Класична математична логіка

Лекція №3. Логіка предикатів

Логіка непереможна, бо здолати її можна тільки за допомогою логіки.
О. Хэвисайд

Лектор – Шаповалов С.П.
Кафедра комп’ютерных наук Сумського державного університету

Зміст лекції.

1. Поняття предикату.
2. Квантори.
3. Формули логіки предикатів.
4. Интерпретація. Модель.
5. Правила для кванторів.
6. Числення предикатів.

Поняття предикату

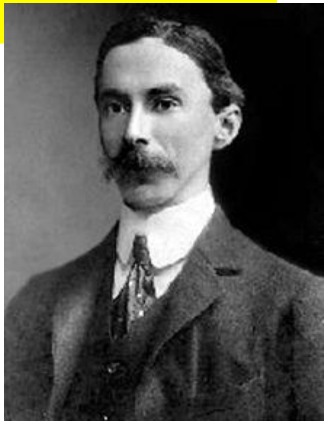
Поняття «предикат» узагальнює поняття «висловлювання». Неформально кажучи, предикат - це висловлювання, в яке можна підставляти аргументи. Якщо аргумент один - то предикат виражає властивість аргументу, якщо більше - то відношення між аргументами.

Предика́т (лат. *praedicatum* — заявлене, згадане, сказане) — це те, що стверджується про суб'єкт. Суб'єктом висловлювання називається те, про що робиться твердження.

Приклад предикатів. Візьмемо вислови: “Сократ – людина” , “Платон – людина “. Обидва ці висловлювання виражають властивість “бути людиною “. Таким чином, ми можемо розглядати предикат “бути людиною “ і говорити, що він виконується для Сократа і Платона.

Фрідріх Людвіг Готлоб Фреге

***Предикат** – розповідне речення, що містить предметні змінні, визначені на відповідних множинах. При заміні змінних конкретними значеннями (елементами) цих множин предикат звертається у висловлювання, тобто приймає значення "істинно" або "хибне".*



Бертран Артур Уільям Рассел

Логіка предикатів, як і логіка висловлювань, може бути побудована у вигляді алгебри логіки предикатів і числення предикатів. Тут, як і у випадку логіки висловлювань, для знайомства з основними поняттями логіки предикатів скористаємося мовою алгебри, а не числень.

Альфред Норт Уайтхед

предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ являє собою функцію типу $P: M_1 \text{ x } M_2 \text{ x } ... \text{ x } M_n \to B$, де множини $M_1, M_2, ..., M_n$ називаються *предметними областями* предикату; $x_1, x_2, ..., x_n$ – *предметними змінними* предикату; B - двійкова (бінарна) множина: $B = \{I, X\}$ або $\{1,0\}$. Якщо предикатні змінні приймають значення на одній множині, то $P: M^n \to B$.

Визначення і приклади.

Предикатом називається розповідне речення про елементи деякої заданої множини М, яке (речення) стає висловлюванням, якщо всі змінні в ньому замінити фіксованими елементами з М; висловлювання теж будемо вважати предикатом – нуль-місним предикатом. Часто замість "предикат від n-змінних" кажуть "n - місний предикат".

Поняття предикату узагальнює поняття висловлення, а теорія предикатів є більш витонченим інструментом порівняно з алгеброю висловлень для вивчення закономірностей побудови умовиводів в процесі міркування. У цій теорії розглядається внутрішня структура простих висловлень: у висловленнях виділяють підмет і присудок (предикат), і якщо на місце підмета потім ставити інший підмет, то вийде інше висловлення.

Приклад: Нехай x, y, z - цілочисельні змінні. 1) $x > 10$; 2) $x + y = 7$; 3) $x^2 + y^2 = z^2$ - предикати. За кількістю вільних змінних, що входять в предикат, розрізняють предикати одномісні, двомісні, тримісні і т.д. (відповідають приклади 1) -3)).

