Сегодня: понедельник, 26 сентября 2022 г.

Лекция 5

Работа, мощность, энергия. Закон сохранения энергии

Энергия – количественная мера движения материи в различных формах этого движения.

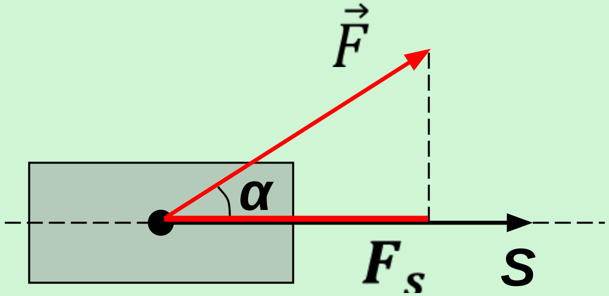
С различными формами движения материи связывают различные формы энергии.

Механическая энергия – мера механического движения, перемещения и взаимодействия сил.

Механическая работа – мера перехода механической энергии от одного тела к другому.

Работа

Прямолинейное движение

- 

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos\alpha, (1)$$

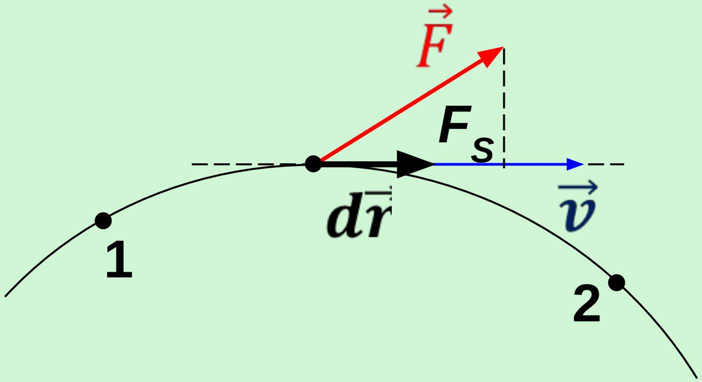
$$|d\vec{r}| = dS. (2)$$

С течением времени вектор ***F*** может меняться по модулю и по направлению. Поэтому рассматривается элементарное перемещение $d\vec{r}$, на котором ***F*** = *const*, а движение точки (тела) прямолинейное. Следовательно, *элементарная работа*:

$$\mathrm{d}A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F dr \cos\alpha = F_S dr$$

скалярная величина.

Движение по участку траектории

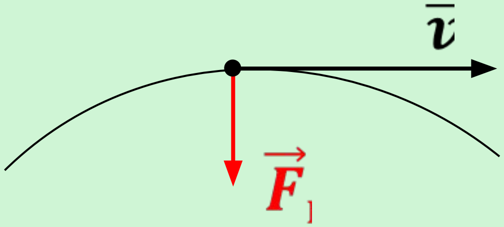


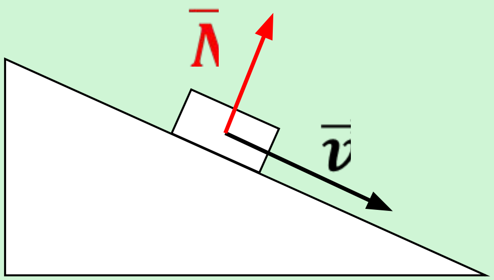
$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_{1}^{2} F_S dS\,.$$

