

Глава 6

Элементы механики жидкостей

§ 28. Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

- **Гидроаэромеханика** — (раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами)— использует *единый подход* к изучению жидкостей и газов.
- В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как **сплошные**, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства.

- Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый элемент ΔS ее поверхности с силами ΔF , которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равна по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS .

- Давление:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

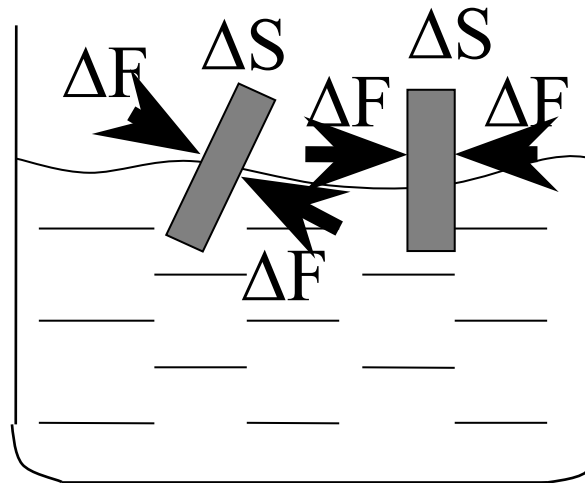


Рис. 44

- Единица давления—**Паскаль** (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м² (1 Па = 1 Н/м²).
- Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля**: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.
- При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда.

- Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S , высоте h и плотности ρ столба жидкости, его вес $P' = \rho g S h$, а давление на нижнее основание

$$p = P' / S = \rho g S h / S = \rho g h, \quad (28.1)$$

- Давление $\rho g h$ называется **гидростатическим давлением**.
- **Закон Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V.$$

§ 29. Уравнение неразрывности

- Движение жидкости называется **течением**, а совокупность частиц движущейся жидкости — **потоком**.
- Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 45).
- Густота линий тока, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, пропорциональна скорости течения жидкости.

- Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

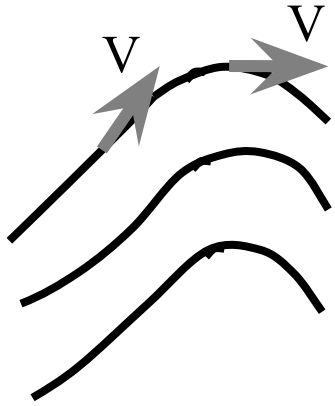


Рис. 45

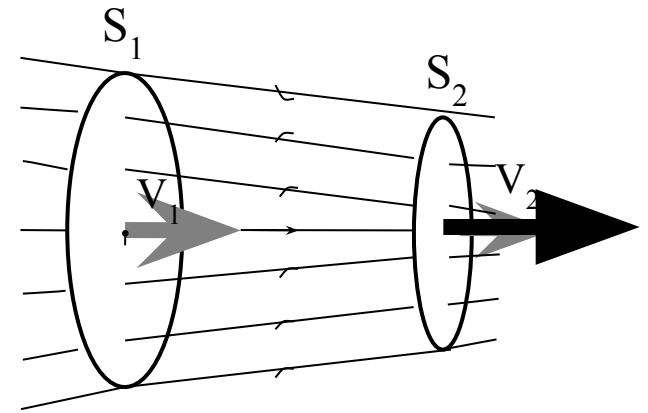


Рис. 46

- Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока** (рис.46).

- Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.
- Рассмотрим трубку тока рис. 46.
- Предположим, что скорость жидкости в сечении трубки тока постоянна и не изменяется со временем.
- Тогда за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости $S_1 v_1$
- а через S_2 - $S_2 v_2$
- Если жидкость несжимаема, то

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}. \quad (29.1)$$

§ 30. Уравнение Бернулли

- Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока (рис. 47).

