

Методы интегрирования



- **Первообразной функцией** по отношению к данной функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна данной функции, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Для данной функции $y = f(x)$ первообразных функций бесчисленное множество, т.к. любая из функций $F(x) + C$, также является первообразной для $y = f(x)$.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $y = f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** обозначается символом:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

где $f(x) dx$ - называется **подынтегральным** выражением,

функция $f(x)$ - **подынтегральной** функцией.

Геометрический смысл неопределенного интеграла.

Геометрически, неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, полученных путем параллельного переноса графика функции $y = F(x)$ вдоль оси ординат (рис.3)

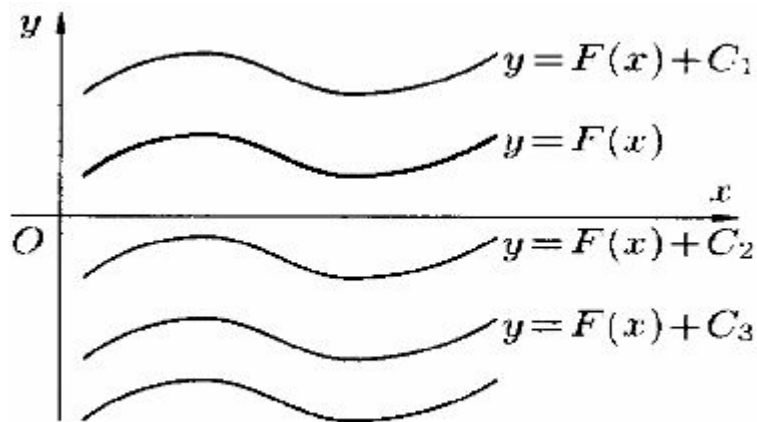


Рис. 3

Основные свойства неопределённого интеграла

Свойство 1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Свойство 2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Свойство 3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс const:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойство 4. Линейность интеграла.

$$\int (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx \pm k_2 \int f_2(x) dx$$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
Степенная	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\int dx = x + C$
	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
<i>Показательная</i>	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
	$\int e^x dx = e^x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
<i>Тригонометрические</i>	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

Таблица основных интегралов

Функция	Интеграл
<i>Обратные тригонометрические</i>	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C$

Основные методы интегрирования



Непосредственное интегрирование



Непосредственное интегрирование – это метод, основанный на применении тождественных преобразований подынтегральной функции, а также основных свойств неопределенного интеграла и табличных интегралов.

Непосредственное интегрирование

Наиболее часто используются следующие преобразования подынтегральной функции:

- ✓ *Деление числителя на знаменатель почленно;*
- ✓ *Применение формул сокращенного умножения;*
- ✓ *Применение тригонометрических тождеств.*

Пример № 1. Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.

$$\int 2x\sqrt{x}dx$$

- *Используя свойство неопределенного интеграла, вынесем за знак интеграла постоянный множитель.*
- *Затем, выполняя элементарные математические преобразования, приведем подынтегральную функцию к степенному виду:*

$$\int 2x\sqrt{x}dx = \int 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int 2x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \cdot \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \sqrt{x^5} + C$$

Пример № 2.

$$\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx$$

Решение:

$$\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{2 \cdot 3x^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{6 \cdot x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{2 \cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3} =$$

$$= 6\sqrt{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$$

Пример № 3.

$$\int (3 - 2\sqrt{x})^2 dx$$

Решение:

$$\int (3 - 2\sqrt{x})^2 dx = \int (9 - 12\sqrt{x} + 4x) dx =$$

$$= 9x - \frac{2 \cdot 12x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4x^2}{2} + C = 9x - 8\sqrt{x^3} + 2x^2 + C$$

Пример № 4.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctgx} - x + C \end{aligned}$$

Метод подстановки



Замена переменной (метод подстановки)

Замена переменной (метод подстановки) – это метод, заключающийся во введении новой переменной с целью преобразования данного интеграла в табличный.

Замена переменной (метод подстановки)

- *Чаще всего этот метод используется, если в подынтегральном выражении содержится сложная функция, тогда ее промежуточный аргумент и надо обозначить как новую переменную.*

НАПРИМЕР $t = t(x)$

Далее необходимо выполнить следующие действия:

- *Найти дифференциал новой переменной $dt = t'(x)dx$;*
- *Записать прежний интеграл, используя только переменную t , если подстановка сделана правильно, то полученный интеграл $\int \varphi(t)dt$ должен быть табличным;*
- *используя таблицу интегралов, записать решение для подынтегральной функции $\varphi(t)$;*
- *Осуществить обратную подстановку, заменив переменную t .*

Подстановка (замена переменной) в определённом интеграле - необходимо выполнить следующие действия:

- Ввести новую переменную $t = t(x)$;
- Найти дифференциал новой переменной $dt = t'(x)dx$;
- вычислить новые значения пределов интегрирования:
 $\alpha = t(a)$ и $\beta = t(b)$
- Записать прежний интеграл, используя только переменную t и новые пределы α и β ;
- Используя таблицу интегралов, записать решение для полученной подынтегральной функции;
- Применив формулу Ньютона-Лейбница, вычислить значение определенного интеграла.

Замечание. При вычислении определённых интегралов с помощью подстановки нет необходимости возвращаться к первоначальному аргументу.

Пример № 5. Найти неопределенный интеграл, используя метод замены переменной.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

Сделаем замену переменной $t = \sin x$, тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x dx$.

Исходный интеграл имеет вид:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt$$

Таким образом, мы получили неопределенный интеграл табличного вида: степенная функция.

Используя правило нахождения неопределенного интеграла от степенной функции, найдем:

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Сделав обратную замену, получим окончательный ответ:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

Ответ: $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

Пример № 6. $\int x \cdot \sqrt[4]{2+x^2} dx$

Решение:

$$\int x \cdot \sqrt[4]{2+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{2+x^2} = t \\ 2+x^2 = t^4 \\ (2+x^2)' dx = (t^4)' dt \\ 2x dx = 4t^3 dt; x dx = 2t^3 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int 2t^3 \cdot t dt = \int 2t^4 dt = \frac{2t^5}{5} + C = 0,4t^5 + C =$$

$$= 0,4 \sqrt[4]{(2+x^2)^5} + C$$

Пример № 7. $\int x \cdot e^{x^2} dx$

Решение:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x^2 = t \\ (x^2)' dx = (t)' dt \\ 2x dx = dt; x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = 0,5e^{x^2} + C$$

Интегрирование по частям



3. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям – это метод, заключающийся в использовании формулы:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

- *Данный метод интегрирования основан на тождестве:*

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ - две функции, имеющие на данном промежутке производные.

Взяв интеграл от обеих частей данного тождества, будем иметь:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

Пример № 8.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx$$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = (\ln x)' dx \\ dv = x^2 dx \quad du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \ln x dx &= uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

Пример № 9. $\int x \cos 6x dx$

Решение:

$$\int x \cos 6x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 6x dx \\ v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6} \sin 6x \end{array} \right| =$$

$$\int x \cos 6x dx = uv - \int v du = \frac{1}{6} x \cdot \sin 6x - \int \frac{1}{6} \cdot \sin 6x dx =$$

$$= \frac{1}{6} x \cdot \sin 6x + \frac{1}{36} \cdot \cos 6x + C$$

Ответ: $\frac{1}{6} x \cdot \sin 6x + \frac{1}{36} \cdot \cos 6x + C$

Спасибо за внимание