F_S – проекция $\vec{F}$ на вектор перемещения

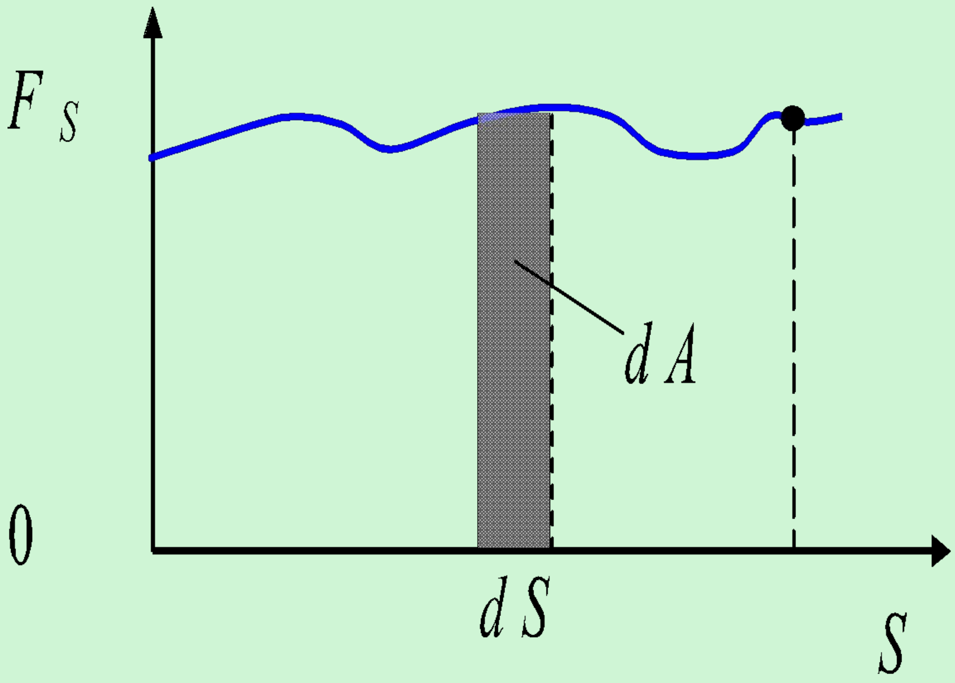
$$d\vec{r} = \vec{v} dt.$$

Движение по участку траектории на которых A=0





$$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow A = 0$$



При графическом изображении $F_S(S)$ работа равна площади под кривой.

Система СИ:
$[A]$ = джоуль, Дж.

1 Дж равен работе, совершаемой силой в 1 Н на пути 1 м,

1 Дж = 1 Н·1 м.

Мощность

Мощность (механизма или машины) – работа, совершаемая за единицу времени. Характеризует скорость совершения работы. Скалярная величина.

$$N=\frac{dA}{dt}=\frac{d(\vec{F}\cdot\vec{r})}{dt}=\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}(t)$$ – мгновенная мощность.

$N_{\text{ср}}=\frac{A}{t}$ – средняя мощность.

Система СИ: $[N]$ = ватт, Вт; 1 Вт = 1 Дж / 1 с.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия механической системы – энергия механического движения этой системы.

Сила вызывает движение тел и совершает работу

$$\mathrm{d}A = (\vec{F}, d\vec{r}).\ (1)$$

Второй з. Ньютона: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}.\ (2)$

$$\left.\begin{array}{c} dA = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot d\vec{v} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,(4) \end{array}\right\}$$

$$dA = m\vec{v}\cdot d\vec{v}.\,(5)$$

$$dA = mvdv.\,(7)$$

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{mv^2}{2}\bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.\,(8)$$

- Работа A силы F пошла на увеличение скорости тела от v_1 до v_2, увеличение его кинетической энергии $\mathrm{E}_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$.

$$A_{12} = \mathrm{E}_{\text{к}2} - \mathrm{E}_{\text{к}1} = \Delta\mathrm{E}_{\text{к}}. \quad (9)$$

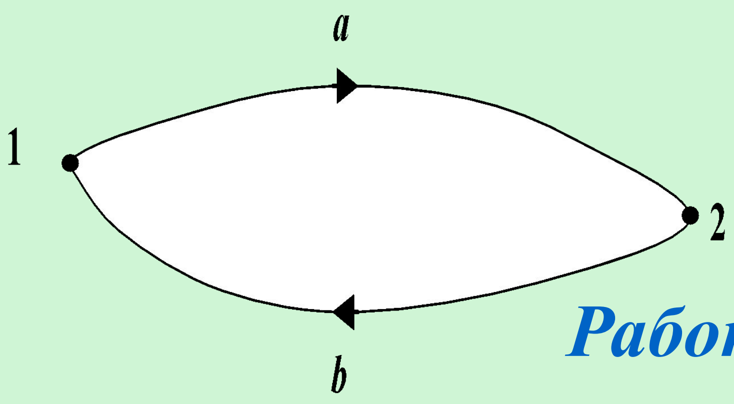
$dA = d\mathrm{E}_{\text{к}}$ – справедливо как для одного тела, так и для системы тел.

$$\mathrm{E}_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Использовался второй закон Ньютона, т.е. движение в ИСО. В разных ИСО, движущихся относительно друг друга, скорость тела различная, следовательно, различна и кинетическая энергия $E_к$.

