

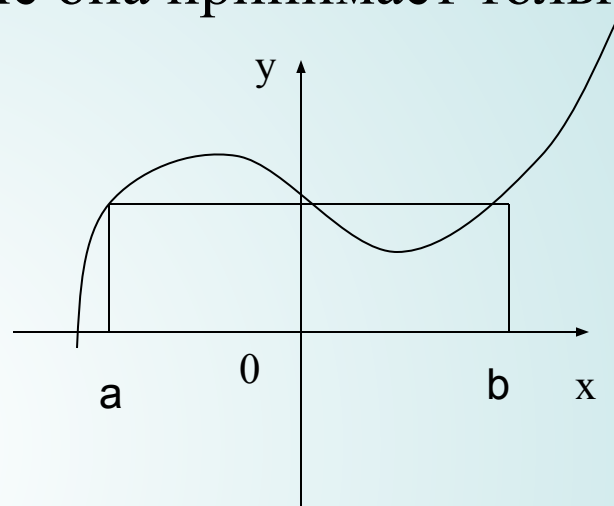
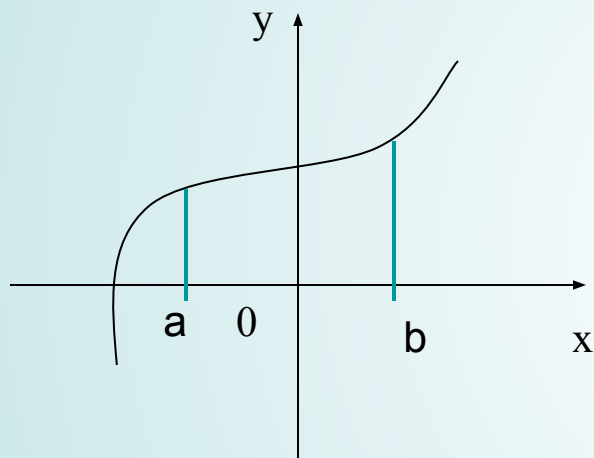
# Лекция



## Обратные тригонометрические функции

# I. Понятие обратной функции

Функция  $y = f(x)$ , определенная на промежутке  $X$ , называется **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке промежутка  $X$ .



Функция  $y = f(x)$  не обратима на  $[a; b]$

Функция  $y = f(x)$  обратима на  $[a; b]$

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна на промежутке  $X$ , то она обратима на этом промежутке.

**Доказательство.**

Пусть функция  $y = f(x)$  возрастает на  $X$ , тогда по определению возрастающей функции

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

т.о. различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции, т.е. функция обратима.

Пусть обратимая функция  $y = f(x)$  определена на промежутке  $X$ , а областью значений ее является промежуток  $Y$ . Поставим в соответствие каждому  $y \in Y$  то единственное значение  $x \in X$ , при котором  $y = f(x)$ . Тогда получим функцию, которая обозначается

$$x = f^{-1}(y)$$

и называется *обратной* по отношению к функции  $y = f(x)$ .

Обычно для обратной функции делают переход к привычным обозначениям, т.е. аргумент обозначают буквой  $x$ , а значение функции  $y$ .

Поэтому вместо  $x = f^{-1}(y)$  пишут  $y = f^{-1}(x)$

Замечание. Графики взаимнообратных функций симметричны относительно прямой  $y = x$

# Алгоритм получения обратной функции

- 1) Убедиться в том, что функция  $y = f(x)$  обратима на  $X$ .
- 2) Из уравнения  $y = f(x)$  выразить  $x$  через  $y$ .
- 3) В полученном равенстве поменять местами  $x$  и  $y$ .

## Свойства обратной функции

- 1)  $D(f) = E(f^{-1}); \quad E(f) = D(f^{-1})$
- 2) Если функция  $y = f(x)$  возрастает (убывает) на  $D(f)$ , то и функция  $y = f^{-1}(x)$  возрастает (убывает) на  $D(f^{-1})$  ;
- 3)  $f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D(f)$

