

**Сегодня: понедельник, 26 сентября 2022
г.**

Лекция 5

***Работа, мощность, энергия.
Закон сохранения энергии***

Энергия – количественная мера движения материи в различных формах этого движения.

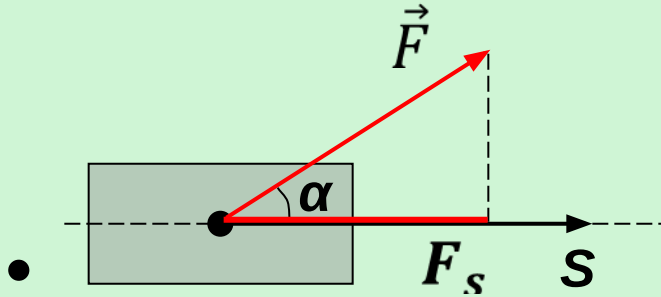
С различными формами движения материи связывают различные формы энергии.

Механическая энергия – мера механического движения, перемещения и взаимодействия сил.

Механическая работа – мера перехода механической энергии от одного тела к другому.

Работа

Прямолинейное движение



$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \alpha, (1)$$

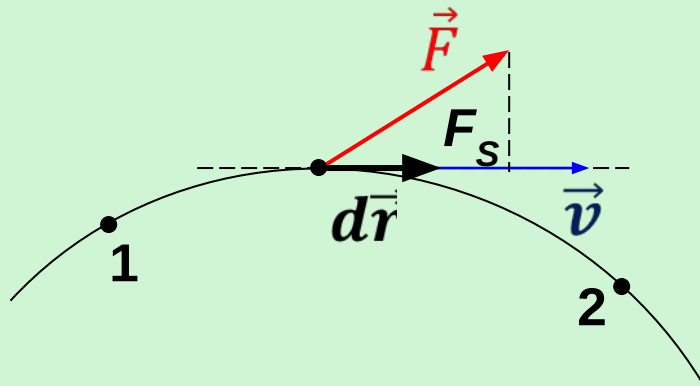
$$|d\vec{r}| = dS. (2)$$

С течением времени вектор F может меняться по модулю и по направлению. Поэтому рассматривается элементарное перемещение $d\vec{r}$, на котором $F = const$, а движение точки (тела) прямолинейное. Следовательно, *элементарная работа*:

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = F dr \cos \alpha = F_s dr$$

скалярная величина.

Движение по участку траектории

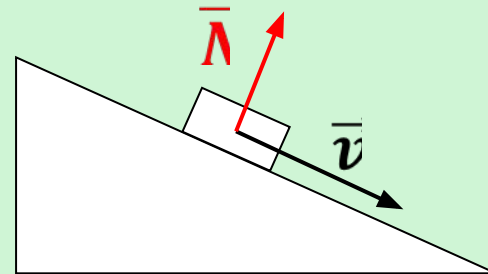
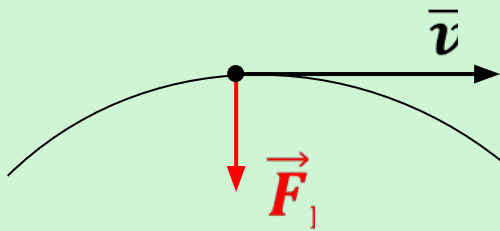


