напрямок переходу до наступного рішення*, яке покращує значення цільової функції.



АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з таких етапів:

- ✓ Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
- ✓ Побудова симплексної таблиці.
- ✓ Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
- ✓ Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
- ✓ Повторення дій починаючи з 3-го пункту.



УМОВА ЗАДАЧІ

Тип сировини	Назва напою			Запаси, кг
	Еспресо	Американо	Капучіно	
Мелена кава	10	10	10	3
Вода	50	150	150	15
Молоко	–	–	50	5
Цукор	5	10	10	20

ВИЗНАЧИТИ:

1) скільки філіжанок кожного виду кави необхідно продавати щодня, щоб місячний дохід був максимальний;

2) суму місячного доходу BUNKER coffee house від продажу кави, якщо відомо, що у звітний період було 22 робочі дні, а кількість проданих філіжанок не змінюється в залежності від дня тижня.

3) рекомендації щодо покращення роботи закладу.

* вважати, що 1 мілілітр = 1 грам

Еспресо	Американо	Капучіно
12 грн.	13 грн.	18 грн.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Загальна форма	Канонічна форма

$$F = 12x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_4 = 3000 \\ 50x_1 + 150x_2 + 150x_3 + x_5 = 15000 \\ 50x_3 + x_6 = 5000 \\ 5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_7 = 20000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 – небазисні змінні

x_4, x_5, x_6, x_7 – базисні змінні

$$\bar{X}_1 = (0, 0, 0, 3000, 15000, 5000, 20000)$$

Базис								Вільні члени
	10	10	10	1	0	0	0	3000
	50	150	150	0	1	0	0	15000
	0	0	50	0	0	1	0	5000
	5	10	10	0	0	0	1	20000
	-12	-13	-18	0	0	0	0	

в останньому рядку симплекс-таблиці є від'ємні елементи
 $\bar{X}_1 = (0, 0, 0, 3000, 15000, 5000, 20000)$ – не є оптимальним рішенням

- ✓ шукаємо розв'язуючий стовпчик – стовпчик x_3
- ✓ додаємо стовпчик «Симплекс-відношення» та розраховуємо його значення

Базис								Вільні члени	Симплекс-відношення
	10	10	10	1	0	0	0	3000	$3000/10=300$
	50	150	150	0	1	0	0	15000	$15000/150=100$
	0	0	50	0	0	1	0	5000	$5000/50=100$
	5	10	10	0	0	0	1	20000	$20000/10=2000$
	-12	-13	-18	0	0	0	0		

- ✓ шукаємо розв'язуючий рядок - x_5
- ✓ шукаємо розв'язуючий елемент - x_{53}

Базис								Вільні члени	Симплекс-відношення
	10	10	10	1	0	0	0	3000	300
	50	150	150	0	1	0	0	15000	100
	0	0	50	0	0	1	0	5000	100
	5	10	10	0	0	0	1	20000	2000
	-12	-13	-18	0	0	0	0		

Виводимо з базису x_5 , а вводимо - x_3

Оскільки в останньому стовпці є кілька мінімальних елементів 100, то номер рядка вибираємо за **правилом Креко**.

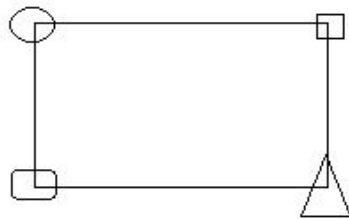
ПРАВИЛО КРЕКО

- Елементи рядків, що мають однакові найменші значення (у нашому випадку $\text{min}=100$), поділяються на передбачувані роздільники, а результати заносяться в додаткові рядки. За провідний рядок вибирається той, у якому раніше зустрінеться найменше приватне під час читання таблиці зліва направо стовпцями.
- Отже, при діленні 100 на 150 буде менше часе, чим при діленні 100 на 50.

