НОВО колледж

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Душа, в которой отсутствует мудрость, — мертва. Но, если обогатить ее учением, она оживет, подобно заброшенной земле, на которую пролился дождь.

Преподаватель:
Махмудов Кароматулло Азизович

Новосибирск – 2022

Линейная алгебра. Основные сведения о матрицах. Виды и свойства матриц. Операции над матрицами.

Линейная алгебра – раздел высшей математики, который широко используется в теории вероятностей и математической статистике, в экономике, в исследовании операций и др.

Термин «матрица» был введен в середине IXX века английским математиком Джеймсом Сильвестром, хотя, как математический объект они были известны еще в древнем Китае, чуть позже в Индии и у арабских математиков. Первые упоминания о матрицах относятся к древнему Китаю и связаны с «магическими квадратами». В те времена матрицы еще не имели такого обширного применения, а также не были сформулированы основные операции над матрицами. Прямоугольные таблицы чисел или иных объектов были интересны своими свойствами, нередко люди наделяли их магическими свойствами, использовали в роли оберегов (магический квадрат). В некоторых культурах матрицы применялись для определения степени близости родства для людей желающих вступить в брак.

Современная трактовка матриц позволила им крепко закрепиться в повсеместной жизни и найти применение как в математике, так и и в физике, экономике, психологии и других науках.

Матрица

- Прямоугольная таблица чисел или символов, их заменяющих, из ***m*** строк (или ***n*** столбцов) одинаковой длины

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Для задания матриц применяются скобки ( ), [ ] или || ||.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица размера $m \times n$

Элемент матрицы

$$A_{m \times n} = (a_{ij})$$

$$i = 1..m$$

$$j = 1..n$$

содержащая m-строк и n-столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами* (их обозначают: a_{ij} где i- номер строки матрицы, j - номер столбца матрицы, в которых расположен данный элемент)

Матрица

Определение

Матрица, состоящая из одной строки называется матрицей-строкой (вектор-строкой), а из одного столбца –матрицей-столбцом (вектор-столбцом)

Вид матрицы-строки/столбца

$$A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \quad B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Главная диагональ

Определение 5. Если $m=n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Ее элементы $a_{11}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную* диагональ;

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **Замечание 1.** В частности, *квадратной матрицей второго порядка* называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

содержащая две строки и два столбца. Числа a_{ij} *(i=j=1,2)* называются *элементами* матрицы, где i – номер строки, а j – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* матрицы *A*; числа a_{12}, a_{21} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

МАТРИЦЫ
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- *Квадратной матрицей третьего порядка* называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

содержащая три строки и три столбца. Числа a_{ij} $(i=j=1,2,3)$ называются *элементами* матрицы, где i – номер строки, j – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* матрицы; числа a_{13}, a_{22}, a_{31} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

- Матрица, все элементы которой равны нулю

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

- Диагональная матрица, каждый элемент главной диагонали равен единице

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Треугольная матрица

- Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю

$$C = \begin{pmatrix} -\mathbf{5} & 5 & 9 & 8 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

Определение

Если столбцы матрицы $A_{m\times n}$ записать в строки с соответствующими номерами, то получится новая матрица $A^T_{n\times m}$ размерности $n \times m$, которую называют транспонированной

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарные преобразования матриц = **эквивалентные** преобразования матриц

$$A \sim B$$

Перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Умножение всех элементов строки (столбца) на число ≠ 0

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & -5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{15\times 1} & \mathbf{15\times 2} & \mathbf{15\times 3}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & -5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{15} & \mathbf{30} & \mathbf{45}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & -5\end{pmatrix}$$

Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

- К первой строке прибавим вторую, умноженную на 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1+10\times 4} & \mathbf{2+10\times 5} & \mathbf{3+10\times 6} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{41} & \mathbf{52} & \mathbf{63} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Сумма матриц

Определение

Суммой матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера называется матрица С того же размера, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме соответствующих элементов матриц А и В

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \qquad B=(b_{ij})_{m\times n}$$

А+В=С, где

$$C=(c_{ij})_{m\times n} \text{ и } \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$\forall i=\overline{1,m}; \forall j=\overline{1,n}$$

Сложение матриц

- **Матрицы одного размера!!!**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{312} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Сумма матриц