# Лекция



## Обратные тригонометрические функции

# Тест 10 минут

## Критерии

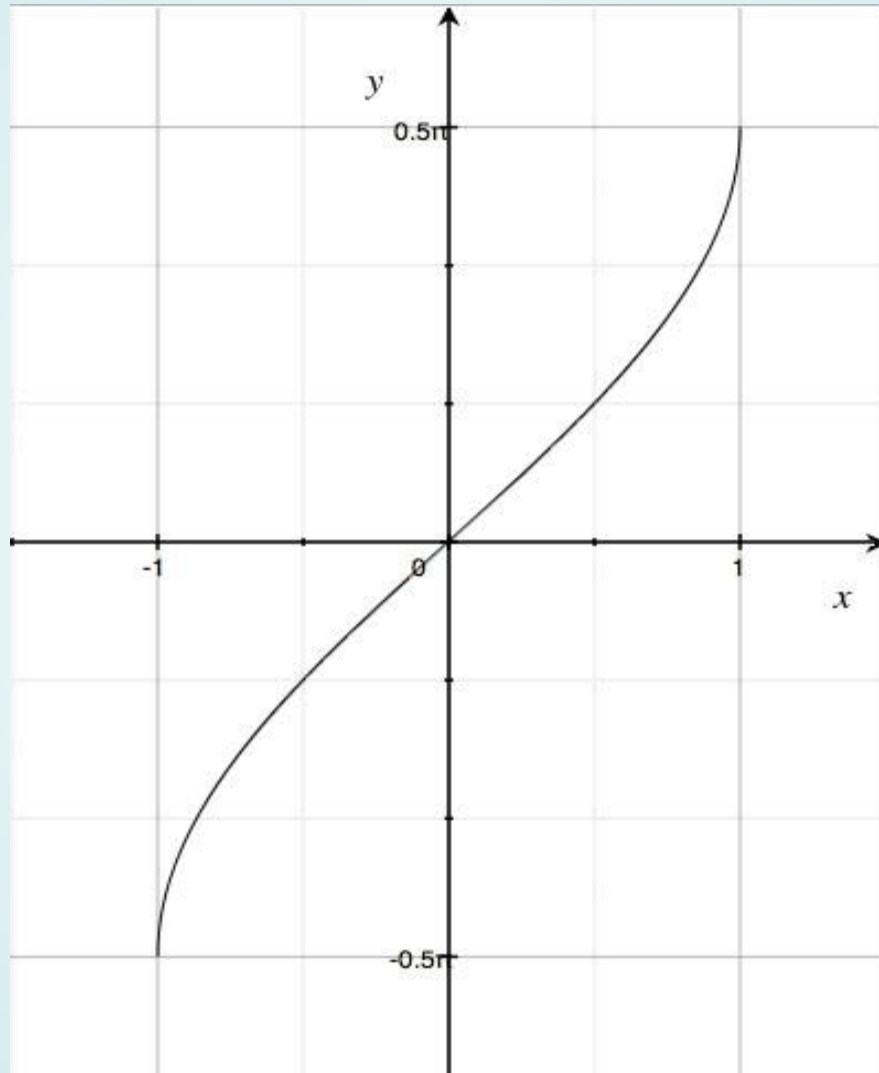
Оценка «5» - 5 баллов

Оценка «4» - 4 балла

Оценка «3» - 3 балла

Оценка «2» - 2 и менее баллов

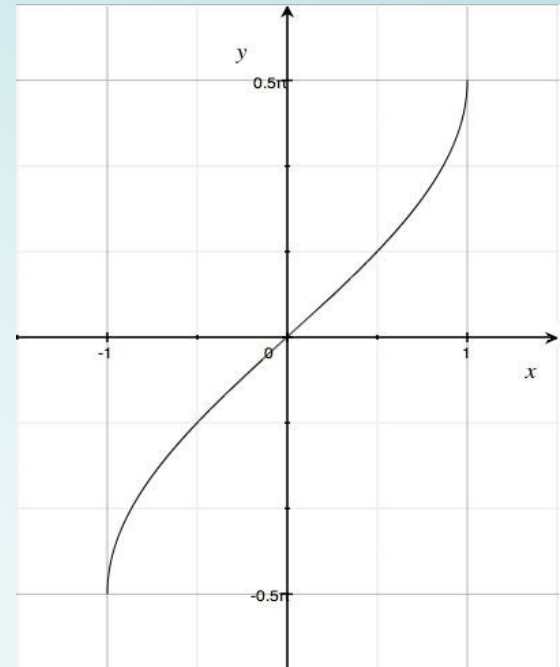
$$y = \arcsin x$$



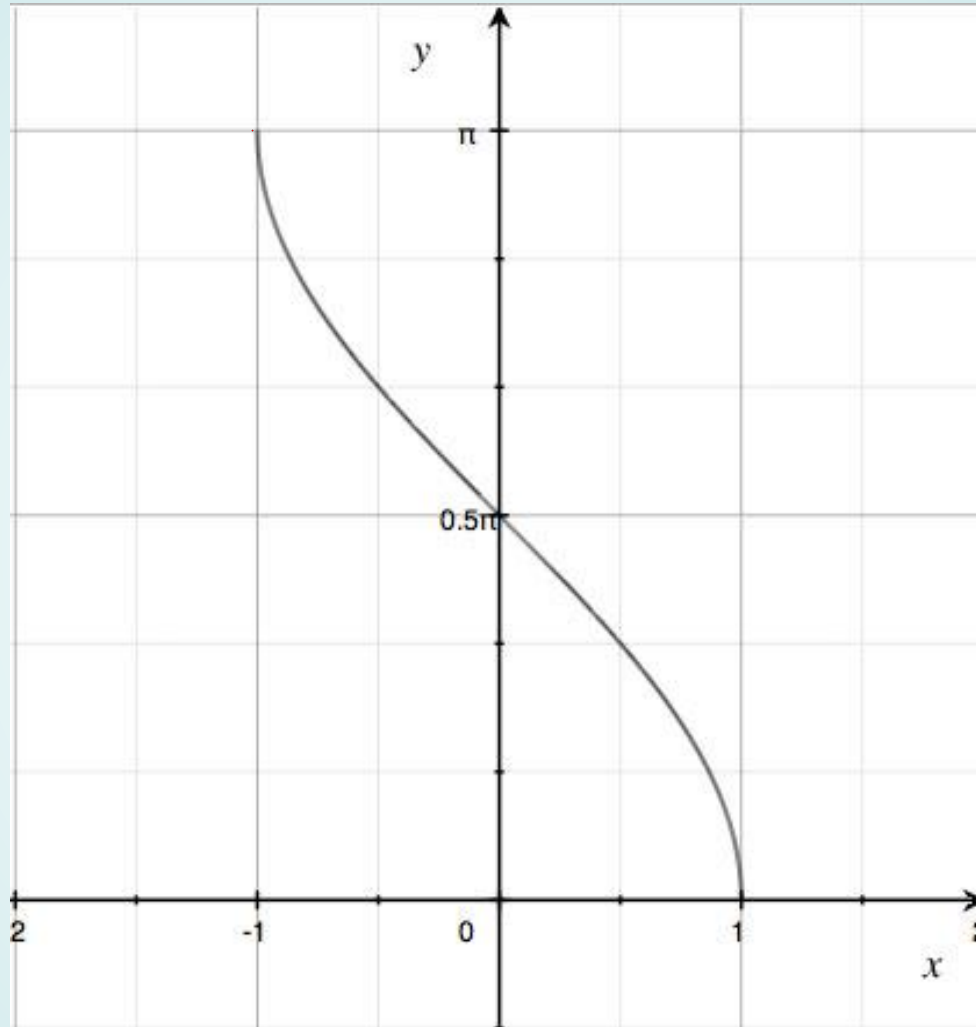


# $y = \arcsin x$

- 1) Область определения  $D(y) = [-1; 1]$
- 2) Область значений  $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$
- 3) Функция нечетная  $\arcsin x = -\arcsin(-x)$  ;
- 4) Функция не является периодической ;
- 5) Функция возрастает на  $D(y)$ ;
- 6) Точки пересечения с осями:  $x=0, y=0$ ;
- 7) Промежутки знакопостоянства  $\arcsin x > 0$  при  $x \in (0; 1]$   
 $\arcsin x < 0$  при  $x \in [-1; 0)$
- 8) Наибольшее значение  $y = \frac{\pi}{2}$  при  $x = 1$ ,  
наименьшее значение  $y = -\frac{\pi}{2}$  при  $x = -1$ ;
- 9) Ассимптот нет ;