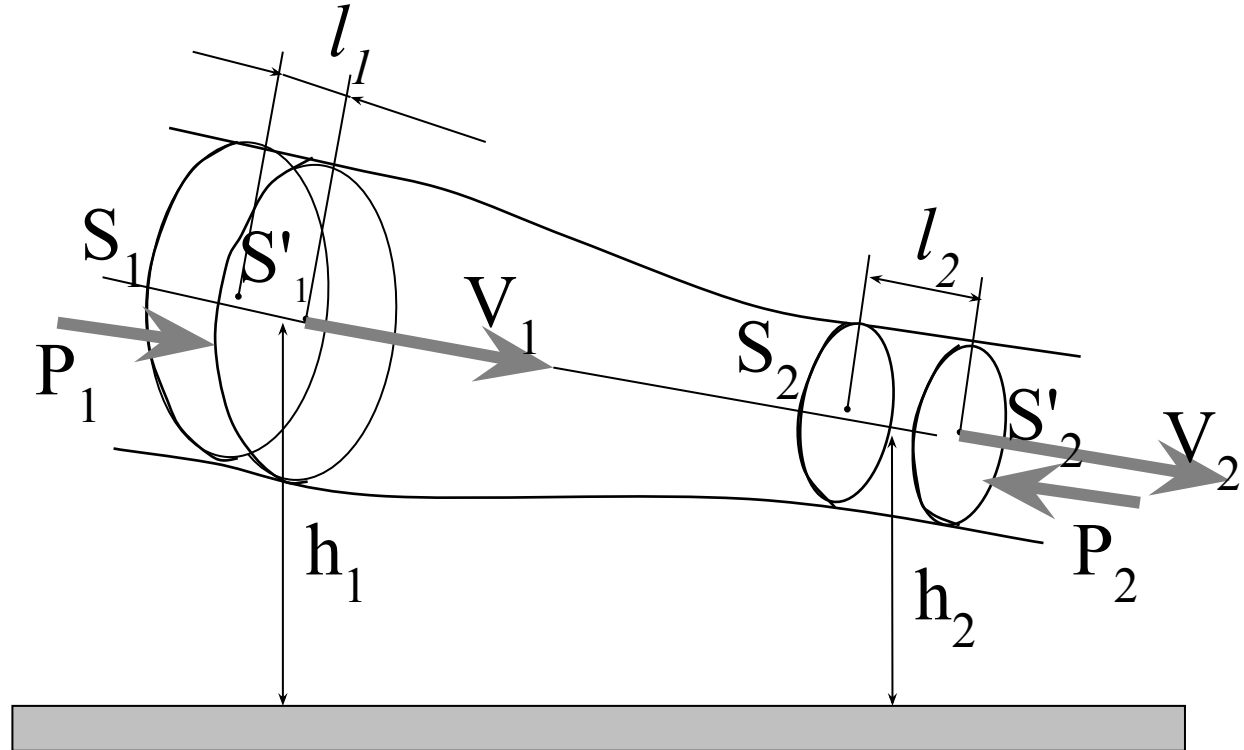


Рис. 47

- Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (30.1)$$

- где E_2 и E_1 — полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_2 и S_1 соответственно.
- С другой стороны, A — это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_2 и S_1 , за рассматриваемый малый промежуток времени Δt .

- Для перенесения массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2' — на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$.
- Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что во всем точкам объемов, закрашенных на рис. 47, приписывают постоянные значения скорости v , давления p и высоты h . Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (30.2)$$

$$F_1 = p_1 S_1 \qquad F_2 = -p_2 S_2$$

- Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (30.3)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (30.4)$$

- Подставляя (30.3) и (30.4) в (30.1) и приравнивая (30.1) и (30.2), получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (30.5)$$

- Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

- Разделив выражение (30.5) на ΔV получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

- где ρ — плотность жидкости.

- Так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}, \quad (30.6)$$

- Выражение (30.6) называется **уравнением Бернулли**.
- Это уравнение — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости.
- Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

- Величина p в формуле (30.6) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела),
- величина $\rho v^2 / 2$ — **динамическим давлением**,
- величина ρgh -- **гидростатическим давлением**.
- Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$) выражение (30.6) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad (30.7)$$

- Величина $p + \rho v^2 / 2$ называется **полным давлением**.

- Из уравнения Бернулли (30.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (29.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше.