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц

1. Размерности вычитаемых матриц должны совпадать.
2. Вычитаются соответствующие элементы матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 & 0-7 \\ -3-2 & 5-(-3) \\ 4-4 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **Пример 2.** Вычислить матрицу $2A-3B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Зная матрицы A и B, находим:

$$2A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 14 & 6 \end{pmatrix}; \qquad 3B=\begin{pmatrix} 12 & 9 & -3 \\ 0 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix} 0-12 & 2-9 & 4-(-3) \\ -2-0 & 14-15 & 6-18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & -7 & 7 \\ -2 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

$$k \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k \times a_{11} & k \times a_{12} & k \times a_{13} \\ k \times a_{21} & k \times a_{22} & k \times a_{23} \\ k \times a_{31} & k \times a_{32} & k \times a_{33} \end{pmatrix}$$

- Получаем матрицу того же размера, что и исходная

Произведение матрицы на действительное число

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}; \quad \alpha = -3$$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -18 & 12 \end{pmatrix}$$

Свойства линейных операций над матрицами

A,B,C – матрицы,
α,β – действительные числа

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
4. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
5. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)$
6. $A+0=A$
7. $(-A)=(-1)\cdot A$ и $A+(-A)=O$

7*. $A-B=A+(-B)$

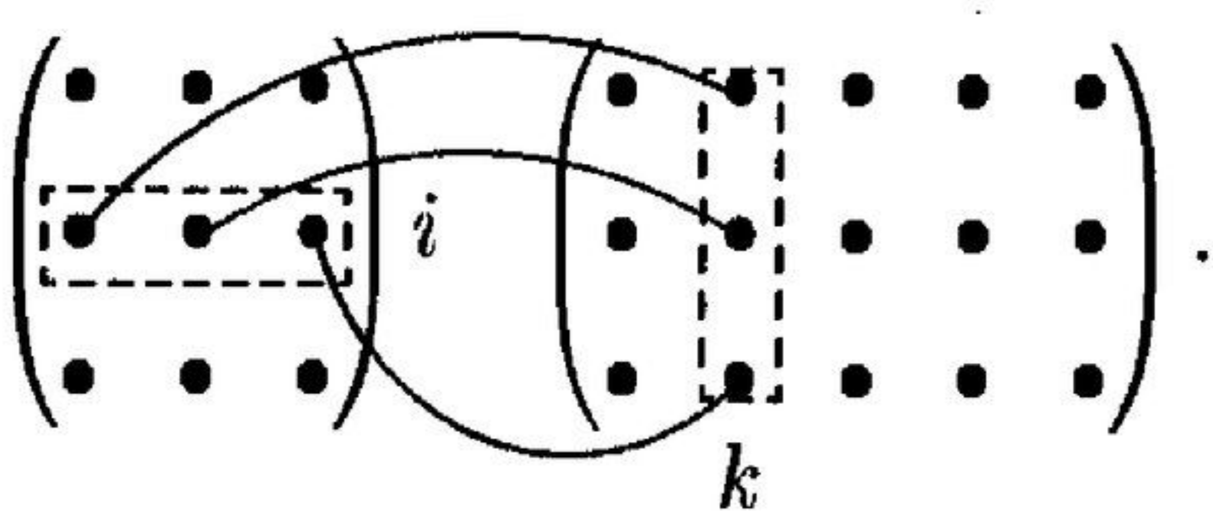
Умножение матриц

- Количество столбцов в первой матрице равно количеству строк во второй

$$A_{m\times k} \times B_{k\times n} = C_{m\times n}$$

Умножение матриц

- **СТРОКА НА СТОЛБЕЦ**



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{8} & \\ & \end{pmatrix}$$

1*2 + 2*1 + 4*1 = 2 + 2 + 4 = 8

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times(-2)+2\times 0+3\times 7 & 1\times 8+2\times(-1)+3\times 9 \\ 4\times(-2)+5\times 0+6\times 7 & 4\times 8+5\times(-1)+6\times 9 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 33 \\ 34 & 81 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Свойства операции умножения матриц

A,B,C – матрицы,
α – действительное число

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$
2. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A(\alpha \cdot B)$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
6. $A \cdot E = E \cdot A = A$