Средние показатели

- ***Самый отдаленный пункт земного шара к чему-нибудь да близок, а самый близкий от чего-нибудь да отдален***

- ***Козьма Прутков, Плоды раздумья***

План лекции

1. Средняя, её сущность и определение
2. Виды и формы средних величин
3. Средняя арифметическая
4. Средняя гармоническая
5. Средняя геометрическая

- В средней величине взаимопогашаются отклонения значений признака отдельных единиц совокупности, обусловленные действием случайных факторов, и проявляются изменения, вызванные действием основных факторов. Это позволяет средней отражать **типичный** уровень признака и абстрагироваться от индивидуальных особенностей, присущих отдельным единицам

- Взаимодействие элементов совокупности приводит к ограничению вариации хотя бы части их свойств.

- Главное значение средних величин состоит в их ***обобщающей функции,*** то есть замене индивидуальных значений признака средней величиной, характеризующей всю совокупность явлений.

- Если средняя величина обобщает качественно однородные значения признака, то она является ***типической*** характеристикой признака в данной совокупности

- Системные средние - характеристики государства как единой экономической системы

- Метод средних не ограничивается только расчетом средней арифметической, существуют и другие виды средних.

Определить среднюю можно через **исходное соотношение средней** (ИСС) или ее логическую формулу:

ИСС=(Суммарное значение или объем осредняемого признака)/(число единиц или объем совокупности)

Для каждого показателя, используемого в экономическом анализе, можно составить только одно истинное исходное соотношение для расчета средней.

Для расчета средней заработной платы работников предприятия необходимо общий фонд заработной платы разделить на число работников:

$$ИСС = \frac{\text{Фонд заработной платы} \quad (\text{тыс. руб.})}{\text{Число работников} \quad (\text{чел})}$$

$$ИСС = \frac{\text{Сумма всех вкладов (тыс. руб.)}}{\text{Число вкладов}}$$

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общая сумма выплат по процентам} \quad (\text{из рас чета за год, тыс. руб.})}{\text{Общая сумма предоставленных кредитов} \quad (\text{тыс. руб.})}$$

От того, в каком виде представлены исходные данные для расчета средней, зависит, каким именно образом будет реализовано ее исходное соотношение. В каждом конкретном случае для реализации исходного соотношения потребуется одна из следующих форм средней величины:

- *средняя арифметическая;*
- *средняя гармоническая;*
- *средняя геометрическая;*
- *средняя квадратическая, кубическая и т.д.*

- Перечисленные средние объединяются в общей формуле степенной средней (при различной величине ***k***)

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}} = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}}$$

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}} = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}}$$

- Изменение показателя степени ***k*** приводит в каждом отдельном случае к определенному виду средней

$$\bar{x}_{гарм.} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n} \right)^{\frac{1}{-1}} = \sqrt[-1]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$\bar{x}_{гарм} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n} \right)^{\frac{1}{-1}} = \sqrt[-1]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$x_{геом.} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

$$x_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

$$\bar{x}_{арифм.} = \sqrt[1]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{x}_{арифм.} = \sqrt[1]{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\overline{x}_{\text{êâàäð.}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

$$\overline{x}_{\text{êâàäð.}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

- Поскольку вариационные ряды обычно сгруппированы по одинаковым значениям признака, либо в интервалах его значений, то чаще для расчетов применяют формулы средних взвешенных. В этих формулах в качестве весов выступают значения частот.

$$\overline{x}_{гарм.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} f_i}$$

$$x_{геом.} = \sqrt[\sum f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot} = .. \sqrt[\sum f_i]{\prod x_i^{f_i}}$$

$$\overline{x}_{арифм.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$\overline{x}_{квадр.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Во всех формулах *xi* –индивидуальные значения признака; *fi* – частота повторения индивидуального значения признака, *n* – объем совокупности.

- **Чем больше показатель степени, тем больше величина соответствующей средней (мажорантность средних):**

$$\bar{x}_{гарм.} < \bar{x}_{геом.} < \bar{x}_{арифм.} < \bar{x}_{квадр.}$$

$$\bar{x}_{гарм.} < \bar{x}_{геом.} < \bar{x}_{арифм} < \bar{x}_{квадр.}$$

Торговое предприятие	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Товарооборот (млн.руб.)	**25**	**18**	**27**	**32**	**15**	**21**

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общий объем товарооборота} \quad (\text{млн.руб.})}{\text{Число торговых центров}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{25+18+27+32+15+21}{6} = 23 \text{ млн. руб.}$$

Сделки по акциям эмитента "X" за торговую сессию

Сделка	Количество проданных акций, шт	Курс продажи, руб.
1	700	420
2	200	440
3	950	410

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Общая сумма сделок (руб.)}}{\text{Количество проданных акций (шт.)}}$$

$$\bar{x} = \frac{420 \times 700 + 440 \times 200 + 410 \times 950}{700 + 200 + 950} = \frac{771500}{1850} = 417{,}03 \text{ руб.}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

В отдельных случаях веса могут быть представлены не абсолютными величинами, а относительными (в процентах или долях единицы). Так, в приведенном выше примере количество проданных в ходе каждой сделки акций соответственно составляет 37,8% (0,378); 10,8% (0,108) и 51,4% (0,514) от их общего числа. Тогда, с учетом несложного преобразования формулы взвешенной средней арифметической получим:

$$\bar{x} = \sum \left(x_i \frac{f_i}{\sum f_i} \right)$$

$\bar{x}$ = 420 · 0,378 + 440 · 0,108 + 410 · 0,514 = 417,03 руб.