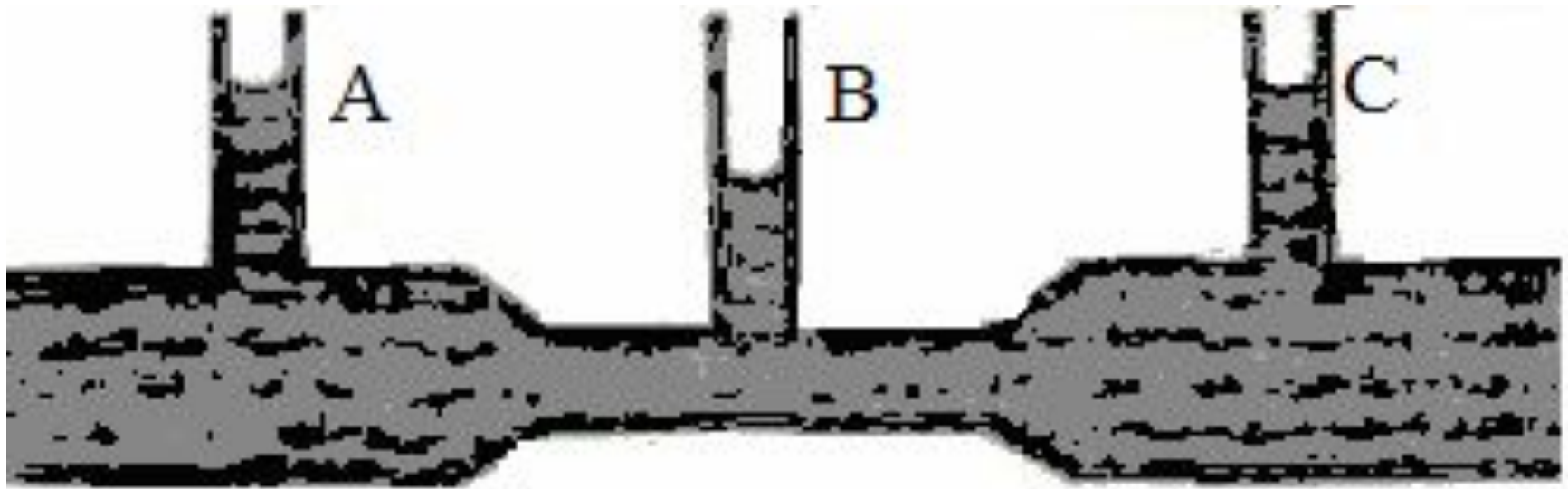


Рисунок 48

- Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито — Прандтля (рис. 49). ρ_0 — плотность жидкости в манометре.