$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^2 F_S dS.$$

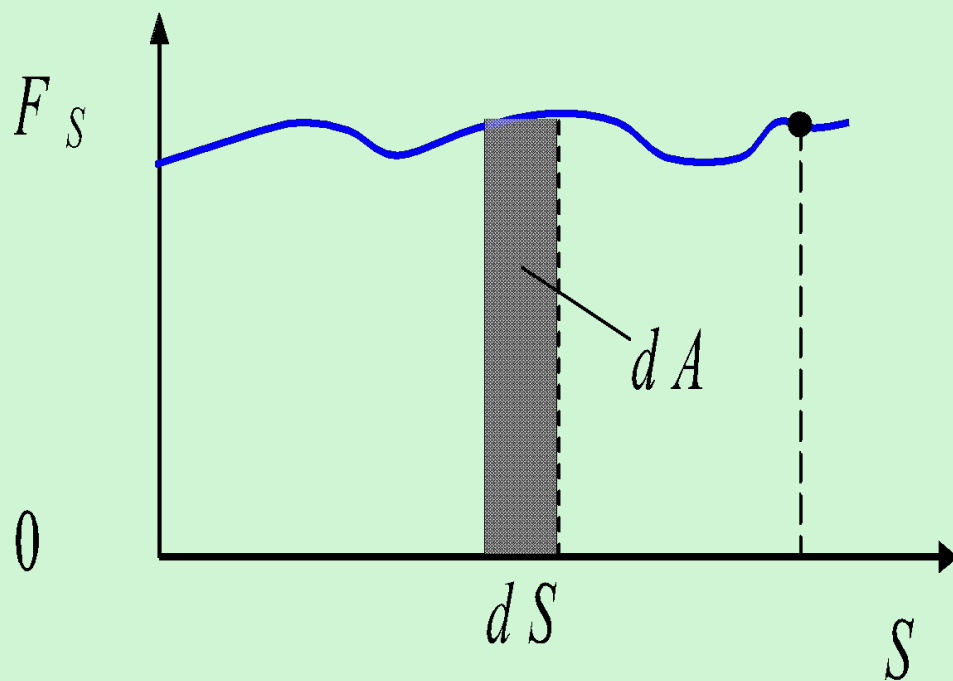
F_S – проекция \vec{F} на
вектор перемещения

$$d\vec{r} = \vec{v} dt.$$

Движение по участку траектории на которых $A=0$



$$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow A = 0$$



При графическом изображении $F_s(S)$ работа равна площади под кривой.

Система СИ:

$[A] =$ джоуль, Дж.

1 Дж равен работе, совершаемой силой в 1 Н на пути 1 м,

1 Дж = 1 Н·1 м.

Мощность

Мощность (механизма или машины) – работа, совершаемая за единицу времени. Характеризует скорость совершения работы. Скалярная величина.

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{r})}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) \quad \text{— МГНОВЕННАЯ МОЩНОСТЬ.}$$

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{t} \quad \text{— средняя мощность.}$$

Система СИ: $[N] = \text{ватт, Вт};$

1

$$\text{Вт} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ с.}$$

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия механической системы – энергия механического движения этой системы.

Сила вызывает движение тел и совершает работу

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (1)$$

Второй з. Ньютона: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2)$

$$dA = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} \quad (3)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4)$$

$$dA = m\vec{v} \cdot d\vec{v}. \quad (5)$$

$$dA = mv dv. \quad (7)$$

$$A_{12} = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \left(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) =$$

$$= m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (8)$$

- Работа A силы F пошла на увеличение скорости тела от v_1 до v_2 , увеличение его кинетической энергии $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. (9)$$

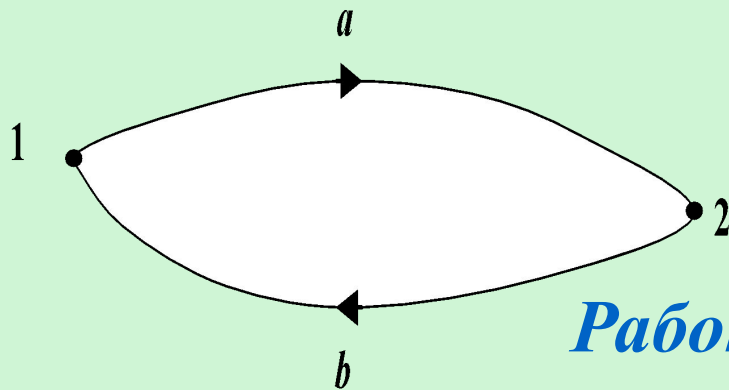
$dA = dE_k$ – справедливо как для одного тела, так и для системы тел.

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Использовался второй закон Ньютона, т.е. движение в ИСО. В разных ИСО, движущихся относительно друг друга, скорость тела различная, следовательно, различна и кинетическая энергия E_k .

Консервативные силы

Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы пути (траектории), а только от начального и конечного положения точек траектории.



Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю.

$$A_{1a2} + A_{2b1} = 0 \Rightarrow A_{1a2} = -A_{2b1}.$$

Примеры консервативных сил

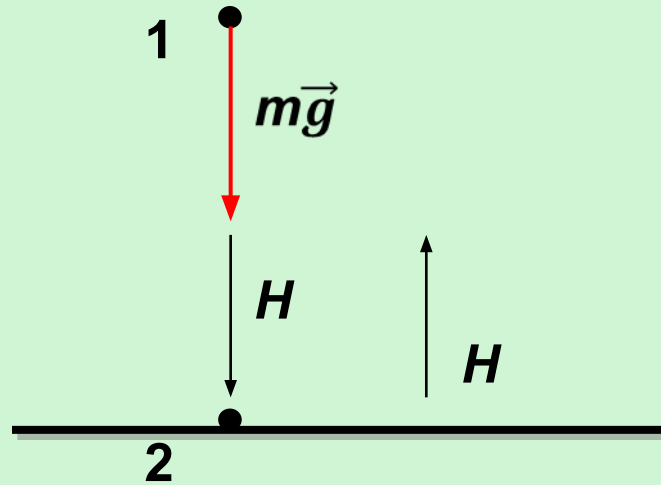
(силовых полей):

1. $F_{\text{тяжести}} = mg$

2. $F_{\text{упругости}} = -kx$

3. $F_{\text{Кулона}} = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$

Сила тяжести



$$A_{12} = FH \cos \alpha = mgH \cos 0^{\circ} = mgH,$$

$$A_{21} = mgH \cos 180^{\circ} = -mgH \Rightarrow A = A_{12} + A_{21} = 0.$$

Сила упругости

В одномерном случае $F(x)$

$$F = -kx; dA = Fdx \Rightarrow dA = -kx dx \Rightarrow$$
$$A_{12} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_2}^{x_1} = \frac{k|x_1^2 - x_2^2|}{2} \Rightarrow$$

Работа зависит от начального и конечного положения $(x_1; x_2)$.

Если $x_1 = x_2$, то $A = 0$.

Диссипативные силы — силы, работа которых зависит от траектории перемещения тел.

Пример: сила трения.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – энергия системы тел, зависящая от взаимного расположения или их составных частей.

Взаимодействие тел в системе осуществляется посредством силовых полей.

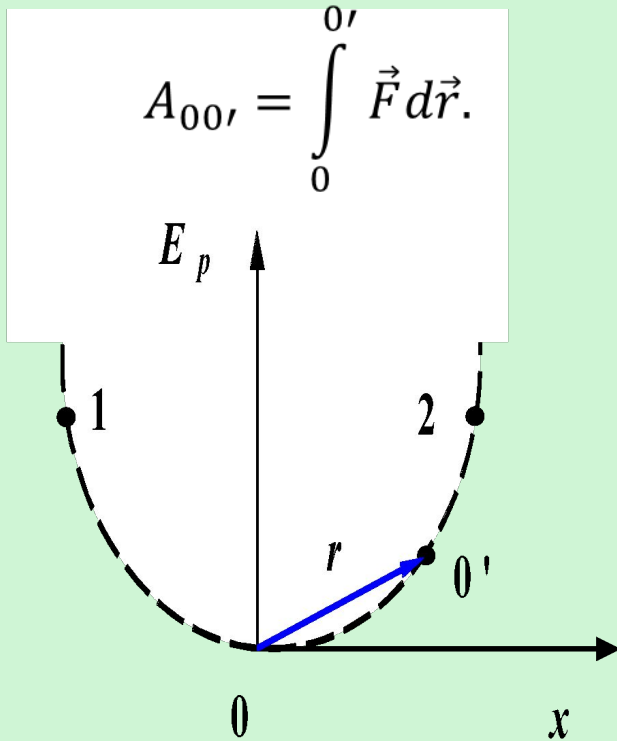
Поля консервативных сил называются **потенциальными**.

Тело, находящееся в потенциальном поле другого тела, обладает потенциальной энергией.

- $E_p = mgh$ – потенциальная энергия в поле тяготения.

$$E_p = \frac{kx^2}{2} \text{ – потенциальная энергия упруго деформированного тела.}$$

Рассмотрим поле консервативных сил.



- Так как работа консервативных сил не зависит от формы пути, то при перемещении тела из 0 в $0'$ можно ввести понятие потенциальной энергии: $A_{00'} = E_p$; $E_{p0} = 0$.