Часто встречаемая при расчете средних ошибка заключается в игнорировании весов в тех случаях, когда эти веса в действительности необходимы. Предположим, имеются следующие данные:

Себестоимость продукции "Z"

Предприятие	Себестоимость единицы продукции, руб.
1 2	37 39

Можно ли по имеющимся данным определить среднюю себестоимость данной продукции по двум предприятиям, вместе взятым? Можно, но только в том случае, когда объемы производства данной продукции на двух предприятиях совпадают. Тогда средняя себестоимость составит 38,0 руб. (доказательство этого правила будет приведено ниже.). Однако на первом предприятии за рассматриваемый период может быть произведено, к примеру, 50 единиц продукции, а на втором - 700 единиц. Тогда для расчета средней себестоимости потребуется уже средняя арифметическая взвешенная:

$$\bar{x} = \frac{37 \times 50 + 39 \times 700}{50 + 700} = 38{,}9 \text{ руб.}$$

Использовать среднюю арифметическую невзвешенную можно только тогда, когда точно установлено отсутствие весов или их равенство.

При расчете средней по **интервальному вариационному ряду** для выполнения необходимых вычислений от интервалов переходят к их серединам.

Возраст (лет)	**Число сотрудников (чел.)**
до 25	8
25 - 30	32
30 - 40	68
40 - 50	49
50 - 60	21
60 и более	3
Итого:	181

Для определения среднего возраста персонала найдем середины возрастных интервалов. При этом величины открытых интервалов (первого и последнего) условно приравниваются к величинам интервалов, примыкающих к ним (второго и предпоследнего). С учетом этого середины интервалов будут следующими:

- 22,5 27,5 35,0 45,0 55,0 65,0

$$\bar{x} = \frac{22{,}5 \times 8 + 27{,}5 \times 32 + 35 \times 68 + 45 \times 49 + 55 \times 21 + 65 \times 3}{8 + 32 + 68 + 49 + 21 + 3} = 38{,}6 \text{ года.}$$

Средняя гармоническая

Время на изготовление одной детали (x) в часах:

0,2; 0,3; 0,3; 0,5; 0,5

Требуется рассчитать среднее время, затрачиваемое одним рабочим на изготовление детали.

$$\bar{x} = \frac{0,2 + 0,3 + 0,3 + 0,5 + 0,5}{5} = 0,36 час.$$

$$ИСС = \frac{\text{Время, потраченное на производство деталей}}{\text{Общее число произведенных за это время деталей}}$$

Для решения необходимы данные об общих затратах времени всех пяти рабочих и о числе выработанных за это время деталей.

Исходим из предположения, что рабочие работали один час. Тогда общие затраты времени составят 5 человеко-часов.

За это время первый рабочий выработает 1/0,2=5 деталей, второй и третий по 1/0,3=3,3 детали, а четвертый и пятый по 1/0,5=2 детали. Все вместе они выработали 15,6 деталей.

в среднем на одну деталь затрачивалось 5/15,6=0,32 часа.

Если все расчеты представить в виде формулы, то последняя и будет представлять собой среднюю гармоническую простую:

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} = \frac{5}{\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,5}} = 0,32 час.$$

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} = \frac{5}{\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}3} + \frac{1}{0{,}3} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}5}} = 0{,}32\,час.$$

В целом ряде случаев применение средней арифметической или средней гармонической определяется лишь наличием исходных данных.

Рассмотрим данные о реализации продукта одного вида на трех рынках:

Рынки	Цена за ед.продукции (руб.) x	Количество проданной продукции, шт. f	Выручка от продажи, руб. M
I	0,30	1000	300
II	0,35	2000	700
III	0,40	2000	800
Итого	-	5000	1800

Требуется рассчитать среднюю цену, по которой продавался товар.
1) Предположим, мы располагаем только данными о ценах на трех рынках и о количестве товара, проданного на каждом их них. При этом цены на отдельных рынках выступают в качестве вариантов, а количество проданного товара – в качестве весов. Тогда средняя цена определится по по средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0{,}30 \cdot 1000 + 0{,}35 \cdot 2000 + 0{,}4 \cdot 2000}{1000 + 2000 + 2000} = 0{,}36$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0{,}30 \cdot 1000 + 0{,}35 \cdot 2000 + 0{,}4 \cdot 2000}{1000 + 2000 + 2000} = 0{,}36$$