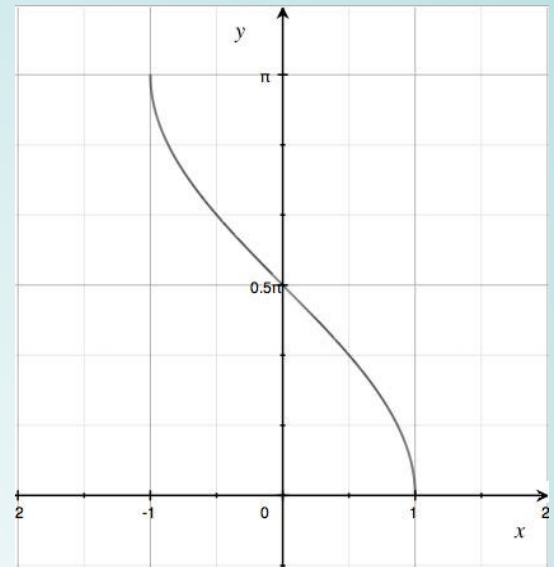


$$y = \arccos x$$

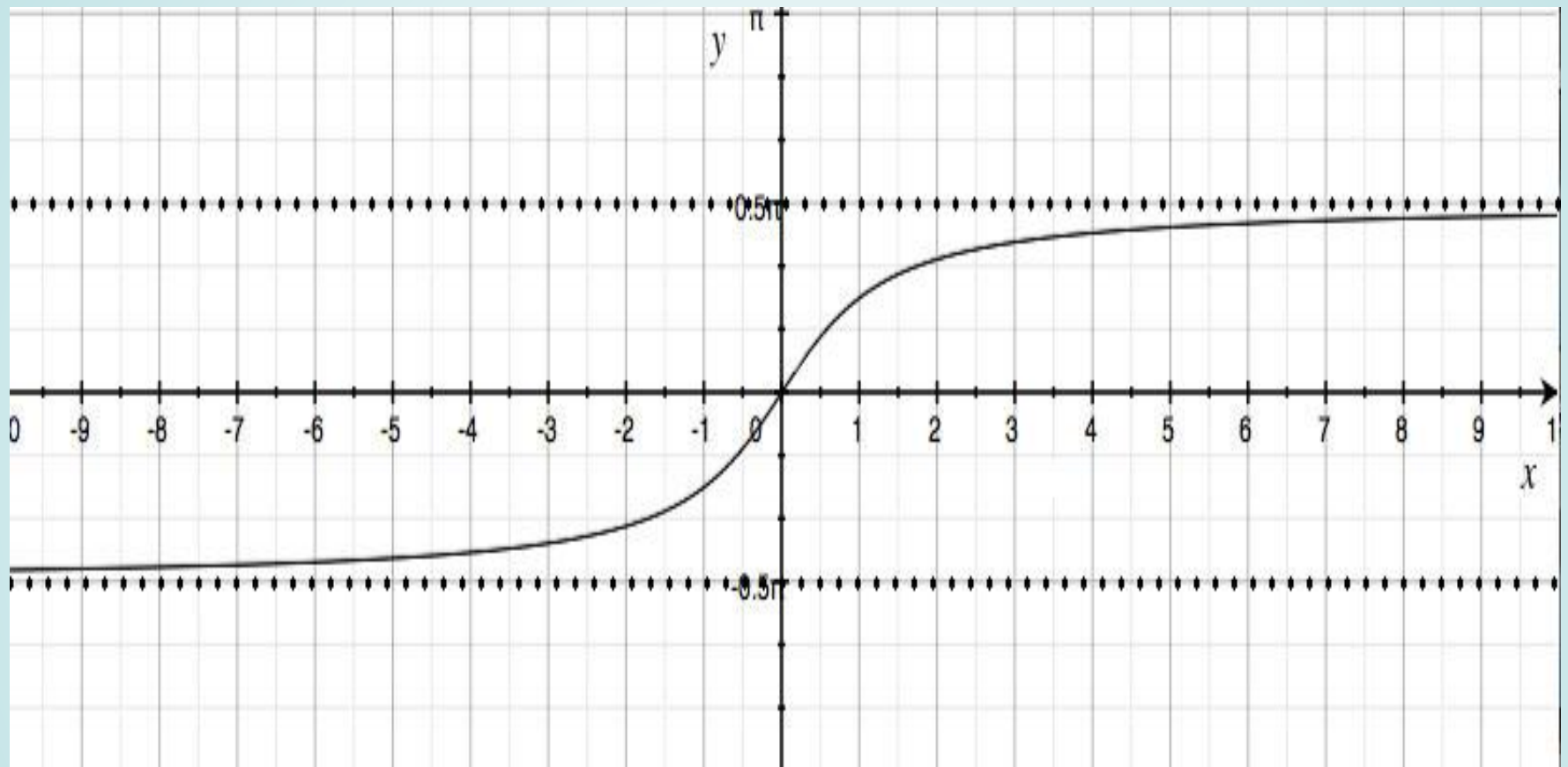


# $y = \arccos x$

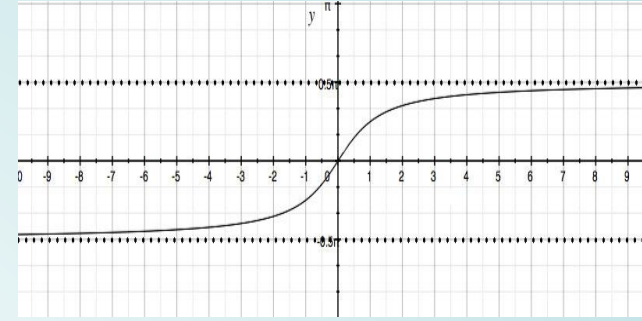
- 1) Область определения  $D(y) = [-1; 1]$
- 2) Область значений  $E(y) = [0; \pi]$  ;
- 3) Функция не обладает определенной четностью;
- 4) Функция не является периодической ;
- 5) Функция убывает на  $D(y)$ ;
- 6) Точки пересечения с осями: 1)  $x=0, y = \frac{\pi}{2}$ ; 2)  $y=0, x=1$
- 7) Промежутки знакопостоянства  $\arccos x > 0$  при  $x \in [-1; 1]$
- 8) Наибольшее значение  $y = \pi$  при  $x = -1$ ,  
наименьшее значение  $y = 0$  при  $x = 1$ ;
- 9) Ассимптот нет .



