

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Дипломная работа

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКЕТТА

Студентка группы 52: **Гончарова К. Н.**

Руководитель, кандидат физ.-мат. наук, доцент: **Залеская Е.Н.**

Витебск, 2016

Цель

Данная дипломная работа направлена на изучение классов Фиттинга с заданными свойствами операторов Локетта и описание новых классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта.



Напомним, что

Классом Фиттинга называется класс групп \mathbf{F} , удовлетворяющий следующим условиям:

- каждая нормальная подгруппа любой группы из \mathbf{F} также принадлежит \mathbf{F} ;
- из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат \mathbf{F} , всегда следует, что их произведение AB принадлежит \mathbf{F} .

Напомним, что

Если \mathbf{F} – произвольный непустой класс Фиттинга. Тогда \mathbf{F}^* – наименьший из классов Фиттинга, содержащий \mathbf{F} , такой, что $(G \times H) \mathbf{F}^* = G \mathbf{F}^* \times H \mathbf{F}^*$ для всех групп G и H , а класс \mathbf{F}^* – пересечение всех таких классов Фиттинга \mathbf{X} , для которых $\mathbf{X}^* = \mathbf{F}^*$ для класса Фиттинга \mathbf{X} . Операторы «*» и «*» называются **операторами Локетта**.

Введение

Классы Фиттинга конечных групп впервые рассматриваются в статье Фишера, Гашюца, Хартли. Центральное место среди проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга, занимает общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием "**гипотеза Локетта**". Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля-Гашюца и Локетта, которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы, а также классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта.

Напомним, что

Нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга \mathbf{F} , у которого в любой группе G ее \mathbf{F} -радикал $G_{\mathbf{F}}$ является \mathbf{F} -максимальной подгруппой.

\mathbf{F} -максимальная подгруппа группы G – такая \mathbf{F} -подгруппа H из G , которая не содержится ни в какой большей \mathbf{F} -подгруппе.

Напомним, что

Класс Локетта – такой класс Фиттинга \mathbf{F} , что имеет место $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$, где \mathbf{F}^* наименьший из классов Фиттинга, содержащий класс Фиттинга \mathbf{F} , такой, что $(G \times H) \mathbf{F}^* = G \mathbf{F}^* \times H \mathbf{F}^*$ для всех групп G и H , а класс \mathbf{F}^* - пересечение всех таких классов Фиттинга X , для которых $X^* = \mathbf{F}^*$ для класса Фиттинга .

Гипотеза Локетта

Каждый класс Фиттинга определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного \mathbf{F} ?

Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для отдельных случаев локального класса Фиттинга. Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т.Воробьевым и в произвольном случае в 1996 году Галледжи. Для отдельных случаев частично локальных классов Фиттинга гипотеза Локетта была подтверждена Н.Т. Воробьевым, Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьевым в 2007 году, Е.Н. Залесской и Ж.П. Макаровой в 2012 году. Вместе с тем Бергер и Косси установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга

Напомним, что

Локальная функция Хартли или H -функция – функция вида

$$f : P \sqsubseteq \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Локальный класс Фиттинга \mathbf{F} – такой класс Фиттинга, для которого существует H -функция f такая, что $\mathbf{F} = LR(f)$.

Таким образом, проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается по-прежнему актуальной.

В данной работе гипотеза Локетта подтверждена для отдельных случаев произведений классов Фиттинга. Основным результатом является теорема 4.1.

Напомним некоторые основные определения.

Основные определения

Гомоморф – такой класс групп \mathbf{F} , у которого каждая фактор-группа любой группы из \mathbf{F} также принадлежит \mathbf{F} .

Формация – гомоморф \mathbf{F} , замкнутый относительно конечных подпрямых произведений.

Радикальный гомоморф – гомоморф \mathbf{F} , который является классом Фиттинга.

Гомоморф \mathbf{F} называется **насыщенным**, если из того, что $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$, следует $G \in \mathbf{F}$.

Основные определения

Формацию \mathbf{F} называют **насыщенной** или локальной, если \mathbf{F} замкнута относительно Фраттини-расширений, т.е. из того, что $G/\Phi(G) \in \mathbf{F}$ всегда следует $G \in \mathbf{F}$. $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , т.е. пересечение всех максимальных подгрупп G .

Теорема(4.1)

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_* \mathfrak{Y}$, где \mathfrak{X} – класс Локетта, удовлетворяющий гипотезе Локетта и являющийся формацией, \mathfrak{Y} – насыщенная радикальная формация такая, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = (1)$, а $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта. Тогда, если $\mathfrak{X} \notin \mathfrak{S}_*$, то \mathfrak{F} удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта.

Схема доказательства

- ❖ По лемме 3.7 докажем, что $X * Y$ является L-классом.
- ❖ Докажем, что $F \neq F^*$. Пойдем от противного.
- ❖ По леммам 3.1 и 3.2 докажем равенство
$$X * Y = (X * Y)^*.$$
- ❖ Докажем равенство $(X \cap S *) Y = X Y \cap S * Y$ по лемме 1.2(b).

Схема доказательства

- ❖ Из леммы 1.2(a) и условия следует равенство $S * Y \cap S * X = S * (Y \cap X) = [(Y \cap X) - (1)] = S *$
- ❖ Получаем противоречие условию. Значит наше предположение не верно и класс **F** не является классом Локетта.

Полученные результаты можно использовать при изучении классов Фиттинга, а также при написании курсовых и дипломных проектов, чтении курсов по теории групп для студентов математических специальностей.



- Данная работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция» подпрограмма «Математические методы» 2011-2015 гг.
- Работа внедрена в учебный процесс кафедры алгебры и методики преподавания математики.
- Результаты исследований представлены и приняты к печати в материалах «XII Белорусской математической конференции БМ К-2016».



Спасибо за внимание!!!