- ✓ в стовпчик «Базис» вводимо нову базисну змінну x_3 , зберігаючи порядок змінних
- ✓ в комірках на перетині базисних змінних ставимо **1**, в інших комірках відповідних стовпчиків - **0**
- ✓ усі елементи розв'язуючого рядка ділимо на розв'язуючий елемент
- ✓ інші елементи розраховуємо за **правилом прямокутника**

Базис								Вільні члени	Симплекс-відношення
	10	10	10	1	0	0	0	3000	300
	50	150	150	0	1	0	0	15000	100
	0	0	50	0	0	1	0	5000	100
	5	10	10	0	0	0	1	20000	2000
	-12	-13	-18	0	0	0	0		

ПРАВИЛО ПРЯМОКУТНИКА



- Треба перерахувати елемент
- Елемент
- Елемент
- Роздільний елемент

Уявно малюємо прямокутник, одна вершина якого збігається з розв'язуючим елементом, інша - з елементом, образ якого ми шукаємо. Дві інші вершини визначаються однозначно.

Тоді елемент у новій таблиці буде дорівнює відповідному елементу попередньої таблиці мінус дріб, в знаменнику якої знаходиться розв'язуючий елемент, а в чисельнику - добуток елементів з двох невикористаних вершин прямокутника.

ЗАПОВНЮЄМО ДРУГУ СИМПЛЕКСНУ ТАБЛИЦЮ:

Базис								Вільні члени
	$20/3=6,6$	0	0	1	$-1/15$	0	0	2000
	$50/150=0,33$	1	1	0	$1/150$	0	0	100
	$-50/3=-16,6$	-50	0	0	$-1/3$	1	0	0
	$5/3=1,6$	0	0	0	$-1/15$	0	1	19000
	-6	5	0	0	0,12	0	0	

$$X_{41} = 10 - 50 \cdot 10 / 150 = 6,6$$

$$X_{71} = 5 - 50 \cdot 10 / 150 = 1,6$$

$$X_{42} = 10 - 1500 / 150 = 0$$

$$X_{61} = 0 - 50 \cdot 50 / 150 = -16,6$$

$$X_{62} = 0 - 50 \cdot 150 / 150 = -50$$

$$X_{72} = 10 - 1500 / 150 = 0$$

$$X_{45} = 0 - 10 \cdot 1 / 150 = -1/15 = -0,0667$$

$$X_{65} = 0 - 50 \cdot 1 / 150 = -1/3 = -0,3$$

$$X_{75} = 0 - 10 \cdot 1 / 150 = -1/15 = -0,0667$$

$$X_{4вч} = 3000 - 150000 / 150 = 2000$$

$$X_{6вч} = 5000 - 15000 \cdot 50 / 150 = 0$$

$$X_{7вч} = 20000 - 15000 \cdot 10 / 150 = 19000$$

$$-12 - 50 \cdot (-18) / 150 = -6$$

$$-13 - 150 \cdot (-18) / 150 = 5$$

$$0 - 0 \cdot (-18) / 150 = 0,12$$

Не є оптимальним рішенням, з тої причини що в останньому рядку є від'ємне значення. Умови оптимальності не виконані

ВИКОРИСТОВУЄМО ТОЙ САМИЙ АЛГОРИТМ, ТА ШУКАЄМО НОВІ СИМПЛЕКС-ВІДНОШЕННЯ

Базис								Вільні члени
	$20/3=6,6$	0	0	1	$-1/15$	0	0	2000
	$50/150=0,33$	1	1	0	$1/150$	0	0	100
	$-50/3=-16,6$	-50	0	0	$-1/3$	1	0	0
	$5/3=1,6$	0	0	0	$-1/15$	0	1	19000
	-6	5	0	0	0,12	0	0	

Базис	Базис							Вільні члени	Симплекс-відношення
	$20/3=6,6$	0	0	1	$-1/15$	0	0	2000	300
	$50/150=0,33$	1	1	0	$1/150$	0	0	100	300
	$-50/3=-16,6$	-50	0	0	$-1/3$	1	0	0	(0) -
	$5/3=1,667$	0	0	0	$-1/15$	0	1	19000	11400
	-6	5	0	0	0,12	0	0		

$$2000/20/3 = 3/10 = 300$$

$$100/(50/150)=3/10=300$$

$$19000/(5/3)=57/5=11400$$

ЗАПОВНЮЄМО ТРЕТЮ СИМПЛЕКСНУ ТАБЛИЦЮ:

Базис								Вільні члени
	1	0	0	$1/(20/3)$	$(-1/15) / (20/3)$	0	0	300
	0	1	1	-0,05	0,01	0	0	0
	0	-50	0	-2,5	0,5	1	0	5000
	0	0	0	-0,25	-1/12	0	1	18500
	0	0	0	$9/10=0,9$	$3/50=0,06$	0	0	

$$X_{3вч} = 0,1 - 2*(50/150) / (20/3) = 0$$

$$X_{6вч} = 0 - (-50/3)*2 / (20/3) = 5$$

$$X_{7вч} = 19 - (5/3)*2 / (20/3) = 37/2 = 18,5$$

$$X_{32} = 10=1$$

$$X_{62} = (-50) - 0 = -50$$

$$X_{34} = 0 - 1*(50/150) / (20/3) = -1.20$$

$$X_{64} = 0 - 1*(-50/3) / (20/3) = -5/2$$

$$X_{74} = 0 - 1*(5/3) / (20/3) = -1/4$$

$$X_{35} = 1/150 - (-1/15)*(50/150) / (20/3) = 1/100$$

$$X_{65} = (-1/3) - (-50/3)*(-1/15) / (20/3) = -1/2$$

$$X_{75} = (-1/15) - 5/3*(-1/15) / (20/3) = -1/12 = 0,083$$

$$0 - 1*(-6) / (20/3) = 0,9$$

$$(3/25) - (-6)*(-1/15) / (20/3) = 0,06$$

Умова оптимальності виконана:

в останньому рядку симплекс-таблиці усі елементи невід'ємні.

Отже, маємо таке оптимальне рішення:

$$\bar{X}_3 = (300, 0, 0, 0, 0, 5000, 18500)$$

$$F = 12x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$F(\bar{X}_3) = 12*300 + 13*0 + 18*0 + 0*0 + 0*0 + 0*5000 + 0*18500 = 3600 - \text{max value}$$

АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ

- У оптимальний план увійшла додаткова змінна x_6 . Отже, під час реалізації такого плану є недовикористані ресурси 3-го виду у кількості 5кг.

Молоко не рекомендується використовувати

- У оптимальний план увійшла додаткова змінна x_7 . Отже, під час реалізації такого плану є недовикористані ресурси 4-го виду у кількості $18\frac{1}{2}$.