$$y = \operatorname{arctg} x$$

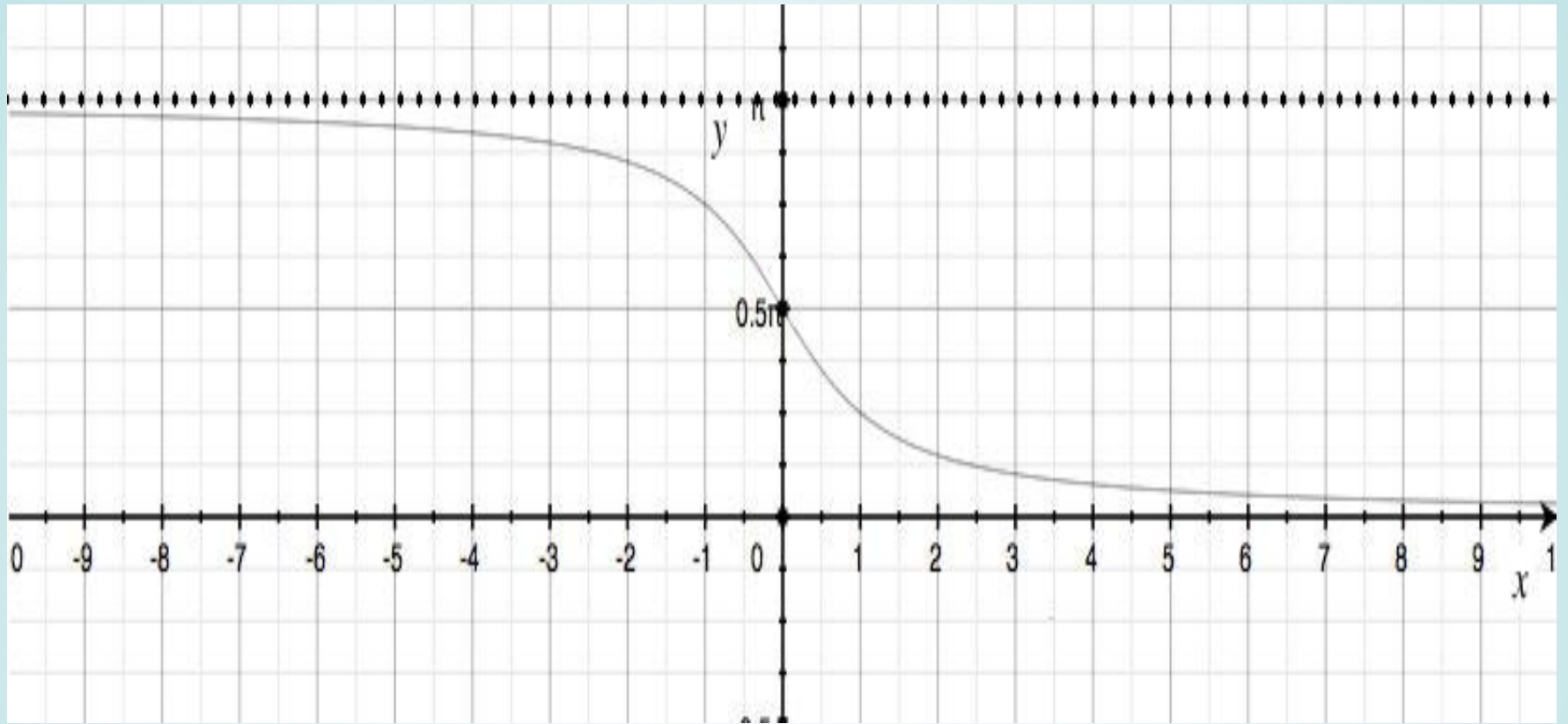


# $y = \operatorname{arctg} x$



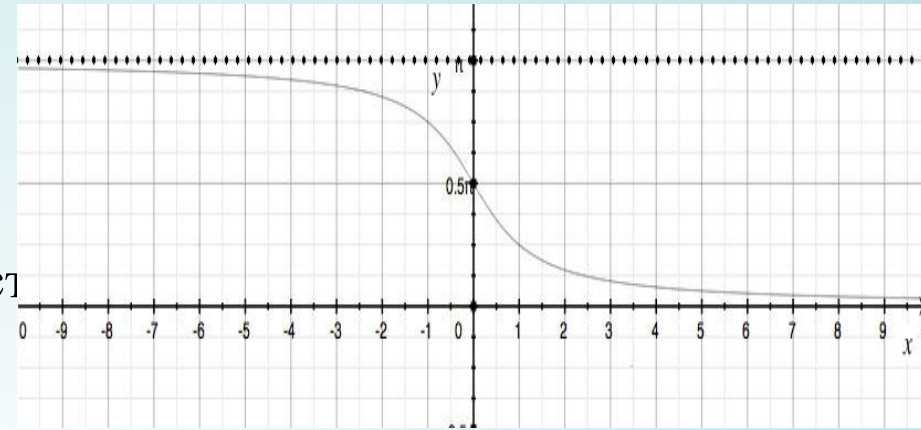
- 1) Область определения  $D(y) = \mathbb{R}$  ;
- 2) Область значений  $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$  ;
- 3) Функция нечетная  $\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} (-x)$  ;
- 4) Функция неперiodическая ;
- 5) Функция возрастает на  $D(y)$  ;
- 6) Точки пересечения с осями:  $x=0, y=0$  ;
- 7) Промежутки знакопостоянства  $\operatorname{arctg} x > 0$  при  $x \in (0; +\infty)$   
 $\operatorname{arctg} x < 0$  при  $x \in (-\infty; 0)$
- 8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
- 9) Горизонтальные асимптоты  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  ;

$$y = \operatorname{arctg} x$$



