Лестница Ламерея

Студент: Демушкина П.Н.

Группа: ИМ21-01М

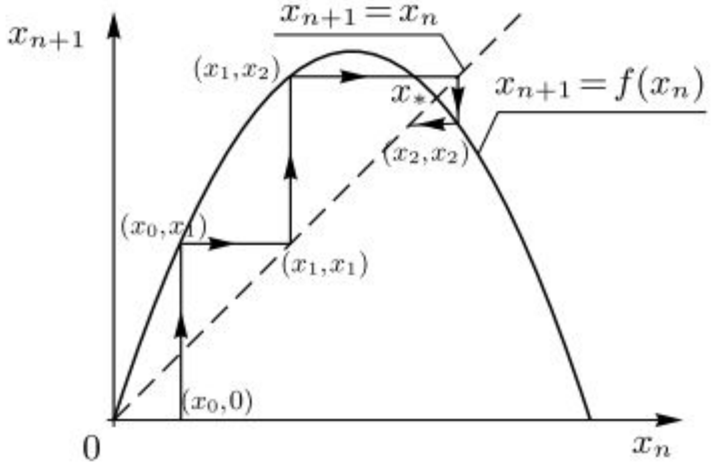
Одномерные точечные отображения

- Точечными отображениями принято называть раздел динамики, в котором изучаются системы с дискретным «временем». В этом случае, оператор эволюции есть некоторая функция, которая сопоставляет набор динамических переменных в n-ый момент времени набору переменных в (n + 1) – момент времени:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n), \qquad (1)$$

где $\vec{x}_n$ - вектор состояния, компонентами которого являются значения динамических переменных в момент времени n , а под f понимается некоторое преобразование вектора, позволяющее получить новое состояние в следующий момент времени.

Рассмотрим одномерное отображение, действующее следующим образом. Возьмем начальное значение переменной x_0. Тогда с помощью (1) можно вычислить последующее значение: x_1 = f(x_0), затем x_2 = f(x_1) и т. д. Эволюцию переменной x удобно представлять на итерационной диаграмме, на которой изображены график функции f(x) и биссектриса.



Изображенные на диаграмме последовательные точки отображения называют **лестницей Ламерея**.

Несмотря на простой вид эволюционного уравнения (1) с одной динамической переменной, в зависимости от вида функции f(x) оно может демонстрировать сложную и разнообразную динамику. При этом важным является установившийся режим, который будет наблюдаться после некоторого переходного процесса. Можно выделить три основных типа установившегося режима:

1) неподвижная точка, когда переменная перестает изменяться;
2) цикл, когда переменная «пробегает» последовательно несколько значений (их число равно периоду цикла), а затем динамика повторяется;
3) хаотический режим, когда динамика не повторяется и визуально кажется случайной.

В простейшем случае отображение имеет неподвижную точку. Для одномерных точечных отображений (1) неподвижная точка x_* переходит сама в себя под действием отображения, то есть удовлетворяет соотношению

$$x_* = f(x_*). \tag{2}$$

Таким образом, неподвижной точке отвечает точка пересечения графика функции f и биссектрисы на итерационной диаграмме.

Неподвижные точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Характер устойчивости можно определить с помощью специальной характеристики (мультипликатора μ), представляющей собой производную функции, вычисленную в неподвижной точке.

Неподвижная точка является устойчивой, если в данной точке выполненяется:

$$\mu = | f'(x_*) | < 1, \qquad (3)$$

где f $(\boldsymbol{x}_*)$ — значение производной функции отображения в точке $\boldsymbol{x}_*$.

Устойчивую точку $\boldsymbol{x}_*$часто называют притягивающей.