Теперь предположим, что количество проданного товара неизвестно, а известны лишь цены и выручка от продажи.

$$ИСС = \frac{\text{Общая выручка от продажи}}{\text{Число проданных единиц ттовар}}$$

$$M_i = x_i f_i$$

- $$f_i = \frac{M}{x_i}$$

$$M_i = x_i f_i$$

$$f_i = \frac{M}{x_i}$$

$$\bar{x}_{гар.} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{\frac{M_1}{x_1} + \frac{M_2}{x_2} + \ldots + \frac{M_m}{x_m}}$$

$$\bar{x}_{гар.} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_m}{\frac{M_1}{x_1} + \frac{M_2}{x_2} + \ldots + \frac{M_m}{x_m}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{300 + 700 + 800}{\frac{300}{0,3} + \frac{700}{0,35} + \frac{800}{0,4}} = \frac{1800}{5000} = 0,36\, руб.$$

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{300 + 700 + 800}{\frac{300}{0,3} + \frac{700}{0,35} + \frac{800}{0,4}} = \frac{1800}{5000} = 0,36 руб.$$

- В результате проверки двух партий муки потребителям установлено, что в первой партии муки высшего сорта было 3942 кг., что составляет 70,4% общего веса муки этой партии. Во второй партии муки высшего сорта было 6520 кг., что составляет 78,6% общего веса муки этой партии. Определите процент муки высшего сорта в среднем по первой и второй партиям вместе

$$ИСС = \frac{\text{Общий вес муки первого сорта}}{\text{Общий вес муки}}$$

$$\bar{x} = \frac{3942 + 6520}{\dfrac{3942}{0,704} + \dfrac{6520}{0,786}} = \frac{10462}{13894,6} = 0,753 \text{ или } 75,3\%.$$

Средняя геометрическая

Предположим, Вы внесли деньги в банк на срочный депозит, процент по которому ежегодно изменяется в зависимости от ставки рефинансирования ЦБ.

После каждого года сумма, равная процентному приросту, добавляется к сумме счета.

Например, первоначальная сумма вклада составила 100 денежных единиц. За первый Вы получили 5% дохода по вкладу, за второй 7%, за третий 9% и за 4-й – 10%. Каков средний уровень дохода по вкладу за 4 года?

$$\overline{x}_{àðèôì} = \frac{0,05+0,07+0,09+0,10}{4} = 0,0775$$

$$èëè \quad 7,75\%$$

P – первоначальная сумма вклада

$$i_1, i_2, i_3, i_4$$

- доход по вкладу в первый, второй, третий и четвертый годы соответственно (в долях единиц),

F – сумма вклада по истечении четырех лет.

$$P \times (i_1 + 1) = 100 \times (0,05 + 1) = 105$$

$$P \times (i_1 + 1) \times (i_2 + 1) =$$

$$100 \times (0,05 + 1) \times (0,07 + 1) = 112,35$$

$$P \times (i_1 + 1) \times (i_2 + 1) \times (i_3 + 1) =$$

$$100 \times (0,05 + 1) \times (0,07 + 1) \times (0,09 + 1)$$

$$= 122,4615$$

$$F = P \times (i_1 + 1) \times (i_2 + 1) \times (i_3 + 1) \times (i_4 + 1) =$$

$$= 100 \times (0{,}05 + 1) \times (0{,}07 + 1) \times (0{,}09 + 1) \times (0{,}10 + 1)$$

$$= 134{,}70765$$

$$\left(1+i\right)^4 = \left(1+i_1\right)\left(1+i_2\right)\left(1+i_3\right)\left(1+i_4\right)$$

$$(i+1)=\sqrt[4]{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)}=$$

$$=\sqrt[4]{1,05\times1,07\times1,09\times1,10}=$$

$$=1,0773282$$

$$(1-1,0773282)\times 100 \approx 7,733\%$$

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

- **Пример**. В результате инфляции за первый год цена товара возросла в два раза к предыдущему году, а за второй год еще в три раза к уровню предыдущего года. Ясно, что за два года цена возросла в 6 раз. Каков средний темп роста цены за год? Арифметическая средняя здесь непригодна, поскольку, если за год цена выросла бы в (2+3)/2=2,5 раза, то за два года цена выросла бы в 2,5 *2,5 = 6,25, а не в 6 раз. Геометрическая средняя даст правильный ответ:

$$\sqrt{6} = 2,45$$

раза.

- **Пример.** Максимальный выигрыш в лотерее составляет миллион рублей, а минимальный – сто рублей. Какую величину можно считать средней между миллионом и сотней? Арифметическая средняя явно непригодна, так как составляет 500050 рублей, а это, как и миллион, крупный, а никак не средний выигрыш. Геометрическая средняя в этом случае дает наиболее правильный с точки зрения экономики и логики ответ: $\sqrt{100 \cdot 100000} = 10000$