Пусть перемещаем материальную точку из точки 1 в точку 2. При перемещении работа будет равна:

$$A_{12} = A_{10} + A_{02}, (1)$$

$$A_{02} = -A_{20}. (2) \Rightarrow A_{12} = A_{10} - A_{20}. (3)$$

$$A_{12} = A_{10} - A_{20}. \quad (3)$$

$$A_{10} = E_{p1}, \quad (4) \quad A_{20} = E_{p2}. \quad (5)$$

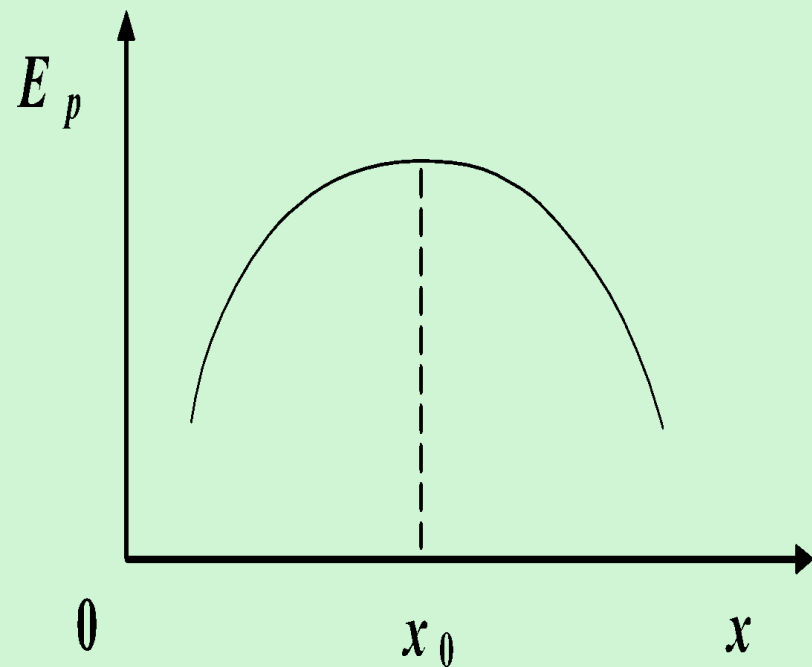
$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}, \quad (6)$$

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}. \quad (7) \Rightarrow A_{12} = -\Delta E_p, \quad (8)$$

$$dA = -dE_p \quad (9) \text{ — для бесконечно малых.}$$

Работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком. Выражения (8), (9) справедливы как для одного тела, находящегося в поле консервативных сил, так и для системы тел.

Связь потенциальной энергии и силы



Материальная точка движется вдоль оси x в потенциальном поле $E_p(x)$.

$$dA = -dE_p, (1)$$

$$Fdx = -dE_p. (2) \Rightarrow F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

Сила есть первая производная от потенциальной энергии по координате, взятая с обратным знаком.

В общем случае трехмерного пространства:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

В векторном виде:

$$\vec{F} = -grad E_p = -\nabla E_p,$$

$$grad = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

∇ – набла (оператор Гамильтона).

Уравнение (2) в общем виде: $\vec{F} d\vec{r} = -dE_p$.

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \int -dE_p \Rightarrow E_p = - \int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

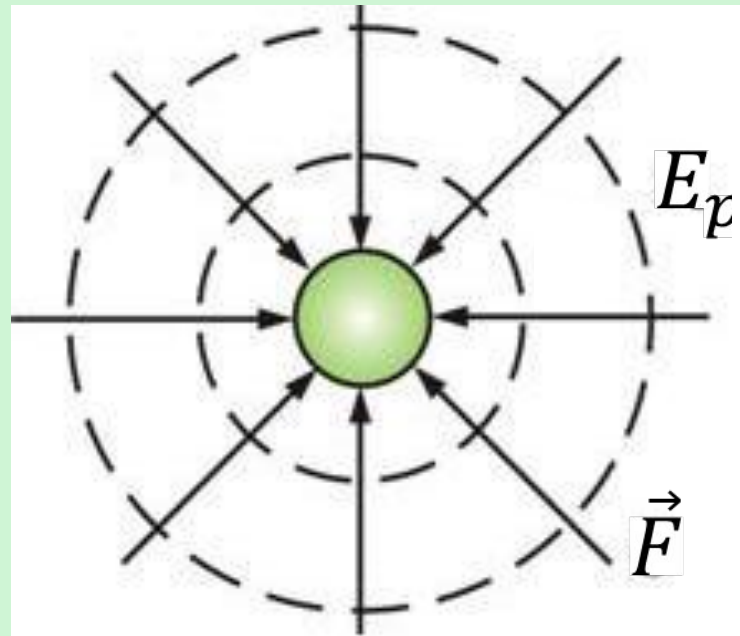
C – константа интегрирования.