Алгоритм построения лестницы Ламерея на примере логистического отображения

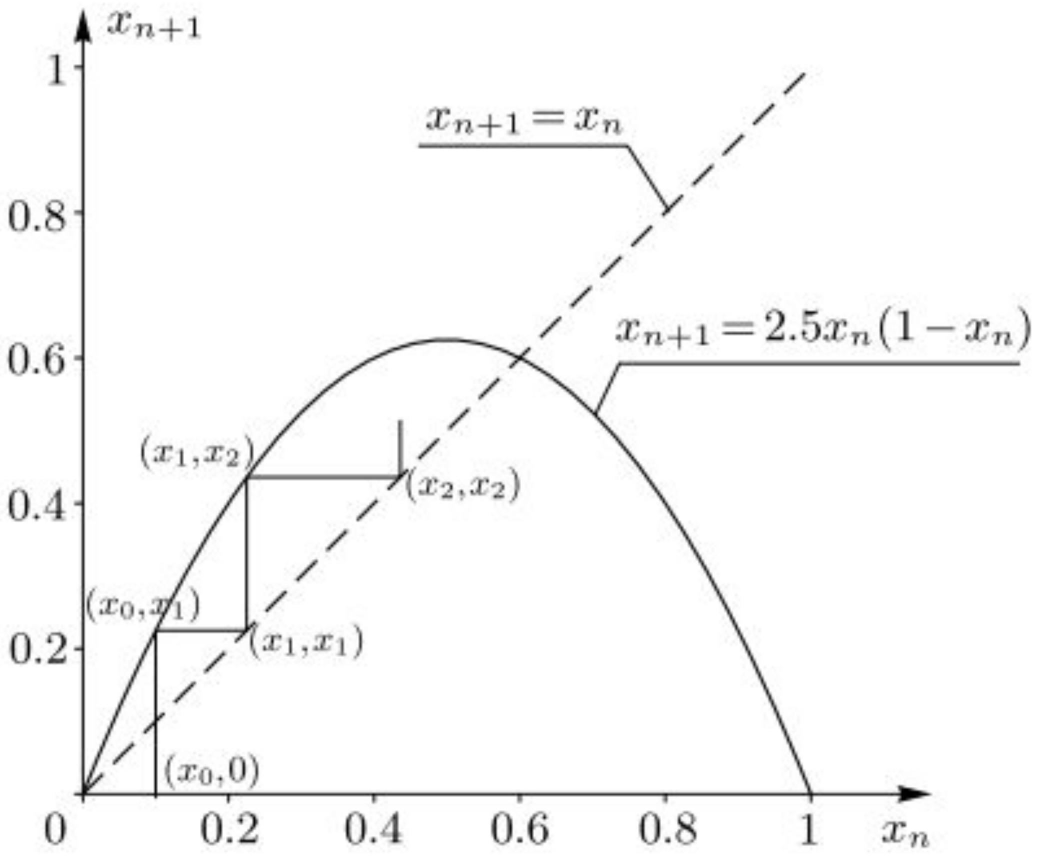
Логистическое (или квадратичное) отображение задается соотношением вида

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{4}$$

где x - значение меняющееся в пределах от 0 до 1, а r — параметр отображения, который может принимать значения в интервале от 0 до 4.

Это одно из самых известных отображений, которое может демонстрировать хаотическую динамику. Функция, стоящая в правой части формулы (4), связана с именем бельгийского математика Пьера Ферхюльста, который в первой половине XIX века предложил ее в качестве модели для скорости изменения численности популяции с учетом борьбы особей за ограниченные ресурсы или место обитания. Мы рассмотрим дискретный аналог дифференциального логистического уравнения Ферхюльста. В этом случае x_n— это нормированная численность популяции некоторого вида в какой-то момент времени (например, в какой-то год), а x_{n+1} — это численность того же вида в следующий год. Значение x меняется в пределах от 0 до 1, а в качестве управляющего параметра выступает r — величина, меняющаяся от 0 до 4, характеризующая скорость роста популяции («рождаемость минус смертность»).

Диаграмма логистического отображения с параметром r = 2.5 с тремя первыми ступенями лестницы Ламерея:



Алгоритм построения лестницы Ламерея:

1. От начальной точки (x_0, 0) следует двигаться вертикально к линии отображения. Отмечается точка пересечения с линией (x_0, x_1), где x_1 получена в результате итерации x_1 = f(x_0).
2. От точки (x_0, x_1) нужно перейти по горизонтали к точке (x_1, x_1). Совокупность точек, в которых обе координаты равны, — это биссектриса первой четверти, следовательно, горизонтальная линия должна соединять кривую отображения с биссектрисой.
3. От биссектрисы снова строится вертикальная линия до пересечения с кривой отображения, то есть к точке (x_1, x_2), где x_2 получена в результате итерации x_1 = f(x_0), и повторяются пункты начиная со второго.

В конечном счете получается ломаная линия, по которой можно наблюдать, как отображение приходит к неподвижным(притягивающим) точкам. Так, при r = 2.5 за несколько шагов мы приходим в окрестность неподвижной точки при x_*= 0.6.