Існують такі види логічних міркувань, які не можуть бути обґрунтовані в рамках обчислення висловлювань. Ось приклади таких міркувань:
А) Будь який друг Мартіна є друг Джона. Пітер не є друг Джона. Отже, Пітер не є друг Мартіна.
В) Всі люди безсмертні. Сократ-людина. Отже, Сократ безсмертний.
Коректність цих умовиводів залежить не тільки на істінностно - функціональних відношень які входять у них між пропозиціями, але і на внутрішній структурі самих пропозицій, а також і на розумінні таких виразів, як «все», «будь який» і т. Д.

1) Кожний ромб є паралелограм.
2) Чотирикутник ABCD - ромб.
3) Отже, чотирикутник ABCD - паралелограм.

Позначимо ці пропозиції буквами X, Y, Z.

Правильність наведеного умовиводу не викликає сумніву. Але як відомо з логіки висловлювань, Z логічно випливає з X і Y тоді і тільки тоді, коли $X \wedge Y \to Z$ є тотожно істинною формулою. Але ця формула - НЕ тавтологія. Отже, на базі алгебри висловлювань Z не випливає з X і Y.

Тобто $X, Y \nvdash Z$

Квантори

- Квантор - логічна операція, яка дає кількісну характеристику предметної області, до якої відноситься вираз, одержуване в результаті використання квантора. Квантор - це загальна назва для логічних операцій, які по предикату P (x) будують висловлювання, що характеризує область істинності предиката P (x).
Квантори загальності ∀ та існування ∃ використовуються для визначення області дії змінних. Так, якщо x - змінна, то запис ∀ x читається "для будь-якого x", "для кожного x" і т. п., а запис ∃x - "існує x", "хоча б для одного x" і т.п .
Входження змінної в формулу безпосередньо після знака квантора або в область дії квантора, після якого стоїть ця змінна, називається зв'язаним. Всі інші входження змінних називаються вільними.

Квантором загальності називають символ $\forall$, під дією якого предикат P (x), визначений на множині M, приймає значення істинності для всіх $x \in M$ і позначається $\forall xP(x)$.

Квантором існування називається символ $\exists$, під дією якого предикат, визначений на множині M, приймає значення істинності для деяких $x \in M$ і позначається $\exists xP(x)$.

Приклад. Висловлювання «Всі студенти здають іспити» і «Деякі студенти здають іспити на відмінно» представити логікою предикатів.

Рішення.

Введемо предикати - P (x) - «x - здає іспит».

Q (x) - «x здає іспит на відмінно».

$x \in M$ - множина студентів.

Тоді, шукані подання мають вигляд - $\forall xP(x)$ і $\exists xQ(x)$.

Приклад 1. Задано предикат: «x любить y» - позначимо його P (x, y).

$\forall x \exists y P(x,y)$ –

- **всяка людина когось любить.**
- $\exists y \forall x P(x,y)$ –
- **існує така людина, що його всі люблять.**

$\forall x \forall y P(x,y)$ –

- **всі люди люблять всіх людей.**
- $\exists x \exists y P(x,y)$ –
- **існує людина, якого хтось любить**
- $\exists x \forall y P(x,y)$ –

існує людина, яка любить усіх людей

$\forall y \exists x P(x,y)$ -

кожну людину хтось любить.

Логіка предикатів

- На сукупності всіх предикатів, заданих на множині М, додаються знайомі по логіці висловлень операції *кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація* і *еквіваленція*. Ці операції вводяться досить очевидним чином. Наведемо як приклад визначення *кон'юнкції* предикатів.
- **Визначення 2.3.2** Предикат $W(x_1,\ldots,x_n)$називається *кон'юнкцією* предикатів $U(x_1,\ldots,x_n)$і $V(x_1,\ldots,x_n)$,заданих на множині М, якщо для будь-яких $a_1,\ldots,a_n$ з М висловлення $W(a_1,\ldots,a_n)$ є *кон'юнкцією* висловлень $U(a_1,\ldots,a_n)$ і $V(a_1,\ldots,a_n)$.
- Легко за аналогією привести визначення й інших згаданих вище операцій.