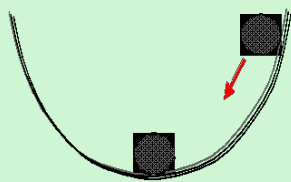
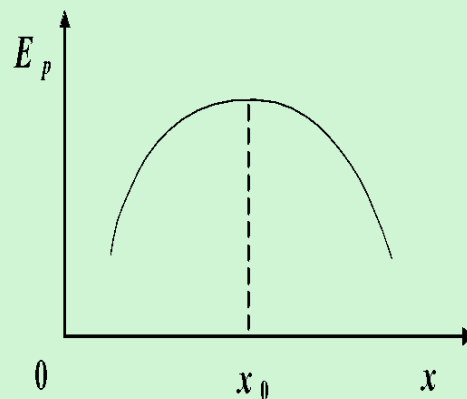
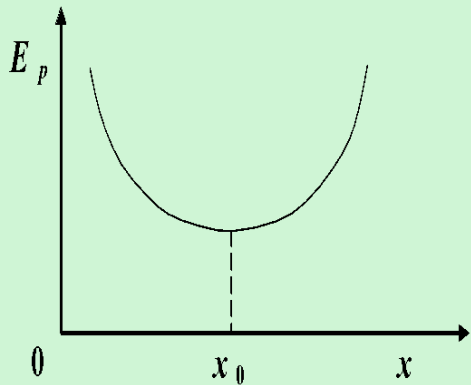
Т.е. E_p определяется с точностью до C , но это не влияет на результат, так в первую очередь интересует ΔE_p .

Потенциальную энергию системы в каком-то состоянии считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета). Энергию системы в других состояниях отсчитывают от этого нулевого уровня.

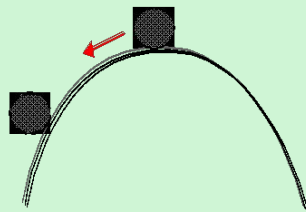
$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

Знак “−” отражает то, что сила F направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.





а) устойчивое равновесие



б) неустойчивое равновесие

В точке x_0 :

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$$

тело в равновесии.

Тело находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия тела минимальная.

Этот вывод распространяется и на систему тел.

Потенциальное поле – поле консервативных сил.

- $$E = E_k + E_p (1)$$

полная механическая энергия системы.

$$dA = dE_k (2)$$

совершается работа, идущая на увеличение E_k .

$$dA = F \cdot dx = -dE_p (3)$$

–связь силы и потенциальной энергии

$$F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

$$d(E_k + E_p) = d(A - A) = 0. (4) \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow E = const.$$

Полная механическая энергия материальной точки (тела, частицы), находящейся в потенциальном поле (в консервативной системе), есть величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется.

Потенциальные кривые

Одномерное движение тела (материальной точки).

В этом случае E_p является функцией лишь одной переменной (например, координаты x) – $E_p(x)$.

График зависимости E_p от некоторого аргумента называется *потенциальной кривой*.

Анализ потенциальных кривых определяет характер движения тел.