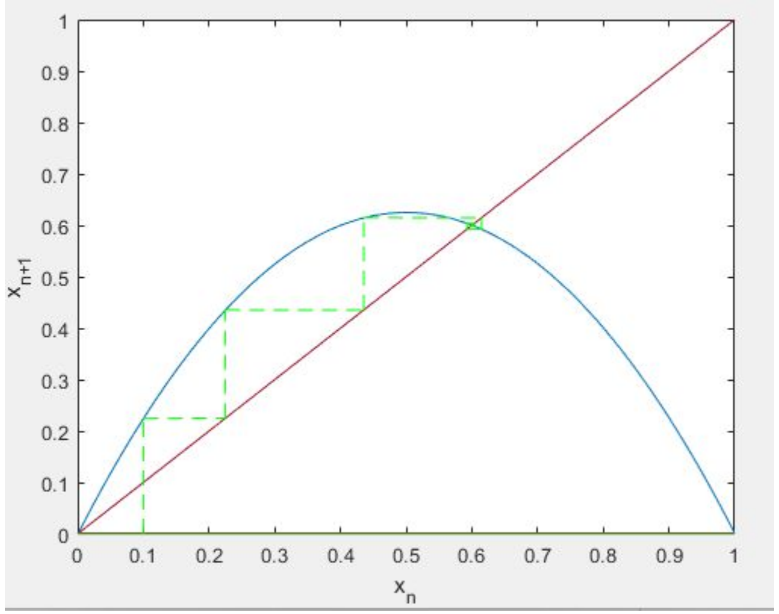
Далее, меняя параметр r и наблюдая за тем, как выглядит лестница Ламерея при его различных значениях, можно установить, что при определенных значениях параметра меняется конечный результат построения лестницы. Такое изменение можно назвать бифуркацией. Термин бифуркация означает смену установившегося режима поведения системы, как правило, вследствие изменения управляющего параметра. Момент такой смены называют точкой бифуркации.

Программная реализация

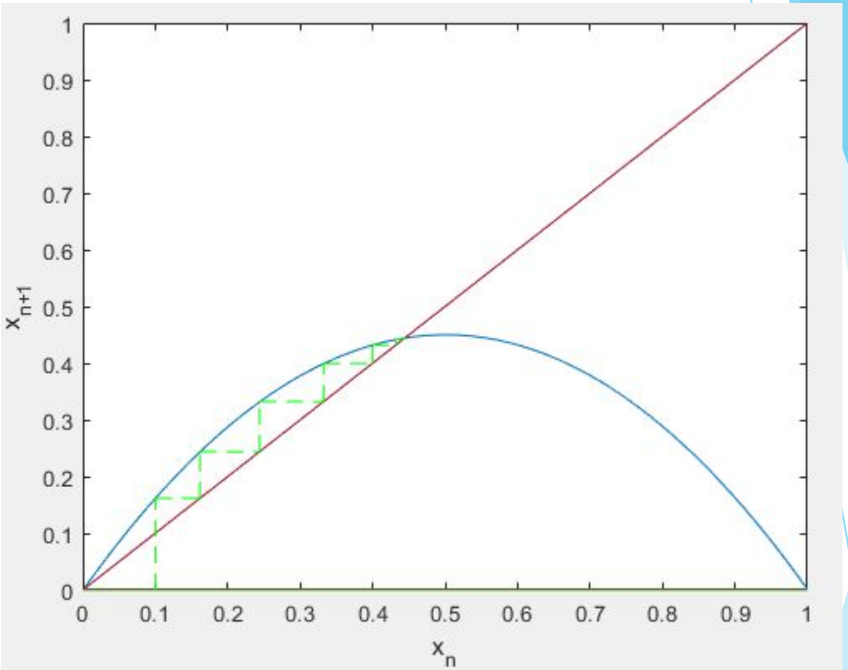
```
clc; close all; clear

nts=2000;
t=zeros(nts+1);
dt=1./nts;
r=2.5;
x_0=0.1;
y_0=r*x_0*(1-x_0);
e=0.00001;

x=0:dt:1;
size(x);
y=zeros(nts+1);

for k=2:nts+1

    t(k)=dt+t(k-1);
    y(k)=r*x(k-1)*(1-x(k-1));

end
z=t;

m=find(y>y_0-dt,2);
l=find(z>y_0-dt,1);

plot(x,y,x,z);
xlim([0 1]);
ylim([0 1]);
xlabel('x_n');
ylabel('x_{n+1}');

hold on

line([x_0, x_0],[0, y_0], 'color','g','linestyle','--');
line([x_0, y_0],[z(1), y_0], 'color','g','linestyle','--');
```

```
k=0;
while(k<400)
    x_0=z(1);
    y_0=r*x_0*(1-x_0);
    m=find(y>y_0-e,2);
    if(x_0<0.5)
        m_0=m(1);
    else
        m_0=m(2);
    end
    l=find(z>y(m_0)-e,1);
    line([x_0, x_0],[x_0, y_0], 'color','g','linestyle','--');
    line([x_0, y_0],[z(1), y_0], 'color','g','linestyle','--');
    k=k+1;
end

hold off
```

При r=2.5



При r=1.8



При r=3.4