

**Решение  
тригонометрических  
уравнений и способы отбора  
корней на заданном  
промежутке**

# Обязательный минимум знаний

$$\sin x = a, -1 \leq a \leq 1 (|a| \leq 1)$$

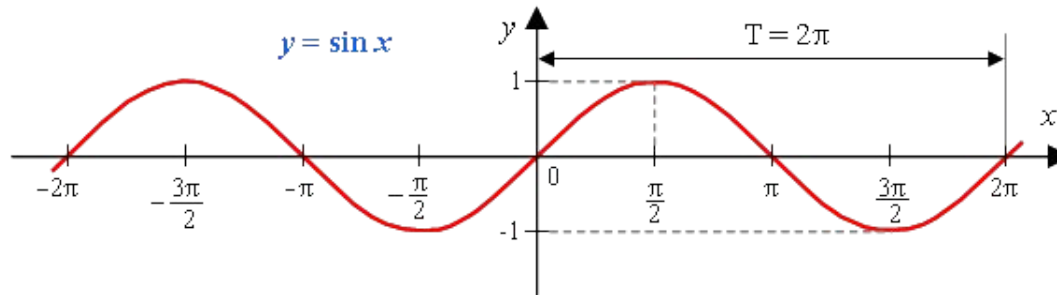
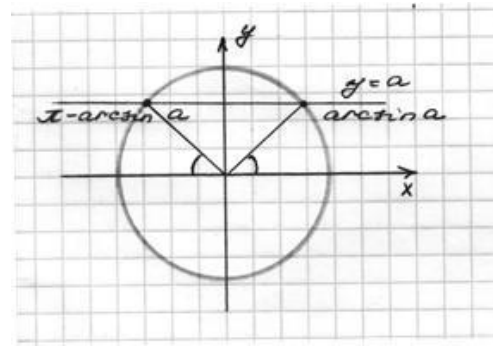
$$x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или

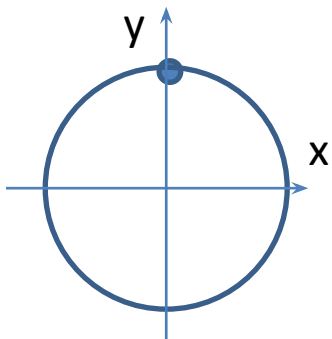
$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



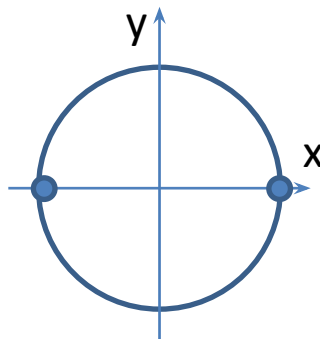
$$\sin x = 1$$

$$x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



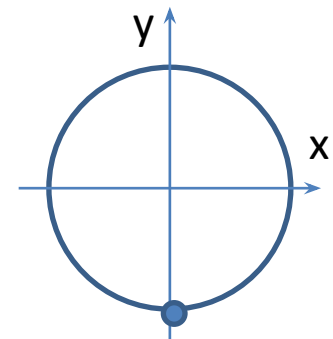
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = -1$$

$$x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

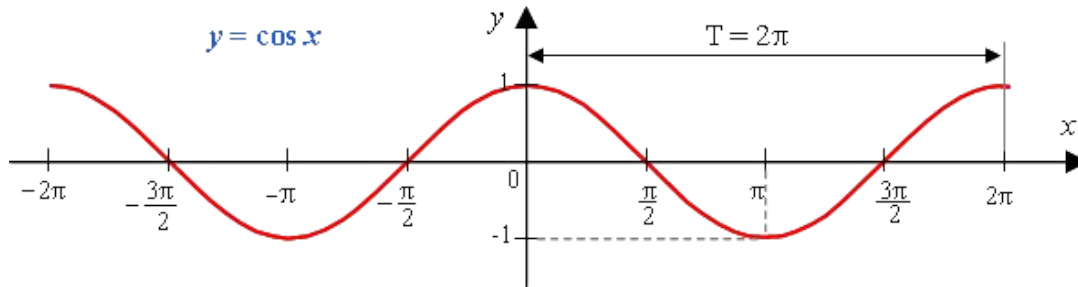
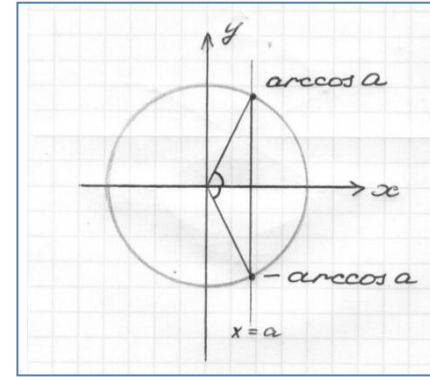