$$\rho_0 - p = \rho v^2 / 2.$$

$$\rho_0 - p = \rho_0 gh,$$

$$v = \sqrt{2\rho_0 gh / \rho}.$$

ρ_0 - полное давление

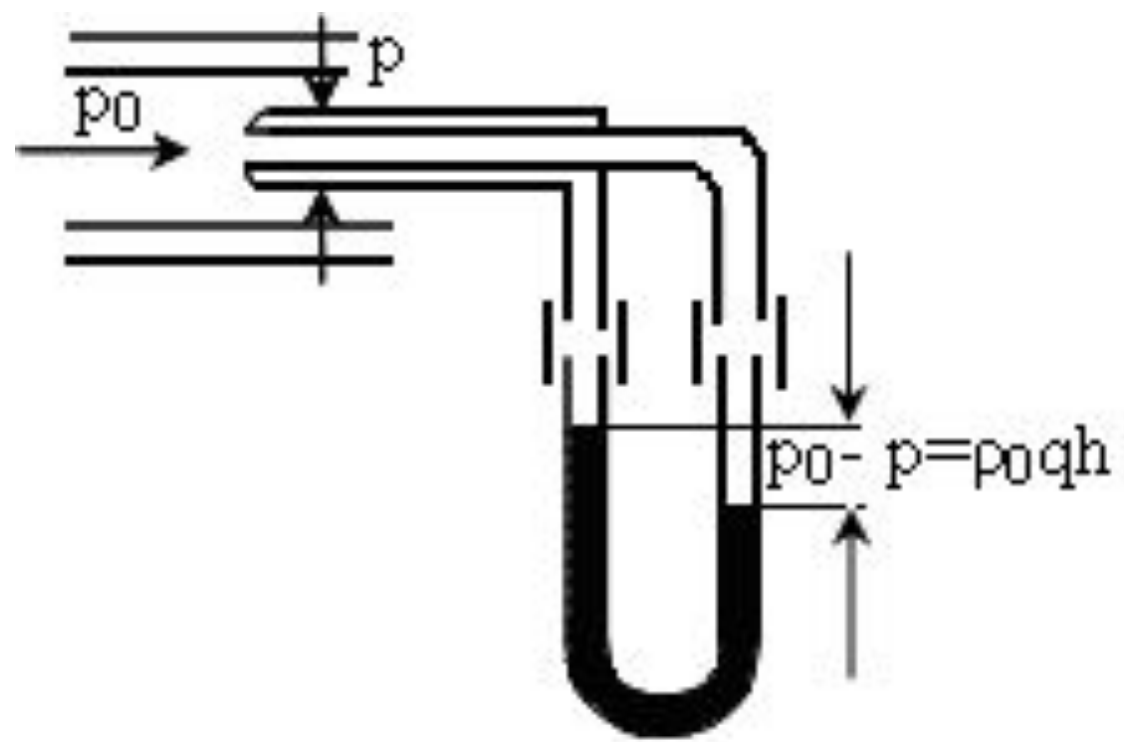


Рисунок 49

- Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы **водоструйного насоса** (рис. 50).

Таким образом
можно откачивать
воздух из сосуда
до давления
100 мм рт. ст.
(1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

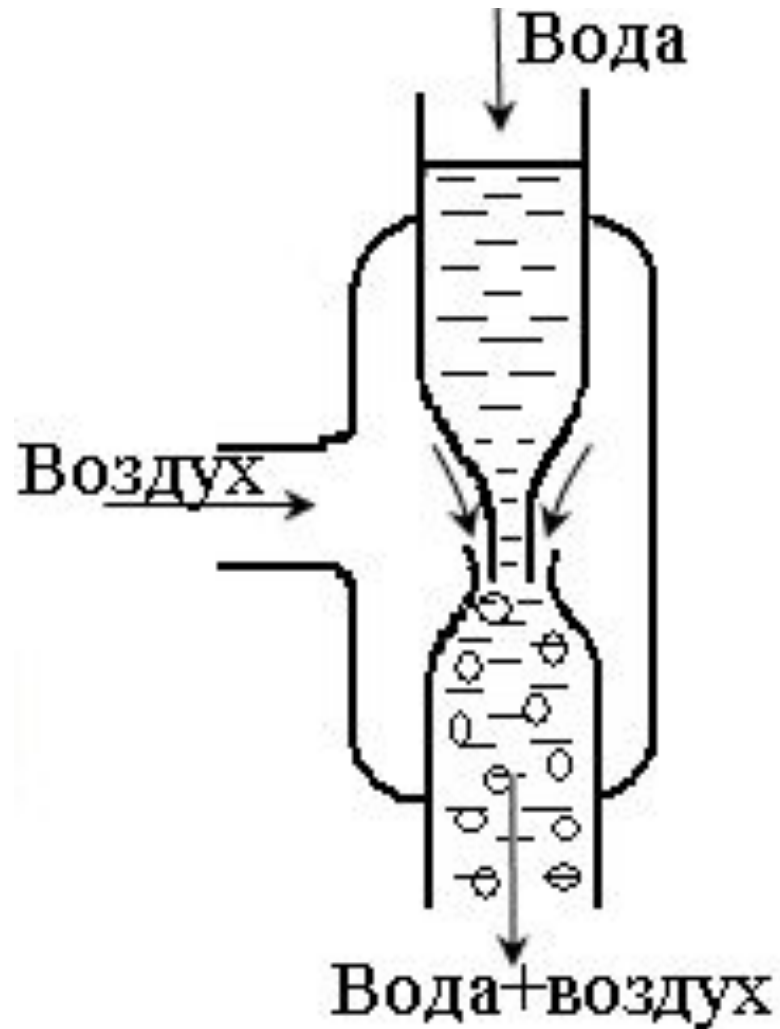
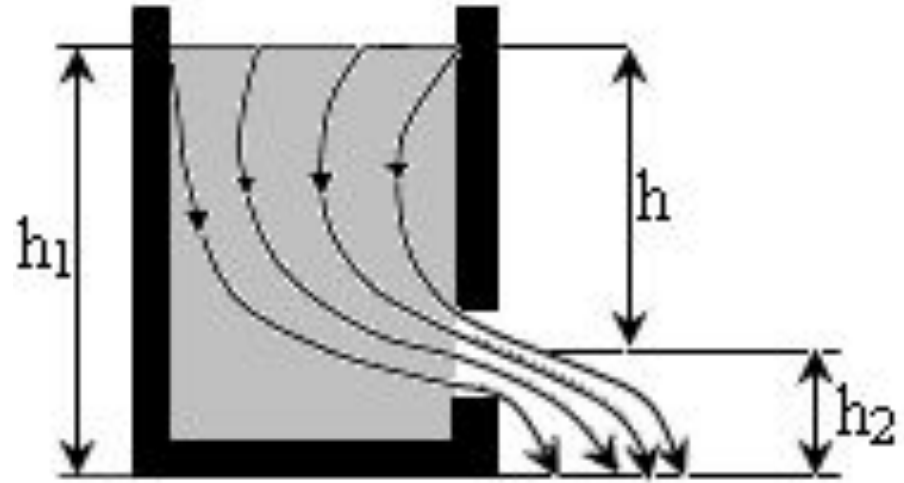