Консервативные силы

Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы пути (траектории), а только от начального и конечного положения точек траектории.



Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю.

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0 \Rightarrow A_{1a2} = -A_{2b1}.$$

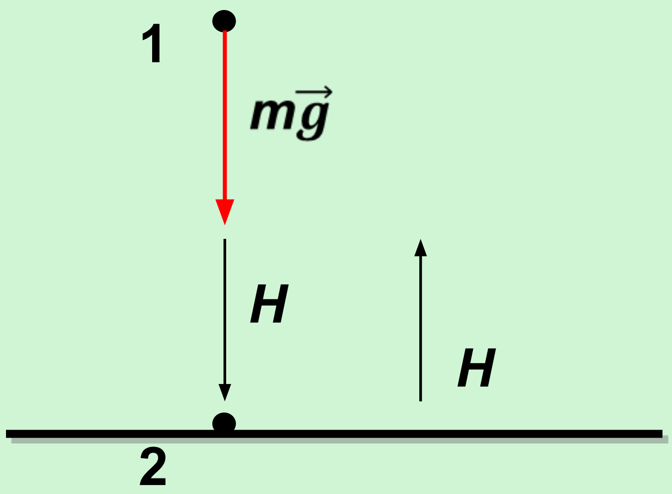
Примеры консервативных сил (силовых полей):

1. $F_{\text{тяжести}} = mg$

2. $F_{\text{упругости}} = -kx$

3. $F_{\text{Кулона}} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$

Сила тяжести



$$A_{12} = FH\cos\alpha = mgH\cos 0^0 = mgH,$$

$$A_{21} = mgH\cos 180^0 = -mgH \Rightarrow A = A_{12} + A_{21} = 0.$$

Сила упругости

В одномерном случае $F(x)$

$$F = -kx;\ dA = Fdx \Rightarrow\ dA = -kxdx \Rightarrow$$

$$A_{12} = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx^2}{2}\bigg|_{x_2}^{x_1} = \frac{k\left|x_1^2 - x_2^2\right|}{2} \Rightarrow$$

Работа зависит от начального и конечного положения $(x_1; x_2)$.

Если $x_1 = x_2$, то $A = 0$.

Диссипативные силы – силы, работа которых зависит от траектории перемещения тел.

Пример: сила трения.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – энергия системы тел, зависящая от взаимного расположения или их составных частей.

Взаимодействие тел в системе осуществляется посредством силовых полей.

Поля консервативных сил называются **потенциальными**.

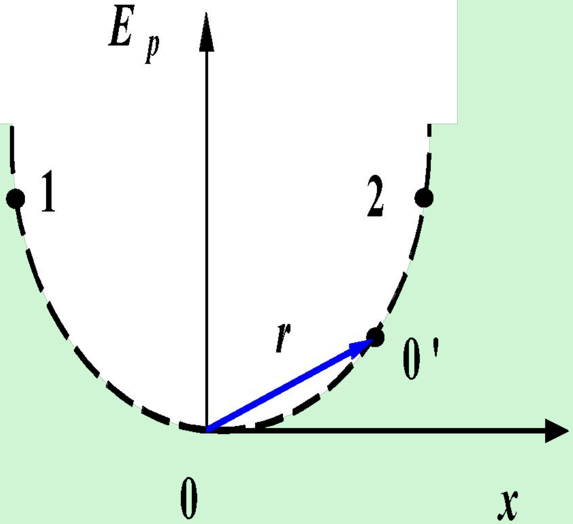
Тело, находящееся в потенциальном поле другого тела, обладает потенциальной энергией.

- $E_p = mgh$ – потенциальная энергия в поле тяготения.

$E_p = \frac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия упруго деформированного тела.