# $y = \operatorname{arctg} x$

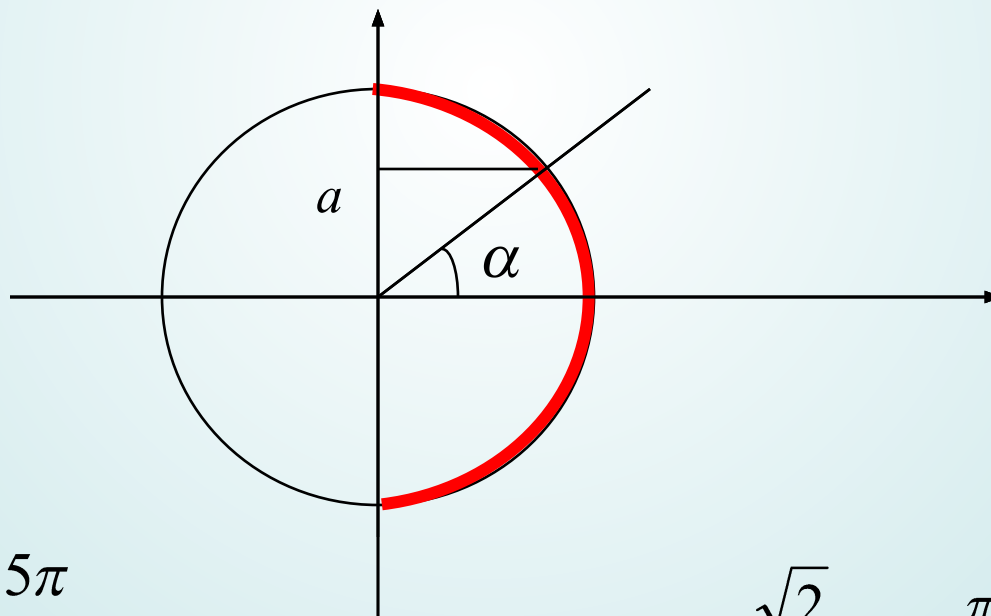
- 1) Область определения  $D(y) = \mathbb{R}$  ;
- 2) Область значений  $E(y) = (0; \pi)$  ;
- 3) Функция не имеет определенной четности ;
- 4) Функция неперiodическая ;
- 5) Функция убывает на  $D(y)$  ;
- 6) Точки пересечения с осями:  $x=0$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$  ;
- 7) Промежутки знакопостоянства  $\operatorname{arctg} x > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$  ;
- 8) Наибольшего и наименьшего значений не существует ;
- 9) Горизонтальные асимптоты  $y = 0$ ;  $y = \pi$ .



# Смысловые значения записей $\arcsin a$ , $\arccos a$ , $\operatorname{arctg} a$ , $\operatorname{arcctg} a$

$\arcsin a$  – это угол из промежутка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ .

$$\arcsin a = \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \alpha = a$$



$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$$

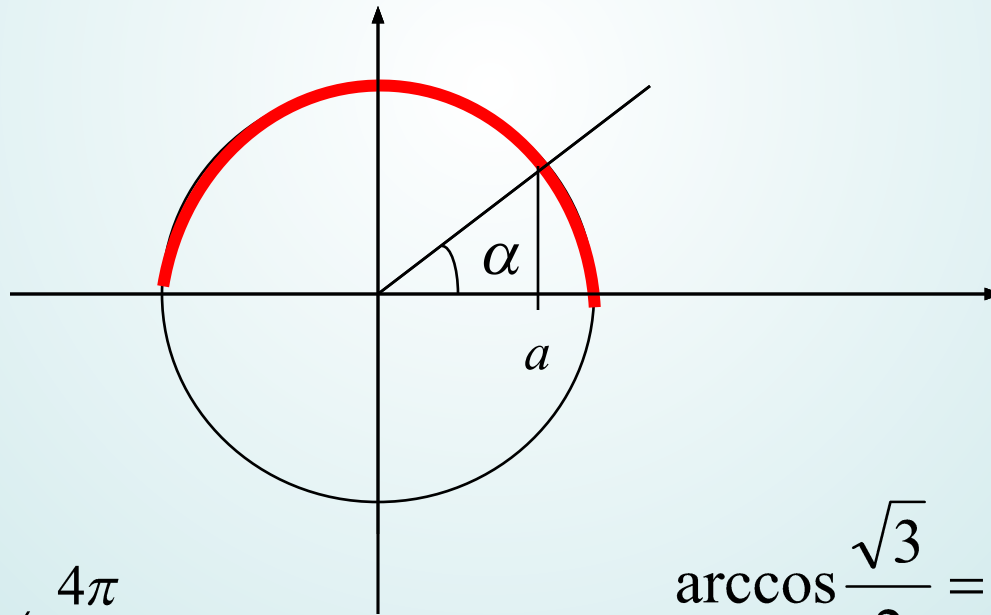
$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \neq -\frac{3\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$



# Смысловые значения записей $\arcsin a$ , $\arccos a$ , $\operatorname{arctg} a$ , $\operatorname{arcctg} a$

$\arccos a$  – это угол из промежутка  $[0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ .

$$\arccos a = \alpha, \alpha \in [0; \pi] \Rightarrow \cos \alpha = a$$



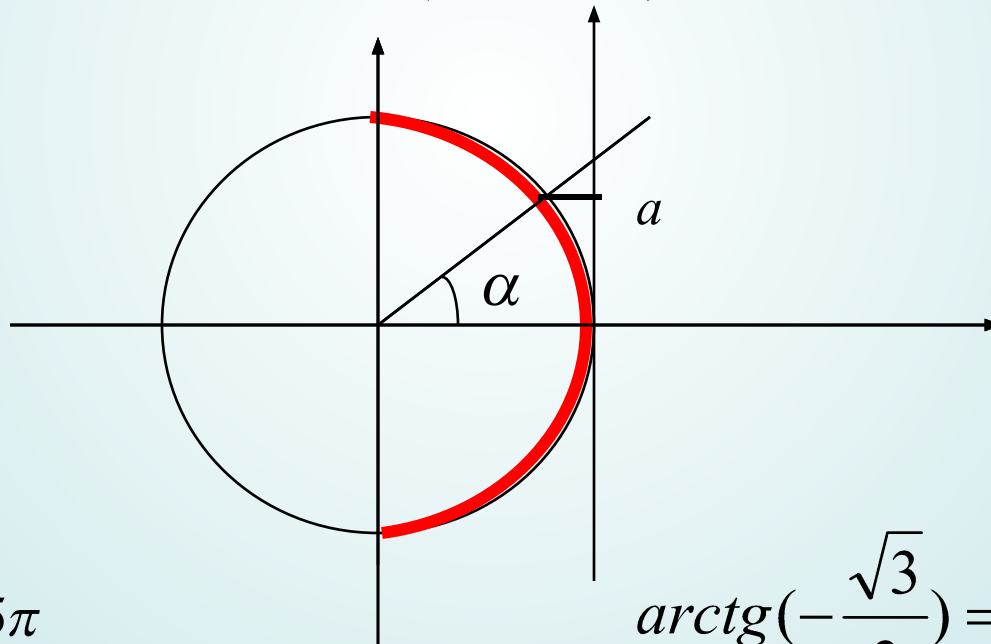
$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \neq \frac{4\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \neq -\frac{\pi}{6}$$

# Смысловые значения записей $\arcsin a$ , $\arccos a$ , $\arctg a$ , $\text{arcctg } a$

$\arctg a$  – это угол из промежутка  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , тангенс которого равен  $a$ .

$$\arctg a = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{tg } \alpha = a$$