# Обязательный минимум знаний

$$\cos x = a, -1 \leq a \leq 1 (|a| \leq 1)$$

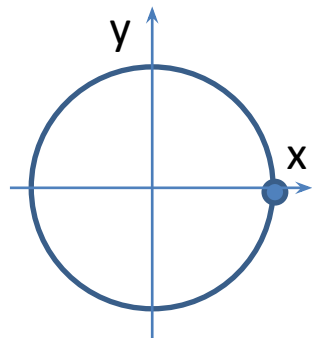
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



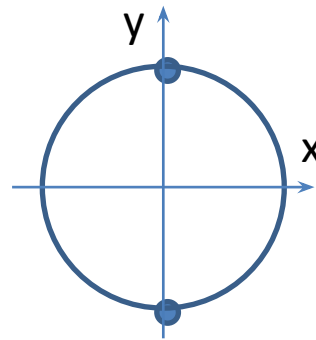
$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



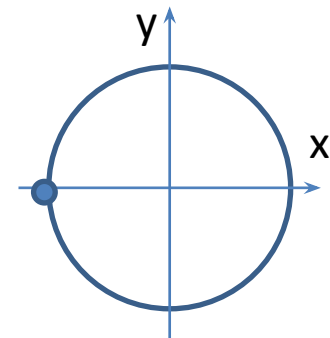
$$\cos x = 0$$

$$x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

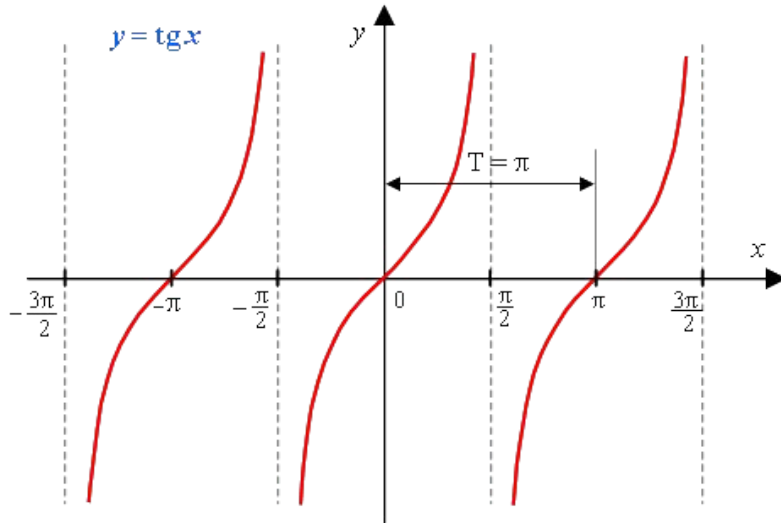


# Обязательный минимум знаний

$$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

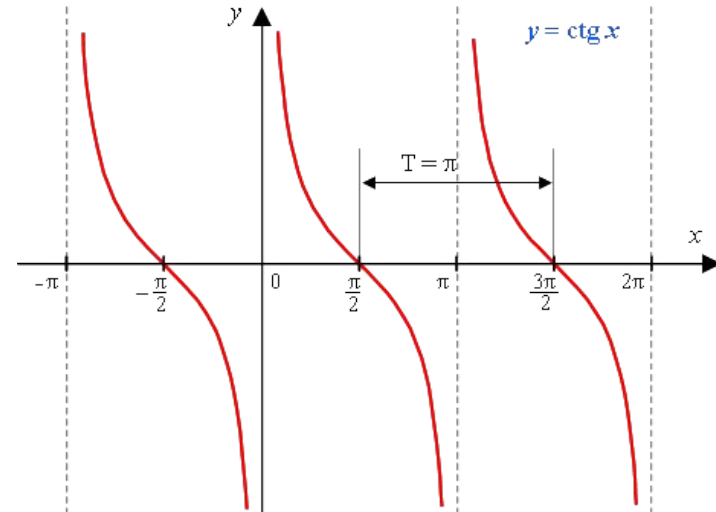
$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$$



$$\operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R}$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arctg} (-a) = \pi - \operatorname{arctg} a$$



# Рекомендации по решению тригонометрических уравнений

- Свести уравнение к одной функции
- Свести к одному аргументу

## Некоторые методы решения тригонометрических уравнений

- Применение тригонометрических формул
- Использование формул сокращённого умножения
- Разложение на множители
- Сведение к квадратному уравнению относительно  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$
- Введением вспомогательного аргумента
- Делением обеих частей однородного уравнения первой степени ( $a \sin x + b \cos x = 0$ ) на  $\cos x$
- Делением обеих частей однородного уравнения второй степени ( $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ) на  $\cos^2 x$

# Устные упражнения

## Вычислите

$$\arcsin \frac{1}{2} = \pi/6$$

$$\arcsin (-\sqrt{2}/2) = -\pi/4$$