Рассмотрим поле консервативных сил.

$$A_{00'} = \int_{0}^{0'} \vec{F}\,d\vec{r}.$$



- Так как работа консервативных сил не зависит от формы пути, то при перемещении тела из 0 в 0' можно ввести понятие потенциальной энергии: $A_{00'} = E_p;\ E_{p0} = 0.$

Пусть перемещаем материальную точку из точки 1 в точку 2. При перемещении работа будет равна:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}, (1)$$

$$A_{02} = -A_{20}. (2)\ \Rightarrow A_{12} = A_{10} - A_{20}. (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{12} = A_{10} - A_{20}. (3) \\ &A_{10} = E_{p1}, (4)\ A_{20} = E_{p2}. (5) \end{aligned}\right\}$$

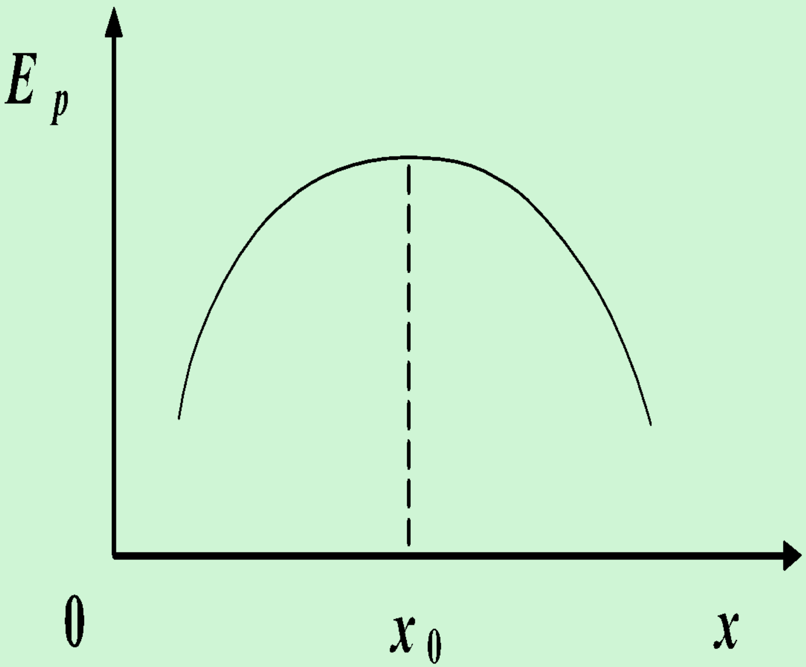
$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}, (6)$$

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}. (7) \Rightarrow A_{12} = -\Delta E_p, (8)$$

$dA = -dE_p (9)$ – для бесконечно малых.

Работа консервативны сил равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком. Выражения (8), (9) справедливы как для одного тела, находящегося в поле консервативных сил, так и для системы тел.

Связь потенциальной энергии и силы



Материальная точка движется вдоль оси x в потенциальном поле $E_p(x)$.

$$dA = -dE_p, (1)$$

$$Fdx = -dE_p. (2) \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

Сила есть первая производная от потенциальной энергии по координате, взятая с обратным знаком.

В общем случае трехмерного пространства:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x};\, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y};\, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

В векторном виде:

$$\vec{F} = -grad E_p = -\nabla E_p,$$

$$grad = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

∇

∇ – набла (оператор Гамильтона).

Уравнение (2) в общем виде: $\vec{F}d\vec{r} = -dE_p.$

$$\int \vec{F}d\vec{r} = \int -dE_p \Rightarrow E_p = -\int \vec{F}d\vec{r} + C,$$

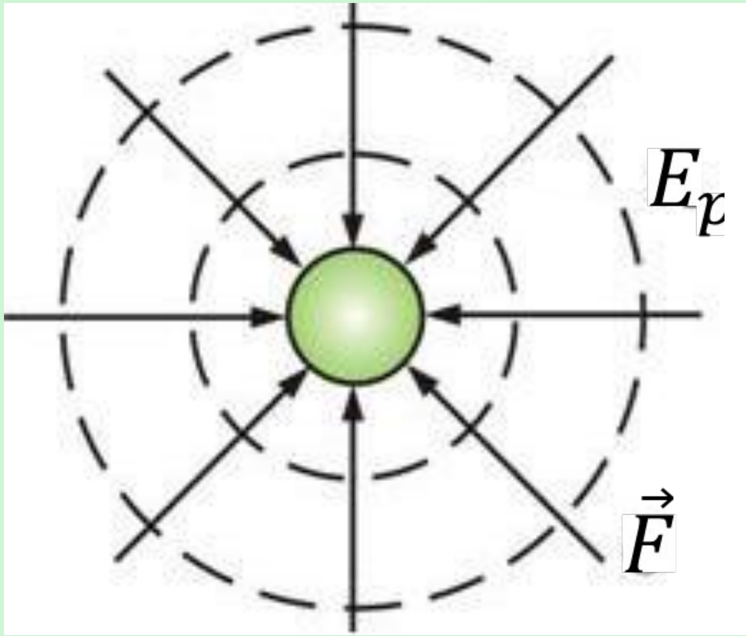
C − константа интегрирования.