Рисунок 50

- Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда.



$$v_1 / v_2 = S_2 / S_1$$

$$S_1 \gg S_2$$

$$v_1^2 / 2 \sim 0$$

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh, \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Рисунок 51

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2.$$

§ 31. Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течений жидкостей

- **Вязкость (внутреннее трение)** — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (31.1)$$

η - динамическая
вязкость
(или просто **вязкость**).

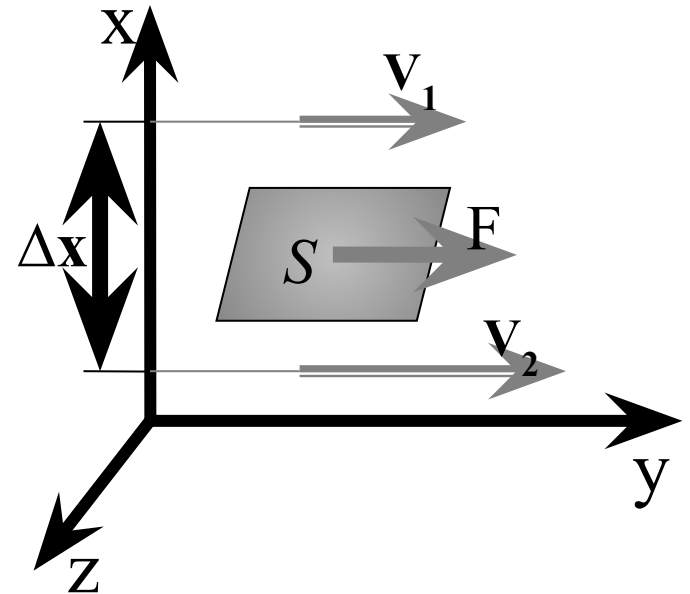


Рисунок 52

- Единица вязкости — **паскаль-секунда** (Па·с):
- 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения в 1 Н на 1 м² поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м²).
- Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают.
- Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

- Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними,
- и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).
- Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения.
- Английский ученый О. Рейнольдс (в 1883 г. установил, что характер течения зависит от безразмерной величины, называемой **числом Рейнольдса**:

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu},$$

где $\nu = \eta / \rho$ — **кинематическая вязкость**; ρ — плотность жидкости; $\langle v \rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 \leq \text{Re} \leq 2000$, а при $\text{Re}=2300$ (для гладких труб) течение — турбулентное.

Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

- Профили скорости течения жидкости при ламинарном и турбулентном режимах

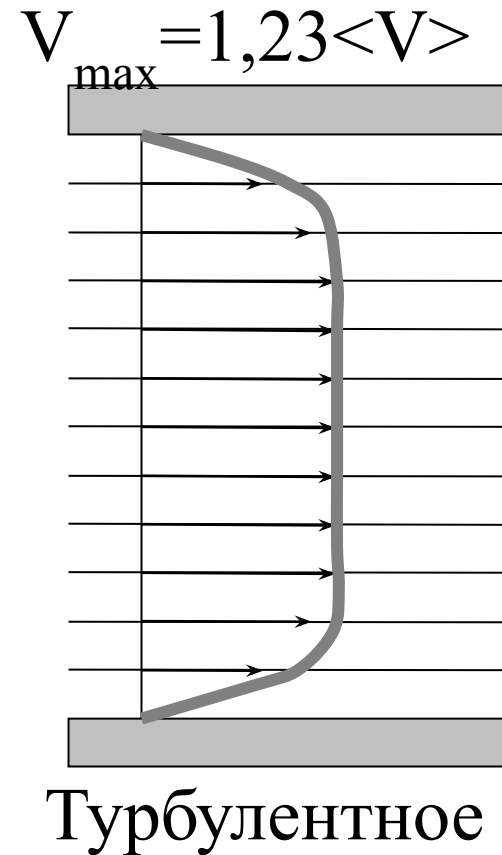
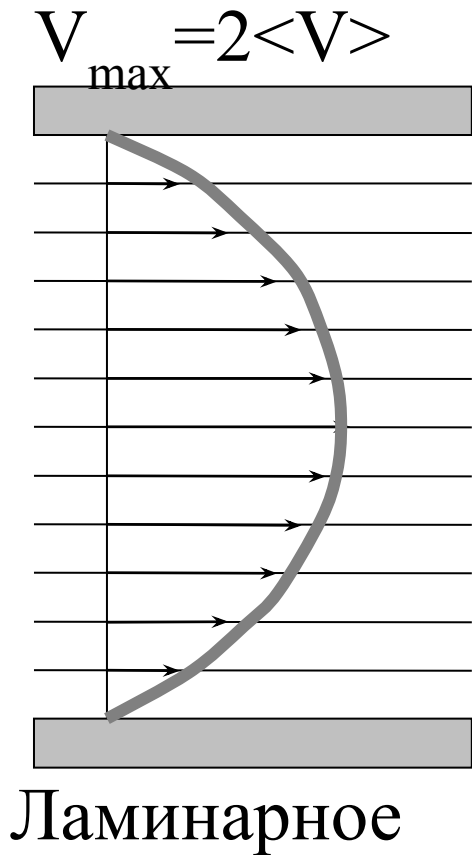


Рис. 53

§ 32. Методы определения вязкости

- **1. Метод Стокса.**
- На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы:
- сила тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$
- сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$
- сила сопротивления $F = 6\pi\eta rv,$
- эмпирически установленная Дж. Стоксом

- При равномерном движении шарика

$$P = F_A + F,$$

- или
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v,$$

- откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}.$$

- Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

• 2. Метод Пуазейля

- Рассмотрим капилляр радиусом R и длиной l .
- В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr (рис. 54).
- Сила внутреннего трения (см. (31.1)), действующая на боковую поверхность этого слоя,

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr},$$

- где dS — боковая поверхность цилиндрического слоя; знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

- Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравновешивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2, \quad dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

- После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т. е. скорость на расстоянии R от оси равна нулю, получим

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

- Из полученного выражения видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы.