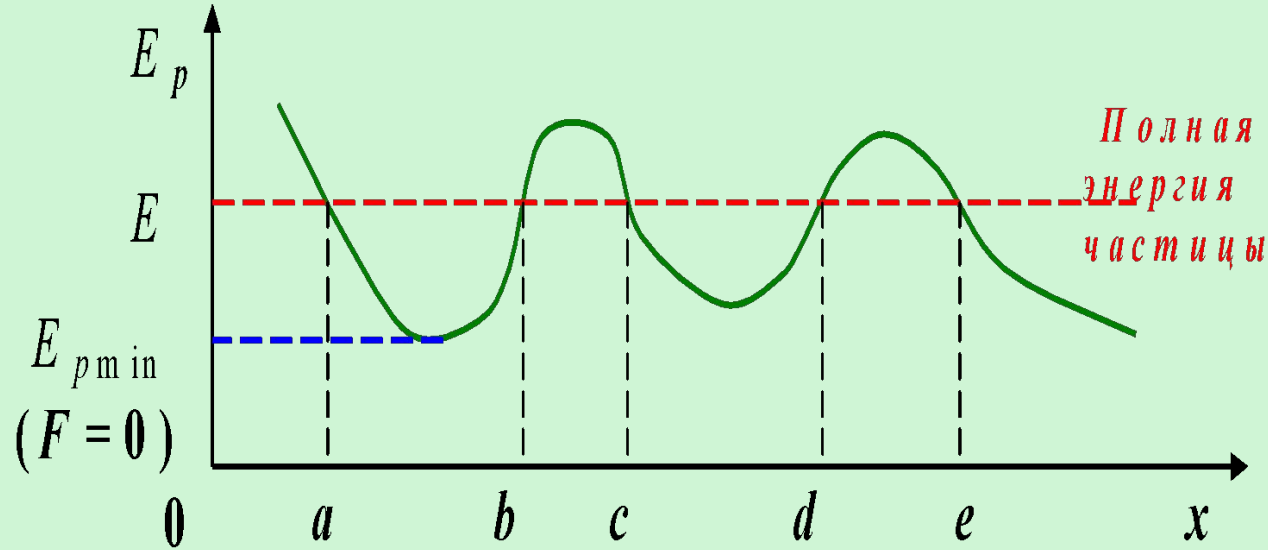
Рассмотрим консервативную систему, т.е. систему, в которой превращение механической энергии в другие виды отсутствует.

В ней действует закон сохранения энергии:

$$E = E_k + E_p.$$

Кинетическая энергия не может быть отрицательной, потому $E_{k\min}$ }

Для частиц (материальных точек) $E_p(x) \leq E$



- Области (ab) ; (cd) : частица находится в *потенциальной яме* и совершает движение в ограниченной области пространства – *финитное движение* (ограниченное).
- Области (bc) ; (de) содержат *потенциальный барьер*. Частица в этой области находиться не может.

Т.е. классическая частица потенциальный барьер преодолеть не может.

- Область $(e + \infty)$: частица может уйти как угодно далеко – *инфинитное движение* (неограниченное).

Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек массой m_i , движущихся со скоростями v_i .

$F_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}}$ — внутренние консервативные силы.

$F_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}}$ — внешние консервативные силы.

$F_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}}$ — внешние неконсервативные силы.

Второй закон Ньютона для i точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}} + \vec{F}_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}}. \quad (1)$$

Под действием силы точка за время dt совершает перемещение $d\vec{r}_i$:

$$m_i d\vec{v}_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{v_i} = (\vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}} + \vec{F}_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}}) d\vec{r}_i. \quad (2)$$

$$m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) - (\vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}}) d\vec{r}_i = \vec{F}_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}} d\vec{r}_i. \quad (3)$$

Суммируя по всем точкам, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i)}_{m_i \frac{dv_i^2}{2} = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right)} - \sum_{i=1}^n \underbrace{(\vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внутр}} + \vec{F}_{i \text{ конс}}^{\text{внеш}}) d\vec{r}_i}_{\substack{\text{работа конс-х сил} \\ dA_{\text{конс}} = -dE_p}} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{F}_{i \text{ неконс}}^{\text{внеш}} d\vec{r}_i}_{\substack{\text{работа внеш-х} \\ \text{неконс-х сил}}}. \quad (4) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dE_k$$

$$d \underbrace{(E_k + E_p)}_{\substack{\text{изменение полной} \\ \text{мех. энергии сист.}}} = dA. \quad (5)$$

При переходе системы из одного состояния в другое:

$$\int_1^2 d \underbrace{(E_k + E_p)}_E = A_{12}$$

работа, совершаемая внешними неконсервативными силами.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т.

е. $A_{12} = 0 \Rightarrow dE = 0, (6) \Rightarrow E = \text{const.} (7)$

Полная механическая энергия консервативной системы есть величина постоянная, с течением времени не меняется.

Консервативной системой называется механическая система, внутренние силы которой консервативны, а внешние силы – консервативны и стационарны.

Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени, т.е. физические законы инвариантны относительно начала отсчета времени.

Замкнутая система – частный случай.

В этом случае внешние силы не рассматриваются, т.е.

$F_{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow E = \text{полная механическая}$
энергия системы. Происходит превращение
 $E_p \rightarrow E_k$, и обратно $E_k \rightarrow E_p$.

Наряду с консервативными силами в системе могут существовать неконсервативные силы (диссипативные, например, $F_{тр}$).

В этом случае с течением времени полная механическая энергия системы уменьшается.

Но механическая энергия не исчезает, она переходит в другие виды энергии, например, при $F_{тр}$ во внутреннюю энергию.

Закон сохранения энергии в механике является частным случаем *фундаментального (всеобщего) закона сохранения энергии*:

сумма всех видов энергии в замкнутой системе постоянна

$$\sum E_i = const.$$

Применение законов сохранения импульса и энергии для анализа упругого и неупругого ударов шаров

Удар – кратковременное взаимодействие двух или более тел.

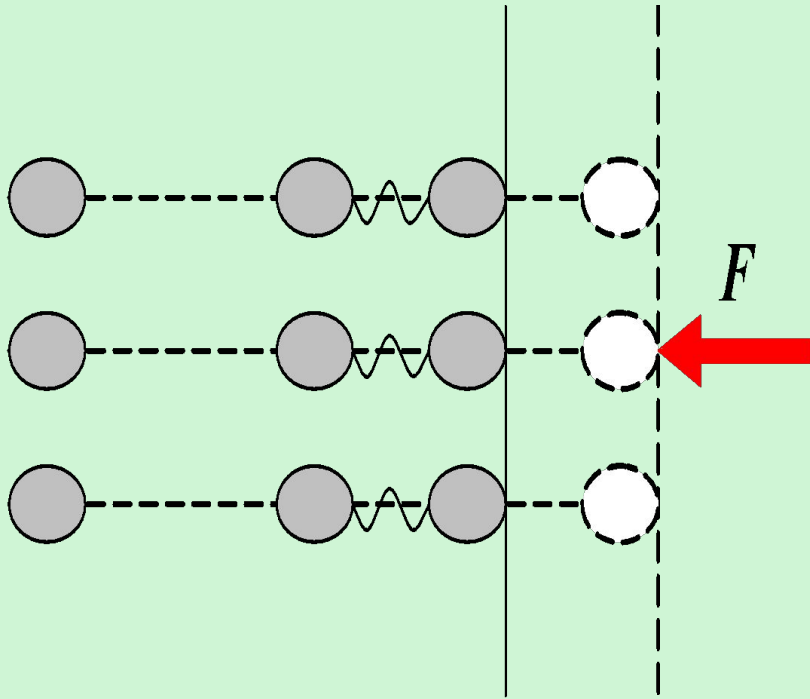
Центральный удар (двух шаров) – удар, при котором движение происходит по прямой, соединяющей центры тел.

Сила взаимодействия при ударе тел велика

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \rightarrow \infty; m \frac{dv}{dt} = F \text{ — велика}$$

следовательно, внешними силами, действующими на тело, можно пренебречь. Поэтому систему тел в процессе удара можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тело во время удара претерпевает деформацию. Кинетическая энергия во время удара переходит в энергию деформации.



- Если деформация упругая, то тело стремится принять прежнюю форму. Следовательно, имеем *упругий удар*.
- Если деформация неупругая, то тело не принимает прежнюю форму – *неупругий удар*.

Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

В общем случае относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения, т.к. нет идеально упругих тел.