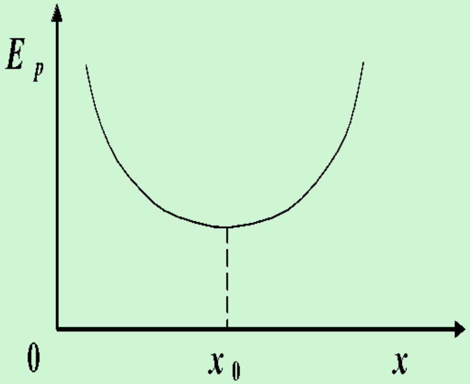
Т.е. E_p определяется с точностью до С, но это не влияет на результат, так в первую очередь интересует $\Delta\ E_p$.

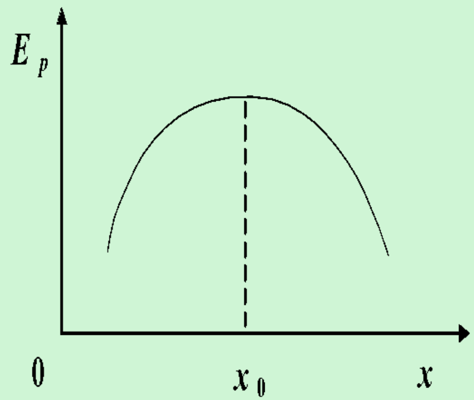
Потенциальную энергию системы в каком-то состоянии считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета). Энергию системы в других состояниях отсчитывают от этого нулевого уровня.

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

Знак “–” отражает то, что сила F направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.







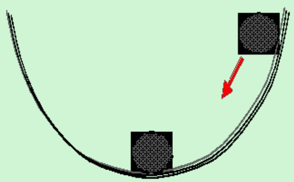
В точке x_0:

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$$

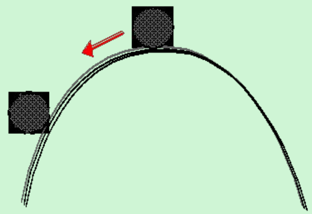
тело в равновесии.

Тело находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия тела минимальная.

Этот вывод распространяется и на систему тел.



а) устойчивое равновесие



б) неустойчивое равновесие

Потенциальное поле – поле консервативных сил.

- $$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\text{к}} + E_p (1)$$

полная механическая энергия системы.

$$dA = dE_{\text{к}} (2)$$

совершается работа, идущая на увеличение *Ек*.

$$dA = F \cdot dx = -dE_p (3)$$

–связь силы и потенциальной энергии

$$F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

$$d\left(E_{\text{к}} + E_p\right) = d(A - A) = 0. (4) \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow E = const.$$

Полная механическая энергия материальной точки (тела, частицы), находящейся в потенциальном поле (в консервативной системе), есть величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется.

Потенциальные кривые

Одномерное движение тела (материальной точки).
В этом случае *Ep* является функцией лишь одной переменной (например, координаты x) – *Ep* (x).

График зависимости *Ep* от некоторого аргумента называется *потенциальной кривой*.

Анализ потенциальных кривых определяет характер движения тел.