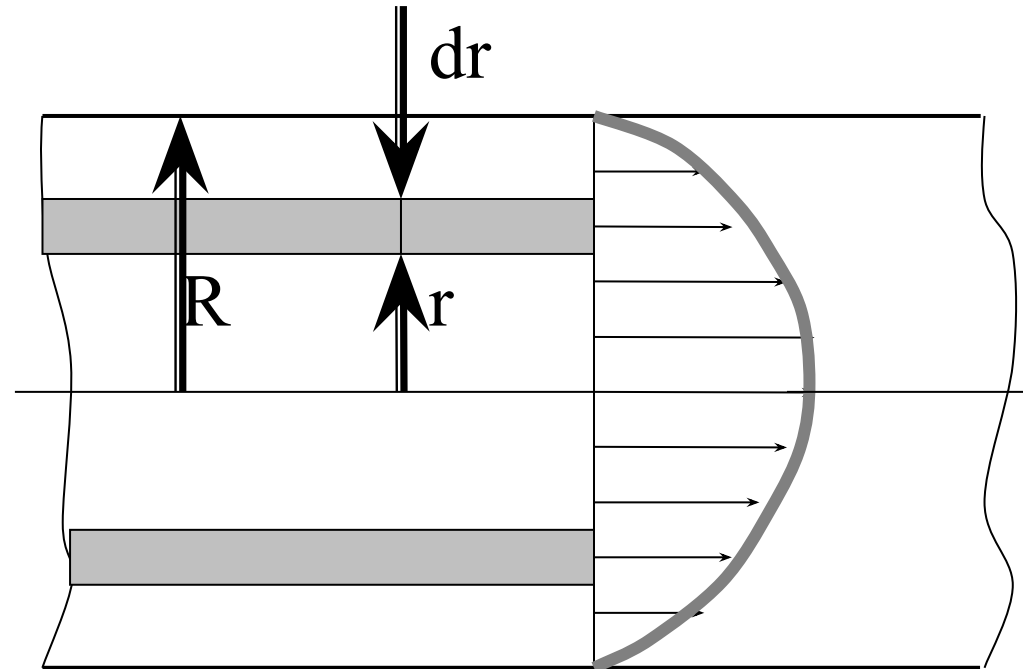


Рис. 54

- За время t из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R vt \, 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p t}{2\eta l} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l},$$

- откуда вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl}.$$

§ 33. Движение тел в жидкостях и газах

- Одной из важнейших задач аэро- и гидродинамики является исследование движения твердых тел в газе и жидкости.
- На тело, движущееся в жидкости или газе, действуют две силы (равнодействующую их обозначим R), одна из которых (R_x) направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), — **лобовое сопротивление**, а вторая (R_y) перпендикулярна этому направлению — **подъемная сила** (рис. 55).