- На предикати можна дивитися і більш формально, причому з двох точок зору.
- По-перше, предикат можна представити відношенням у такий спосіб. Нехай предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$заданий на множині M. Розглянемо прямий ступінь цієї множини $M^n=MxMx\ldots xM$ підмножина D_p множини M^n, обумовлена рівністю:
- $D_p=\{(a_1,\ldots,a_n)\in M^n$: висловлення $P(a_1,\ldots,a_n)$ істинно$\}$.
- Відношення D_p можна назвати областю істинності предиката P. У багатьох випадках предикат P можна ототожнити з відношенням D^p. При цьому, правда виникають деякі труднощі при визначенні операцій над відношеннями, аналогічними операціям над предикатами.
- По-друге, предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$,заданий на M, можна ототожнити з функцією $f_p:M_n\rightarrow\{0,1\}$.

- Означення. Множиною (областю) істинності предиката $P(x_1,\ldots,x_n)$, заданого на множині $M \subset$
- $(M_1 \times M_2 \times \ldots M_n)$, називається сукупність всіх наборів $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in M$, для кожного з яких $|P(a_1, a_2, \ldots a_n)|=1$.
- Цю множину позначимо $M_{p.}$

- Наприклад. Предикат P(x, y):"x+y=5", заданий на множині M = {1, 2, 3, 4, 5}, має M_p ={(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}.

- Предикат P(x):"sinx=1/2", заданий на множині R, має
- $M_p = \{(-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in Z\}$.

- Теорема. Предикат P(x1,…,xn), заданий на множині $M \subset (M_1 \times M_2 \times \ldots M_n)$, буде:
- 1) тотожно істинним $\Leftrightarrow M_p = M$;
- 2) тотожно хибним $\Leftrightarrow M_p = \varnothing$;
- 3) виконуваним $\Leftrightarrow M_p \neq \varnothing$;
- 4) спростовним $\Leftrightarrow M_p \neq M$.
- Означення. Предикат $Q(x_1,\ldots,x_n)$, заданий на множині $M \subset (M1 \times M2 \times \ldots Mn)$, називається логічним наслідком предиката
- P(x1,…,xn),заданого на тій же множині, якщо $Mp \subset M_Q$

- **Визначення.** ***Інтерпретацією*** на непорожній множині M називається функція, задана на сигнатурі $F \cup R$, що
- 1) константі ставить у відповідність елемент із M;
- 2) символові n-місНОї функції ставить у відповідність деяку n-місНу функцію, визначену на множині M;
- 3) символові n-місного предиката ставить у відповідність n-місний предикат, заданий на M.
- У результаті будь-яка формула F одержує у відповідність предикат, місність якого дорівнює числу вільних зміних в формулі F.

- Приклад. Нехай сигнатура складається із символу одномісного предиката P і двомісного предиката D, M={2,3,6,9,12,15} і
- $F=(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\wedge(D(x,y))$
- Поставимо у відповідність (проінтерпретуємо) P(x) предикат «x – просте число», D(x,y) – предикат «x менше або дорівнює y». Тоді формула F одержить у відповідність предикат «x=2». На цій же множині можна розглянути й іншу інтерпретацію: P(x) ставиться у відповідність «x – непарне число», D(x,y) – предикат «x поділяє y». У такому випадку, формула F одержує у відповідність предикат «x=3».