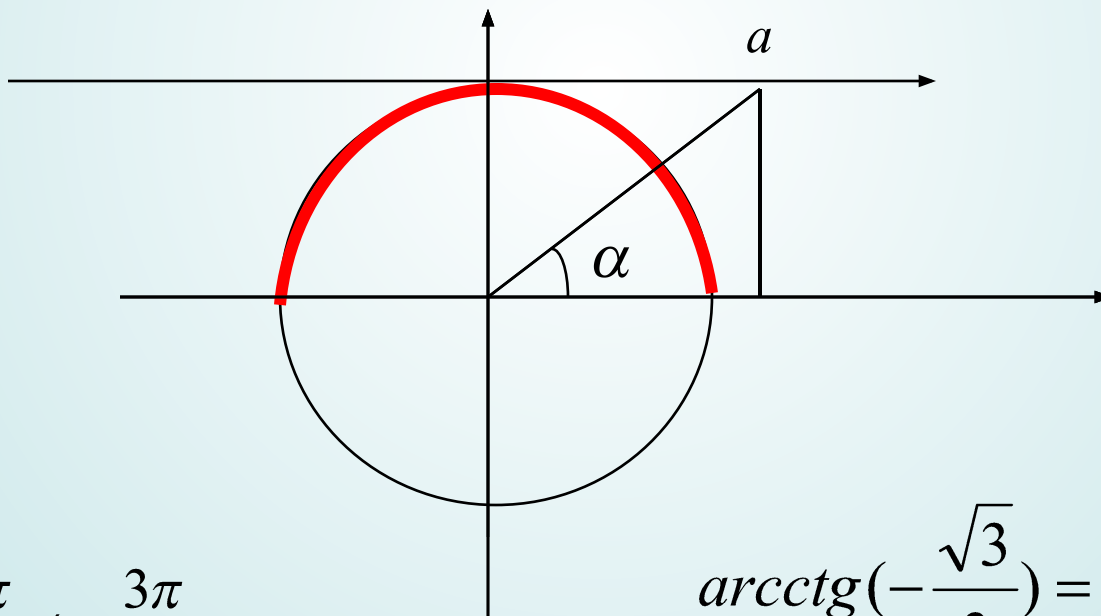
$$\arctg 1 = \frac{\pi}{4} \neq \frac{5\pi}{4}$$

$$\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$$

# Смысловые значения записей $\arcsin a$ , $\arccos a$ , $\operatorname{arctg} a$ , $\operatorname{arcctg} a$

$\operatorname{arcctg} a$  – это угол из промежутка  $(0; \pi)$ , котангенс которого равен  $a$ .

$$\operatorname{arcctg} a = \alpha, \alpha \in (0; \pi) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = a$$



$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3} \neq -\frac{\pi}{3}$$

# Основные свойства обратных тригонометрических функций

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

# ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

|                        |                                    |   |   |                                    |                                   |                                   |  |  |                                   |
|------------------------|------------------------------------|---|---|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|--|-----------------------------------|
| <b><i>a</i></b>        | <b>-1</b>                          | <b><math>-\frac{\sqrt{3}}{2}</math></b> | <b><math>-\frac{\sqrt{2}}{2}</math></b> | <b><math>-\frac{1}{2}</math></b>   | <b>0</b>                          | <b><math>\frac{1}{2}</math></b>   | <b><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></b> | <b><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></b> | <b>1</b>                          |
| <b><i>arcsin a</i></b> | <b><math>-\frac{\pi}{2}</math></b> | <b><math>-\frac{\pi}{3}</math></b>      | <b><math>-\frac{\pi}{4}</math></b>      | <b><math>-\frac{\pi}{6}</math></b> | <b>0</b>                          | <b><math>\frac{\pi}{6}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{4}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{3}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{2}</math></b> |
| <b><i>arccos a</i></b> | <b><math>\pi</math></b>            | <b><math>\frac{5\pi}{6}</math></b>      | <b><math>\frac{3\pi}{4}</math></b>      | <b><math>\frac{2\pi}{3}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{2}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{3}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{4}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{6}</math></b>      | <b>0</b>                          |

|                        |                                    |                                    |   |                                   |  |                                   |                                   |
|------------------------|------------------------------------|------------------------------------|---|-----------------------------------|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
| <b><i>a</i></b>        | <b><math>-\sqrt{3}</math></b>      | <b>-1</b>                          | <b><math>-\frac{1}{\sqrt{3}}</math></b> | <b>0</b>                          | <b><math>\frac{1}{\sqrt{3}}</math></b> | <b>1</b>                          | <b><math>\sqrt{3}</math></b>      |
| <b><i>arctg a</i></b>  | <b><math>-\frac{\pi}{3}</math></b> | <b><math>-\frac{\pi}{4}</math></b> | <b><math>-\frac{\pi}{6}</math></b>      | <b>0</b>                          | <b><math>\frac{\pi}{6}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{4}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{3}</math></b> |
| <b><i>arcctg a</i></b> | <b><math>\frac{5\pi}{6}</math></b> | <b><math>\frac{3\pi}{4}</math></b> | <b><math>\frac{2\pi}{3}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{2}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{3}</math></b>      | <b><math>\frac{\pi}{4}</math></b> | <b><math>\frac{\pi}{6}</math></b> |