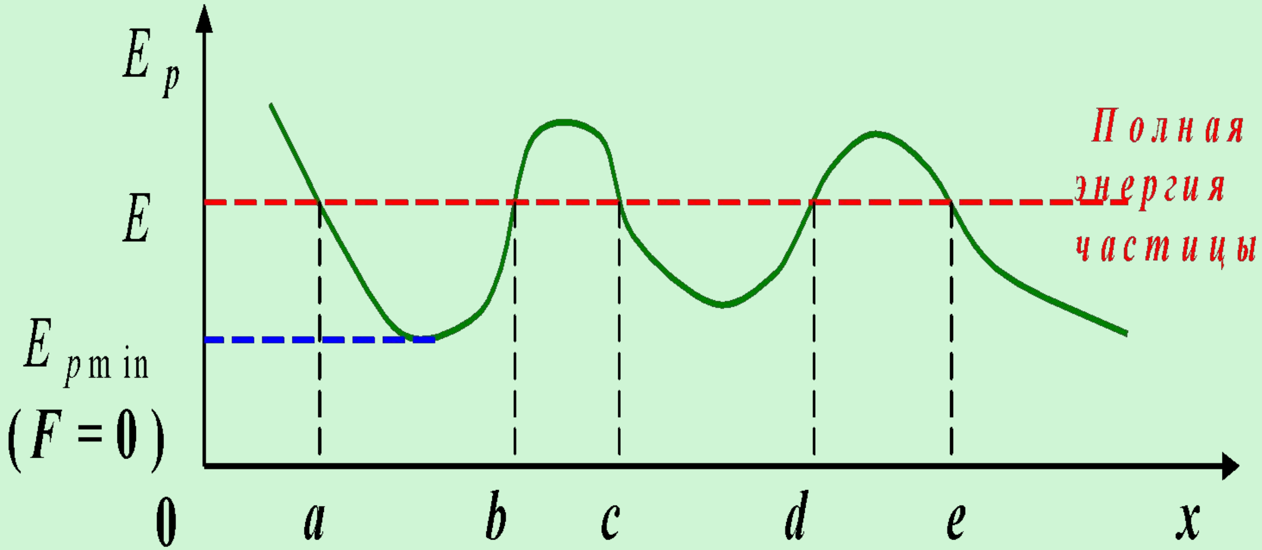
Рассмотрим консервативную систему, т.е. систему, в которой превращение механической энергии в другие виды отсутствует.

В ней действует закон сохранения энергии:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\text{к}} + E_p.$$

Кинетическая энергия не может быть отрицательной, потому $\mathrm{E}_{\text{кmin}}$

Для частиц (материальных точек) $E_p(x) \leq E$



• Области (ab); (cd): частица находится в *потенциальной яме* и совершает движение в ограниченной области пространства – *финитное движение (ограниченное)*.

• Области (bc); (de) содержат *потенциальный барьер*. Частица в этой области находиться не может.

Т.е. классическая частица потенциальный барьер преодолеть не может.

• Область (е +∞): частица может уйти как угодно далеко – *инфинитное движение (неограниченное)*.

Закон сохранения энергии в механике

- Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек массой m_i, движущихся со скоростями v_i.

$F_{i\,\text{конс}}^{\text{внутр}}$ – внутренние консервативные силы.

$F_{i\,\text{конс}}^{\text{внеш}}$ – внешние консервативные силы.

$F_{i\,\text{неконс}}^{\text{внеш}}$ – внешние неконсервативные силы.

Второй закон Ньютона для i точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внеш}} + \vec{F}_{i\,\text{неконс}}^{\text{внеш}}. (1)$$

Под действием силы точка за время dt совершает перемещение dr_i:

$$m_i d\vec{v}_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{v_i} = \left(\vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внеш}} + \vec{F}_{i\,\text{неконс}}^{\text{внеш}}\right) d\vec{r}_i. (2)$$

$$m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) - \left(\vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i\,\text{конс}}^{\text{внеш}}\right) d\vec{r}_i = \vec{F}_{i\,\text{неконс}}^{\text{внеш}} d\vec{r}_i. (3)$$

Суммируя по всем точкам, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}\underbrace{m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i)}_{\substack{m_i\frac{dv_i^2}{2}=d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\\ \sum_{i=1}^{\text{т}} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)=dE_{\text{к}}}} - \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\vec{F}_{i\ \text{конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i\ \text{конс}}^{\text{внеш}}\right)d\vec{r}_i}_{\substack{\text{работа конс−х сил}\\ dA_{\text{конс}}=-dE_p}} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\vec{F}_{i\ \text{неконс}}^{\text{внеш}}d\vec{r}_i}_{\substack{\text{работа внеш−х}\\ \text{неконс−х сил}}}.\ (4) \Rightarrow$$

$$d\underbrace{\left(E_{\text{к}} + E_p\right)}_{\substack{\text{изменение полной}\\ \text{мех. энергии сист.}}} = dA.\ (5)$$

При переходе системы из одного состояния в другое:

$$\int_1^2 d\underbrace{\left(E_{\text{к}} + E_p\right)}_{E} = A_{12}$$

работа, совершаемая внешними неконсервативными силами.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т. е. $A_{12} = 0 \Rightarrow dE = 0, (6) \Rightarrow E = const. (7)$

Полная механическая энергия консервативной системы есть величина постоянная, с течением времени не меняется.