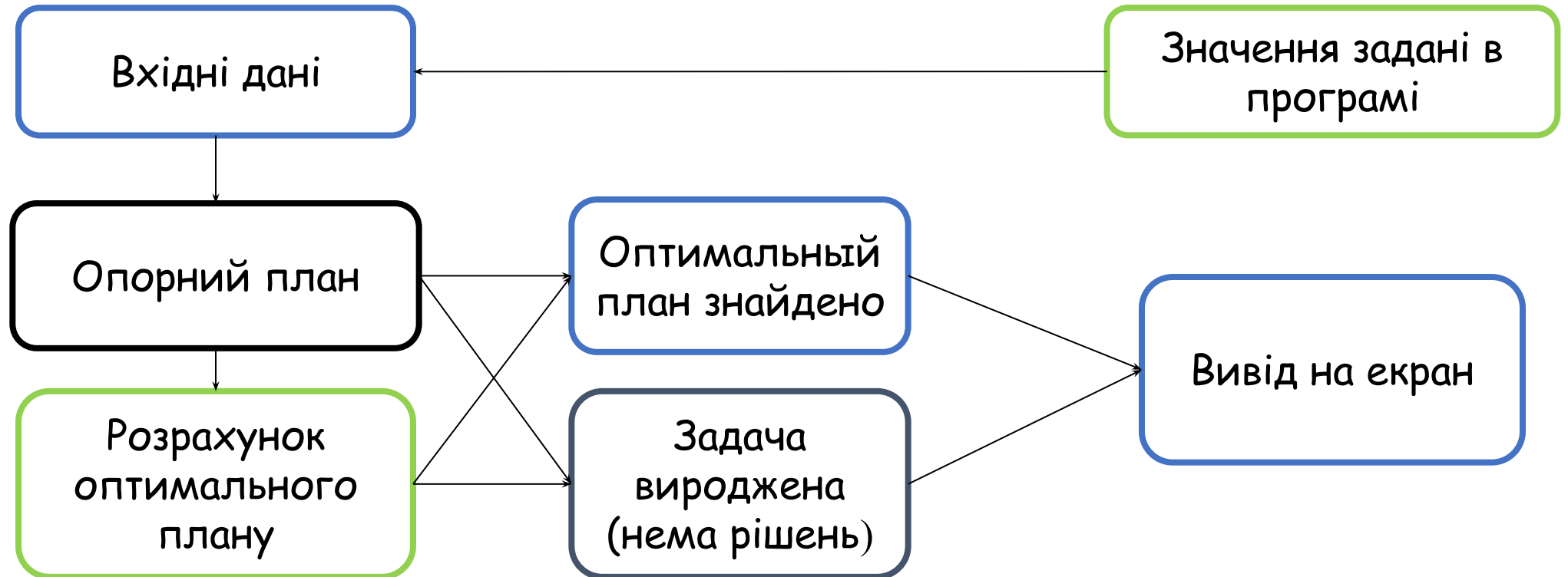
Використано $20 - 18,5 = 1,5$ кг цукру

- Значення 300 у стовпці x_1 означає, що

Кава використана майже повністю, у залишку 300 грам

- Значення змінних x_2 и x_5 рівних 0 свідчать про те, що вода була використана повністю.

КОРОТКИЙ АЛГОРИТМ ПРОГРАМИ



```
Library/Java/JavaVirtualMachines/jdk1.8.0_331.jdk/Contents/Home/bin/java ...
M = 4
N = 3
 10.00  10.00  10.00  1.00  0.00  0.00  0.00 3000.00
 50.00 150.00 150.00  0.00  1.00  0.00  0.00 15000.00
  0.00   0.00  50.00  0.00  0.00  1.00  0.00  5000.00
  5.00  10.00  10.00  0.00  0.00  0.00  1.00 20000.00
 12.00  13.00  18.00  0.00  0.00  0.00  0.00   0.00
value = -0.0

M = 4
N = 3
 6.67  0.00  0.00  1.00 -0.07  0.00  0.00 2000.00
 0.33  1.00  1.00  0.00  0.01  0.00  0.00  100.00
-16.67 -50.00  0.00  0.00 -0.33  1.00  0.00   0.00
 1.67  0.00  0.00  0.00 -0.07  0.00  1.00 19000.00 |
 6.00 -5.00  0.00  0.00 -0.12  0.00  0.00 -1800.00
value = 1800.0
x_2 = 100.0

M = 4
N = 3
 1.00  0.00  0.00  0.15 -0.01  0.00  0.00  300.00
 0.00  1.00  1.00 -0.05  0.01  0.00  0.00   0.00
 0.00 -50.00  0.00  2.50 -0.50  1.00  0.00 5000.00
 0.00  0.00  0.00 -0.25 -0.05  0.00  1.00 18500.00
 0.00 -5.00  0.00 -0.90 -0.06  0.00  0.00 -3600.00
value = 3600.0
x_0 = 300.0
x_2 = 0.0

x[0] = 300.0
x[1] = 0.0
x[2] = 0.0
Solution: 3600.0

Process finished with exit code 0
```

1

2

3

4

РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ ПРОГРАМИ

1

Перша симплексна таблиця

2

Друга симплексна таблиця

3

Третя симплексна таблиця

4

Максимальне значення

РЕКОМЕНДАЦІЇ

- За даними умовами та обмеженнями максимальний виторг на день буде складати 3600 грн, та 79200 на місяць. Використовувати рекомендується з наявних ресурсів тільки каву та воду. Все інше з метою збільшення прибутку використовувати не рекомендується.
- Щоб досягти максимального прибутку, рекомендується продавати виключно еспресо, в кількості 300 чашок на день, з урахуванням наявних обмежень у ресурсах. За таких умов прибуток буде 3600 грн. на день, що буде максимально можливим показником. З метою приведення до рентабельності надання інших послуг рекомендується значно підвищити вартість.
- Також, якщо збільшити кількість води на 1,5 літри, можна підвищити щоденний виторг на 10% (360 грн), за наявності таких саме обсягів кави, та коштовності. Відповідно місячний виторг зросте до 87120 грн (+7920 грн).



ВИСНОВОК

- При виконанні даної лабораторної роботи, основна мета поставленого завдання була досягнута.
- Було вивчено базові завдання лінійного програмування, розраховано симплекс-таблиці та проаналізовано отриманий результат.
- Також було написано програму, яка автоматизує вирішення задачі лінійного програмування симплекс-методом.



ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ