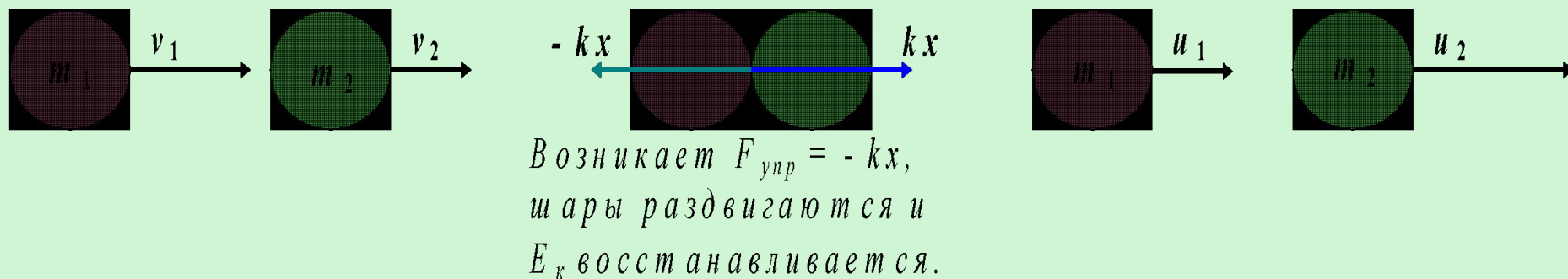
Коэффициент восстановления – отношение нормальных составляющих относительной скорости после удара u_n и до удара v_n :

$$\varepsilon = \frac{u_n}{v_n}.$$

$\varepsilon = 1$ – абсолютно упругий удар.

$\varepsilon = 0$ – абсолютно неупругий удар.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором внутренняя энергия соударяющихся тел не изменяется.



Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. (1)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. (2)$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). (3)$$

$$\frac{m_1}{2}(v_1^2 - u_1^2) = \frac{m_2}{2}(u_2^2 - v_2^2). (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array} \right\} \frac{\text{Уравнение(4)}}{(3)} \Rightarrow$$

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. (5) \Rightarrow$$

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2. (6)$$

Уравнение(6) \rightarrow (1):

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2v_1 + m_2u_1 - m_2v_2. (7) \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. (8)$$

Уравнение(8) \rightarrow (6) \Rightarrow

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. (9)$$

$$\bullet m_2 \gg m_1; v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{2 \overbrace{m_2 v_2}^{=0} - m_2 v_1}{m_2} = -v_1,$$
$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - 0) \overbrace{v_2}^0}{m_2} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_1 \approx 0.$$

$$p_2 = m_2 u_2 = 2m_1 v_1.$$

- $m_2 \gg m_1; v_2 < 0 \Rightarrow u_1 = \frac{-2m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_2}$

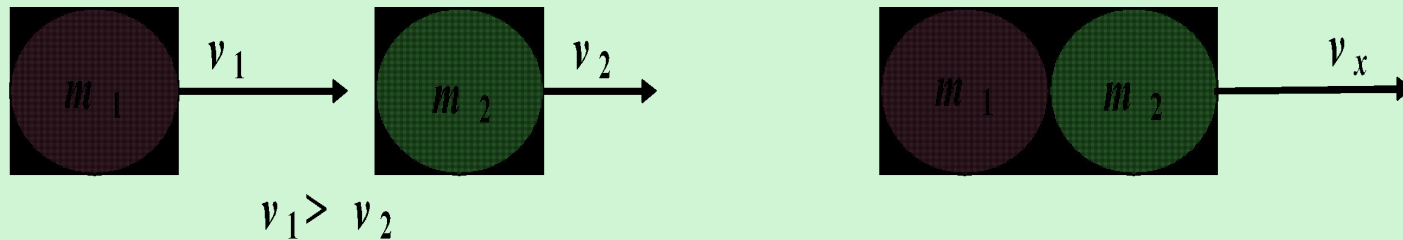
(2) . . .

- $m_2 \gg m_1; v_2 > 0 \Rightarrow u_1 = 2v_2 - v_1; u_1 = 0$ если $v_2 = \frac{v_1}{2}$.

- $m_2 = m_1 \Rightarrow u_1 = v_2; u_2 = v_1$.

При одинаковых массах происходит обмен скоростями.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором полная механическая энергия соударяющихся тел не сохраняется, частично переходит во внутреннюю энергию; импульс сохраняется.



При абсолютно неупругом ударе тела после удара двигаются с одинаковой скоростью.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_x. \quad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_x^2}{2} = Q. \quad (2)$$

Из уравнения(1) $\Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$. (3)

● **Наковальня**

$$m_2 \gg m_1; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = \frac{m_1 v_1 + 0}{0 + m_2} \cong 0.$$

Вся энергия переходит в теплоту или деформацию.

$$v_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

- **Удар молотка по гвоздю.**

$$m_1 \gg m_2; v_2 = 0 \Rightarrow v_x = v_1.$$

Вся энергия переходит в механическую энергию.