- Одним з основних типів задач цієї теми є задачі, пов'язані з використанням виразних можливостей мови логіки предикатів. Як приклад, розглянемо задачу перекладу на мову логіки предикатів наступного міркування.
- *«Кожний другокурсник знайомий з ким-небудь зі спортсменів. Ніякий другокурсник не знаком ні з одним аматором підлідного лову. Отже, ніхто зі спортсменів не є аматором підлідного лову».*
- Для зручності посилань це міркування умовимося називати міркуванням про другокурсників. Виберемо наступну сигнатуру:
- Д(x): «x – другокурсник», С(x): «x – спортсмен»,
- ПЛ(x): «x – аматор підлідного лову», З(x,y): «x знайомий з y».

- Тоді міркування запишемо у вигляді наступної послідовності формул.
- H1=(∀ x)[Д(x)→ (∃ y)(C(y)^З(x,y))],
- H2=(∀ x)(∀ y)[Д(x) ^ПЛ(y) → ¬З(x,y)],
- H3=(∀ x)(C(x)→¬ПЛ(x))

- **Визначення** Формули $F(x_1,\ldots,x_n)$ і $G(x_1,\ldots,x_n)$ називаються *рівносильними*, якщо для будь-якої інтерпретації з областю M висловлення $F(a_1,\ldots,a_n)$ і $G(a_1,\ldots,a_n)$ при будь-яких $a_1,\ldots,a_n$ з M одночасно істинні або одночасно хибні.

Визначення Формула $F(x_1,\ldots,x_n)$ називається *тотожно істиною*, якщо для будь-якої інтерпретації φ з областю M висловлення $(\varphi F)(a_1,\ldots,a_n)$ при будь-яких $a_1,\ldots,a_n$ з M є істинним.

Аналогічно вводиться означення тотожно хибної формули.

Логіка першого порядку (числення предикатів)

Логіка першого порядку (числення предикатів) - формальне числення, яка допускає висловлювання щодо змінних, фіксованих функцій і предикатів. Розширює логіку висловлювань. В свою чергу є окремим випадком логіки вищого порядку.

Мова логіки першого порядку будується на основі сигнатури, що з множини функціональних символів f_i^n і множини предикатних символів P_i^n. З кожним функціональним і предикатним символом пов'язана арність, тобто число можливих аргументів. Допускаються як функціональні, так і предикатні символи арності 0. Перші іноді виділяють в окрему множину констант a_1, a_2, ..., a_n. Крім того, використовуються такі додаткові символи 1) Символи змінних (зазвичай x, y, z, ... x_1, x_2, x_3, ... Тощо. Д.). 2) Пропозіціональние зв'язки: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. 3) Квантори: загальності $\forall$ та існування $\exists$. 4) Службові символи: дужки і кома.

Перераховані символи разом з символами з f і P утворюють

Більш складні конструкції визначаються індуктивно:

Терм є символ змінної або предметної константи, або має вигляд f_i^n (t_1, ...,, t_n) де f - функціональний символ арності n, а t_i -Терм.
Атом має вигляд P_i^n (t_1, ..., t_n), де P - предикатний символ n арності, а t_n - терми.
Формула - це або атом, або одна з наступних конструкцій : $\neg F$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$, $\exists x F(x)$, $\forall x F(x)$, де F, F_1, F_2 — формули, а x — змінна.
Змінна називається зв'язаною у формулі F, якщо F має вигляд $\exists x G$ або $\forall x G$, або представима в одній з форм $\neg F$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$, причому x вже звязана в F, F_1 та F_2 . Якщо x не зв'язана в F, її називають вільною у F.
Формулу без вільних змінних називають замкнутої формулою, або пропозицією. Теорією першого порядку називають будь-яку множину пропозицій.

Аксіоматика і доведення формул

Система логічних аксіом логіки першого порядку складається з аксіом числення висловів доповненої двома новими аксіомами:

$\forall xA \to A\,[x / t]$, $A\,[x / t] \to \exists xA$,

де, $A\,[x / t]$ - формула, отримана в результаті підстановки терма t замість кожної вільної змінної x, що зустрічається у формулі A.

