ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методы интегрирования

- ***Первообразной функцией*** ***по отношению к данной функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции, т.е. $F'(x) = f(x)$.***

Для данной функции $y = f(x)$ первообразных функций бесчисленное множество, т.к. любая из функций $F(x) + C$, также является первообразной для $y = f(x)$.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $y = f(x)$ называется ее неопределенным интегралом обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где $f(x)dx$ - называется подынтегральным выражением,

функция $f(x)$ - подынтегральной функцией.

Геометрический смысл неопределенного интеграла.

Геометрически, *неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, полученных путем параллельного переноса графика функции*

$y = F(x)$ вдоль оси ординат (рис.3)

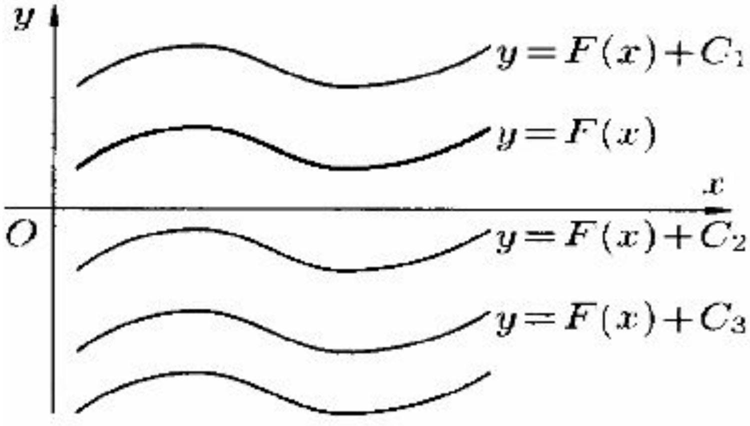

Рис. 3

Основные свойства неопределённого интеграла

Свойство 1. ***Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:***

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Свойство 2. ***Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:***

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Свойство 3. ***Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс const:***

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойство 4. ***Линейность интеграла.***

$$\int (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x))dx = k_1 \int f_1(x)dx \pm k_2 \int f_2(x)dx$$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Степенная	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\int dx = x + C$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Показательная	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
	$\int e^x dx = e^x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Тригонометрические	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Обратные тригонометрические	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dxrc \sin x + C$

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование ***– это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов.***

Непосредственное интегрирование

Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

- ✔ ***Деление числителя на знаменатель почленно;***
- ✔ ***Применение формул сокращенного умножения;***
- ✔ ***Применение тригонометрических тождеств.***

Пример № 1. **Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.**

$$\int 2x\sqrt{x}dx$$

- ***Используя свойство неопределенного интеграла, вынесем за знак интеграла постоянный множитель.***
- ***Затем, выполняя элементарные математические преобразования, приведем подынтегральную функцию к степенному виду:***

$$\int 2x\sqrt{x}dx = \int 2x \cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int 2x^{\frac{3}{2}}dx = 2 \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + C$$

Пример № 2. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$

Решение:

$$\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}-\frac{2x}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int\left(3x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{2\cdot 3x^{\frac{1}{2}}}{1}+\frac{6\cdot x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{2\cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

$$= 6\sqrt{x}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$$

Пример № 3.

$$\int\left(3-2\sqrt{x}\right)^2dx$$

Решение:

$$\int\left(3-2\sqrt{x}\right)^2dx=\int\left(9-12\sqrt{x}+4x\right)dx=$$

$$=9x-\frac{2\cdot 12x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4x^2}{2}+C=9x-8\sqrt{x^3}+2x^2+C$$

Пример № 4.

$$\int ctg^2 x dx$$

Решение:

$$\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -ctgx - x + C$$

Метод подстановки

Замена переменной (метод подстановки)

Замена переменной (метод подстановки) – ***это метод, заключающийся во введении новой переменной с целью преобразования данного интеграла в табличный.***

Замена переменной (метод подстановки)

- ***Чаще всего этот метод используется, если в подынтегральном выражении содержится сложная функция, тогда ее промежуточный аргумент и надо обозначить как новую переменную.***

НАПРИМЕР $t = t(x)$

<u>Далее необходимо выполнить следующие действия:</u>

- ***Найти дифференциал новой переменной*** $dt = t'(x)dx$ ***;***
- ***Записать прежний интеграл, используя только переменную t, если подстановка сделана правильно, то полученный интеграл*** $\int \varphi(t)dt$ ***должен быть табличным;***
- ***используя таблицу интегралов, записать решение для подынтегральной функции*** $\varphi(t)$ ***;***
- ***Осуществить обратную подстановку, заменив переменную t.***

Подстановка (замена переменной) в определённом интеграле - **необходимо выполнить следующие действия:**

- *Ввести новую переменную $t = t(x)$;*
- *Найти дифференциал новой переменной $dt = t'(x)dx$;*
- *вычислить новые значения пределов интегрирования:*

  $\alpha = t(a)$ и $\beta = t(b)$
- *Записать прежний интеграл, используя только переменную t и новые пределы α и β;*
- *Используя таблицу интегралов, записать решение для полученной подынтегральной функции;*
- *Применив формулу Ньютона-Лейбница, вычислить значение определенного интеграла.*

Замечание. *При вычислении определённых интегралов с помощью подстановки нет необходимости возвращаться к первоначальному аргументу.*

Пример № 5. **Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменной.**

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

Сделаем замену переменной $t = \sin x$, тогда

$dt = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$.

Исходный интеграл имеет вид:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt$$

Таким образом, мы получили неопределенный интеграл табличного вида: степенная функция.

Используя правило нахождения неопределенного интеграла от степенной функции, найдем:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Сделав обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Пример № 6. $\int x\cdot\sqrt[4]{2+x^2}\,dx$

Решение:

$$\int x\cdot\sqrt[4]{2+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[4]{2+x^2}=t\\ 2+x^2=t^4\\ \left(2+x^2\right)'dx=\left(t^4\right)'dt\\ 2xdx=4t^3dt;\,xdx=2t^3dt\end{array}\right|=$$

$$=\int 2t^3\cdot tdt=\int 2t^4dt=\frac{2t^5}{5}+C=0{,}4t^5+C=$$

$$=0{,}4\sqrt[4]{\left(2+x^2\right)^5}+C$$

Пример № 7. $\int x \cdot e^{x^2} dx$

Решение:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ \left(x^2\right)' dx = (t)' dt \\ 2xdx = dt; xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = 0{,}5 e^{x^2} + C$$

Интегрирование по частям

3. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям ***– это метод, заключающийся в использовании формулы:***

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

- ***Данный метод интегрирования основан на тождестве:***

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$$

где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ - две функции, имеющие на данном промежутке производные.

Взяв интеграл от обеих частей данного тождества, будем иметь:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Пример № 8.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx$$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = (\ln x)' dx \\ dv = x^2 dx & du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int x^2 dx = \dfrac{1}{3} x^3 & \end{array} \right| =$$

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

Ответ: $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

Пример № 9. $\int x\cos 6x dx$

Решение:

$$\int x\cos 6x dx = \left| \begin{matrix} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 6x dx \\ v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x \end{matrix} \right| =$$

$$\int x\cos 6x dx = uv - \int v du = \frac{1}{6}x\cdot\sin 6x - \int \frac{1}{6}\cdot\sin 6x dx =$$

$$= \frac{1}{6}x\cdot\sin 6x + \frac{1}{36}\cdot\cos 6x + C$$

Ответ: $\frac{1}{6}x\cdot\sin 6x + \frac{1}{36}\cdot\cos 6x + C$

Спасибо за внимание