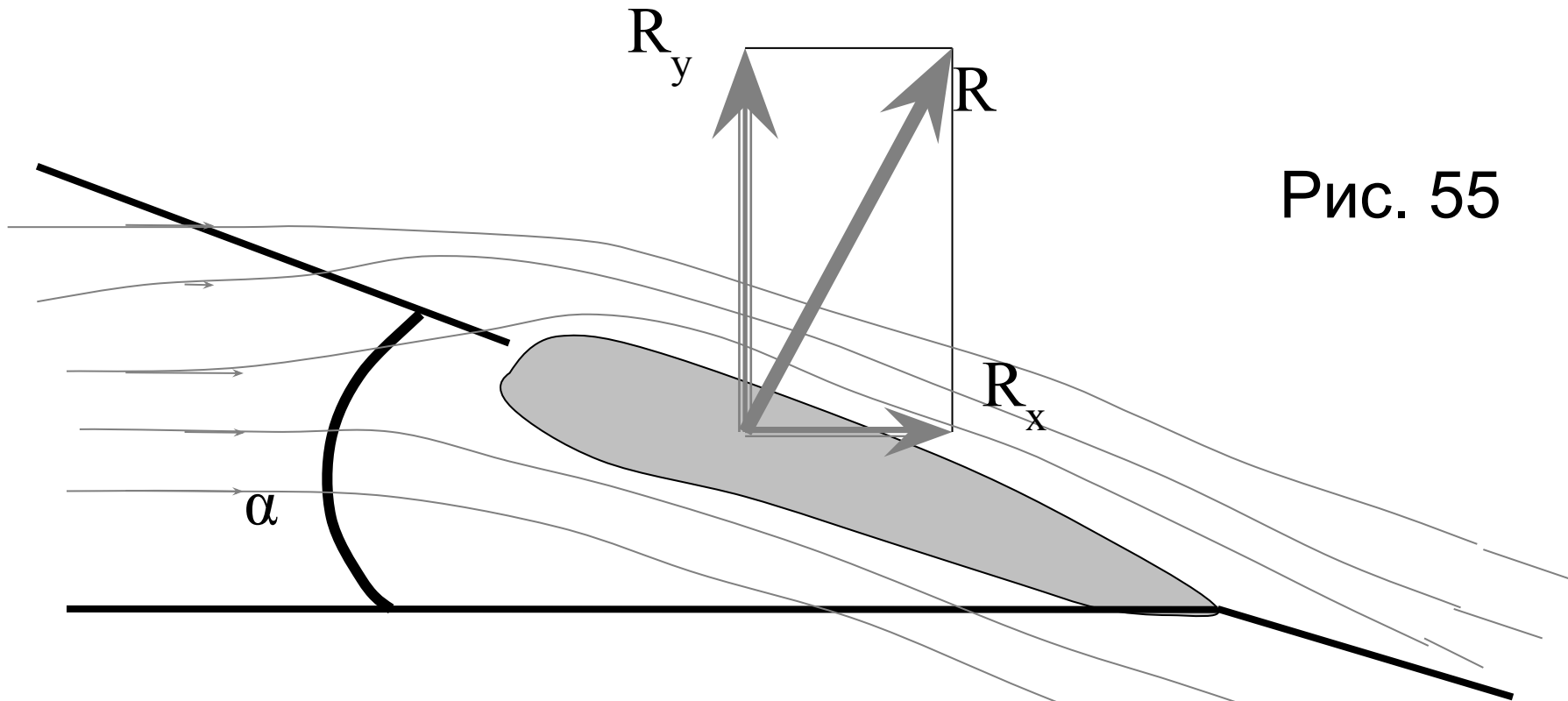


Рис. 55

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S,$$

Величина $K = C_y/C_x$, называемая **качеством крыла**

- Можно доказать, что в *идеальной жидкости* равномерное движение происходит без лобового сопротивления (рис. 56). Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости (особенно при увеличении скорости обтекания) (рис. 57).

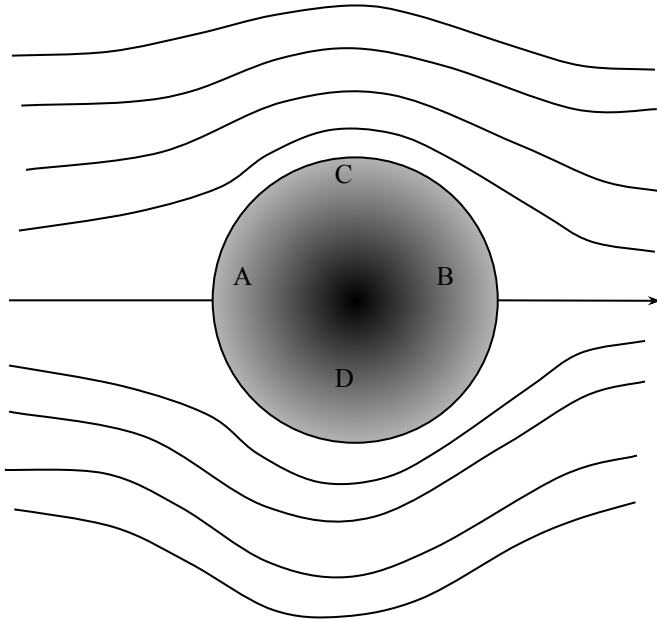


Рис. 56

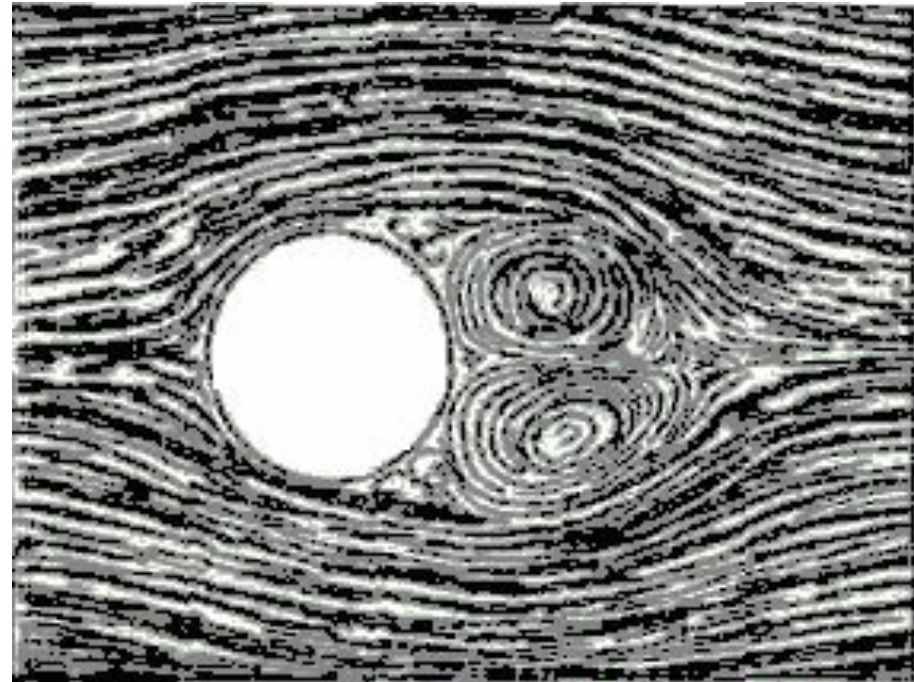


рис. 57