Правила виводу 2:Modus ponens: $A, A \to B \vdash B$.

Правило узагальнення : $A \vdash \forall x\, A$.

Використання

Будучи формалізованим аналогом звичайної логіки, логіка першого порядку дає можливість строго міркувати про стинність і хибність тверджень і про їх взаємозв'язок, зокрема, про логічне слідуванні одного твердження з іншого, або, наприклад, про їх еквівалентності. Розглянемо класичний приклад формалізації тверджень природної мови в логіці першого порядку.

Візьмемо міркування «Кожна людина смертна. Конфуцій - людина. Отже, Конфуцій смертний ». Позначимо «x є людина» через ЛЮДИНА (x) і «x смертний» через Смертний (x). Тоді твердження «кожна людина смертна» може бути представлено формулою: $\forall$ x (ЛЮДИНА (x) → Смертний (x)) твердження «Конфуцій - людина» формулою ЛЮДИНА (Конфуцій), і «Конфуцій смертний» формулою Смертний (Конфуцій). Твердження в цілому тепер може бути записано формулою $\forall$x (ЛЮДИНА (x) → Смертний (x)) ЛЮДИНА (Конфуцій)) →

Рівносильні формули логіки предикатів.
Визначення 1.
Дві формули логіки предикатів A і B називаються рівносильними на області M, якщо вони приймають однакові логічні значення при всіх значеннях вхідних у них змінних, віднесених до області M.
Визначення 2.
Дві формули логіки предикатів A і B називаються рівносильними, якщо вони рівносильні на будь якій області.

Ясно, що всі рівносильности алгебри висловлювань будуть вірними, якщо в них замість змінних висловлювань підставити формули логіки предикатів. Але, крім того, мають місце рівносильності самої логіки предикатів. Розглянемо основні з цих рівносильностей.
Нехай A (x) і B (x) - змінні предикати, а C - змінне висловлювання (або формула, яка не містить x). Тоді мають місце рівносильності:

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}. \qquad \overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}. \qquad \forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}.$$

$$\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}. \qquad \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$$

$$C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)] \qquad C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$$

$$C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)] \qquad \forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C.$$

$$\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x). \qquad \exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x).$$

$$\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x). \qquad \exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)].$$

$\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$.

Рівносильність 1 означає той простий факт, що, якщо не для всіх х істинно А (х), то існує х, при якому буде істиною. Рівносильність 2 означає той простий факт, що, якщо не існує х, при якому істинно А (х), то для всіх х буде істиною. Рівносильності 3 і 4 виходять з рівносильних 1 і 2, відповідно, якщо від обох їх частин взяти заперечення і скористатися законом подвійного заперечення.

У логіці предикатів, як і в логіці висловлень, формули можуть мати нормальну форму, тобто існують еквіваленті нормальні форми представлення будь-яких предикатних формул. При цьому, використовуючи рівносильності алгебри висловлень і логіки предикатів, кожну формулу логіки предикатів можна привести до нормальної форми. У логіці предикатів розрізняють два види нормальних форм : приведену і випереджену.

Визначення Говорять, що формула логіки предикатів має **приведену нормальну форму**, якщо вона містить тільки операції кон'юнкції, диз'юнкції і кванторні операції, а операція заперечення віднесена до елементарних формул.

Визначення Випередженою нормальною формою для даної формули логіки предикатів називається така її нормальна форма, у якій кванторні операції або відсутні, або всі кванторні операції виконуються останніми.

Визначення.

Кажуть, що формула логіки предикатів має приведену нормальну форму, якщо вона містить тільки операції кон'юнкції, диз'юнкції і кванторні операції, а операція заперечення віднесена до елементарних формулам.

Приклад 1.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \overset{18}{\equiv} \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \overset{17}{\equiv} \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \overset{1,31}{\equiv}$$

$$\overset{1,31}{\equiv} \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

Отримали приведену нормальну форму вихідної формули.