Консервативной системой называется механическая система, внутренние силы которой консервативны, а внешние силы – консервативны и стационарны.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*, т.е. физические законы инвариантны относительно начала отсчета времени.

Замкнутая система – частный случай.

В этом случае внешние силы не рассматриваются, т.е.

$F_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow E = const$ полная механическая энергия системы. Происходит превращение $Ep \rightarrow Eк$, и обратно $Eк \rightarrow Ep$.

Наряду с консервативными силами в системе могут существовать неконсервативные силы (диссипативные, например, $F_{тр}$).

В этом случае с течением времени полная механическая энергия системы уменьшается.

Но механическая энергия не исчезает, она переходит в другие виды энергии, например, при $F_{тр}$ во внутреннюю энергию.

Закон сохранения энергии в механике является частным случаем *фундаментального (всеобщего) закона сохранения энергии*:

сумма всех видов энергии в замкнутой системе постоянна

$$\sum E_i = const.$$

Применение законов сохранения импульса и энергии для анализа упругого и неупругого ударов шаров

Удар – кратковременное взаимодействие двух или более тел.

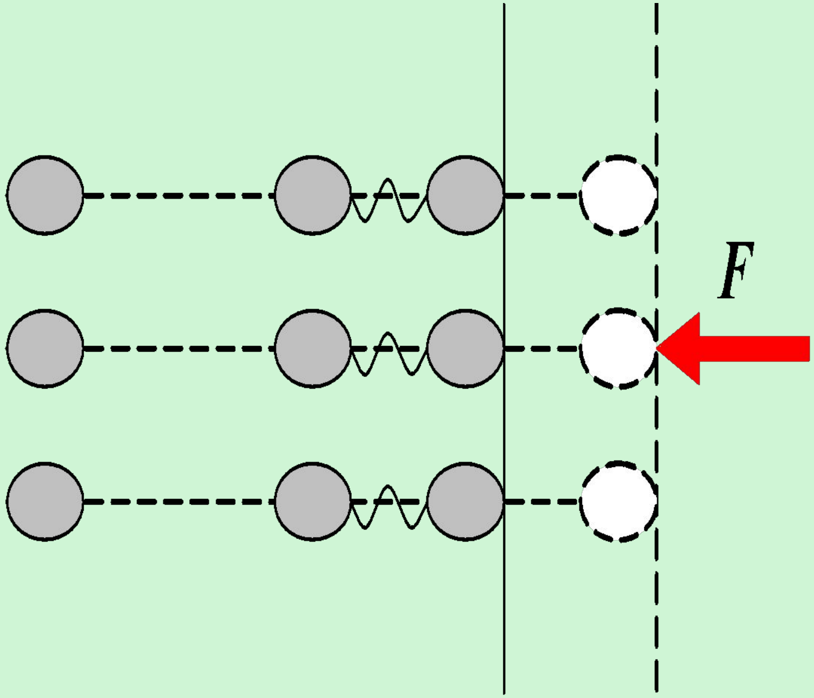
Центральный удар (двух шаров) – удар, при котором движение происходит по прямой, соединяющей центры тел.

Сила взаимодействия при ударе тел велика

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \to \infty; m\frac{dv}{dt} = F - \text{велика}$$

следовательно, внешними силами, действующими на тело, можно пренебречь. Поэтому систему тел в процессе удара можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тело во время удара претерпевает деформацию. Кинетическая энергия во время удара переходит в энергию деформации.



- Если деформация упругая, то тело стремится принять прежнюю форму. Следователь, имеем ***упругий удар***.
- Если деформация неупругая, то тело не принимает прежнюю форму – ***неупругий удар***.

Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

В общем случае относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения, т.к. нет идеально упругих тел.

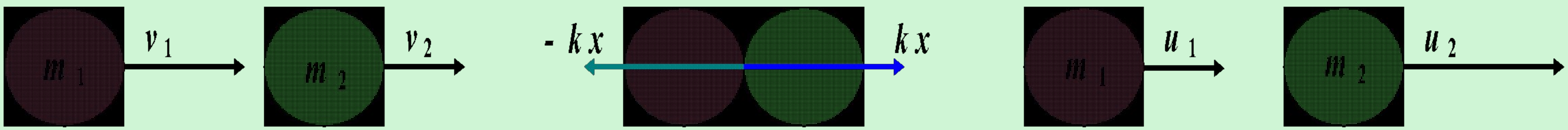
Коэффициент восстановления – отношение нормальных составляющих относительной скорости после удара u_n и до удара v_n:

$$\varepsilon = \frac{u_n}{v_n}.$$

$\varepsilon = 1$ – абсолютно упругий удар.

$\varepsilon = 0$ – абсолютно неупругий удар.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором внутренняя энергия соударяющихся тел не изменяется.



Возникает $F_{упр} = -kx$, шары раздвигаются и $E_к$ восстанавливается.

Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \ (1)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \ (2)$$

$$\left.\begin{aligned} & m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2).\ (3) \\ & \frac{m_1}{2}(v_1^2 - u_1^2) = \frac{m_2}{2}(u_2^2 - v_2^2).\ (4) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\text{Уравнение}(4)}{(3)} \Rightarrow$$

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.\ (5) \Rightarrow$$

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2.\ (6)$$

Уравнение(6) → (1):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 v_1 + m_2 u_1 - m_2 v_2.\ (7) \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}.\ (8)$$

Уравнение(8) → (6) ⇒

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}.\ (9)$$

- $m_2 >> m_1; v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \dfrac{2\overbrace{m_2 v_2}^{=0} - m_2 v_1}{m_2} = -v_1,$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - 0)\overbrace{v_2}^{0}}{m_2} = 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx 0.$$

$p_2 = m_2 u_2 = 2m_1 v_1.$

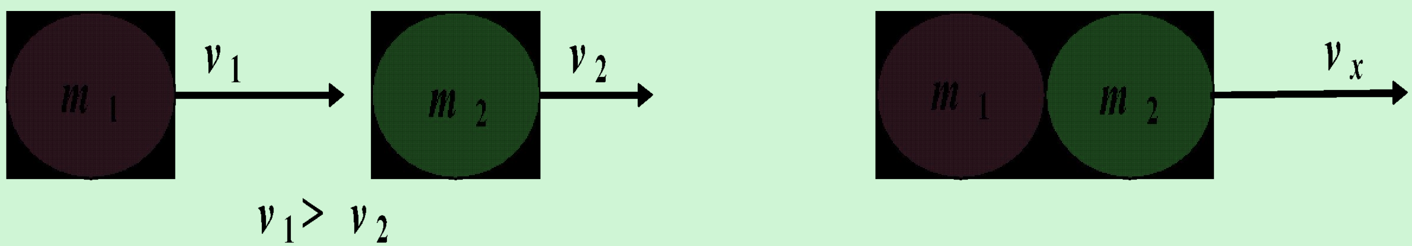
- $m_2 >> m_1; v_2 < 0 \Rightarrow u_1 = \dfrac{-2m_2v_2 - m_2v_1}{m_2}$

- $m_2 >> m_1; v_2 > 0 \Rightarrow u_1 = 2v_2 - v_1;\ u_1 = 0$ если $\quad v_2 = \dfrac{v_1}{2}.$

- $m_2 = m_1 \Rightarrow u_1 = v_2; u_2 = v_1.$

При одинаковых массах происходит обмен скоростями.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором полная механическая энергия соударяющихся тел не сохраняется, частично переходит во внутреннюю энергию; импульс сохраняется.



При абсолютно неупругом ударе тела после удара двигаются с одинаковой скоростью.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_x. \ (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_x^2}{2} = Q. \ (2)$$

$$\text{Из уравнения}(1) \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. (3)$$

● **Наковальня**

$$m_2 >> m_1; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + 0}{0 + m_2} \cong 0.$$

Вся энергия переходит в теплоту или деформацию.

$$v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. (3)$$

- **Удар молотка по гвоздю.**

$$m_1 >> m_2; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = v_1.$$

Вся энергия переходит в механическую энергию.