$$\arccos \sqrt{3}/2 = \pi/6$$

$$\arccos (-1/2) = \pi - \arccos 1/2 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3$$

$$\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$$

# Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку  
(с помощью тригонометрической окружности)

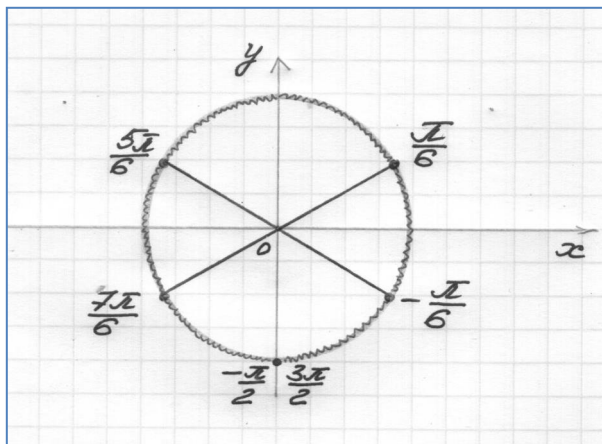
$$\cos 2x = \frac{1}{2}, x \in [-\pi/2; 3\pi/2]$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни с помощью тригонометрической окружности



**Ответ:  $-\pi/6; \pi/6; 5\pi/6; 7\pi/6$**

# Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку

$$\sin 3x = \sqrt{3}/2, x \in [-\pi/2;$$

$$\pi/2]$$

$$3x = (-1)^k \pi/3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \pi/9 + \pi k/3, k \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни с помощью перебора значений  $k$ :

$k = 0, x = \pi/9$  – принадлежит промежутку

$k = 1, x = -\pi/9 + \pi/3 = 2\pi/9$  – принадлежит промежутку

$k = 2, x = \pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$  – не принадлежит промежутку

$k = -1, x = -\pi/9 - \pi/3 = -4\pi/9$  – принадлежит промежутку

$k = -2, x = \pi/9 - 2\pi/3 = -5\pi/9$  – не принадлежит промежутку

**Ответ:  $-4\pi/9; \pi/9; 2\pi/9$**



# Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку  
( с помощью неравенства)

$$\operatorname{tg} 3x = -1, x \in (-\pi/2; \pi)$$

$$3x = -\pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/12 + \pi n/3, n \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни с помощью неравенства:

$$-\pi/2 < -\pi/12 + \pi n/3 < \pi, \quad n = -1, x = -\pi/12 - \pi/3 = -5\pi/12$$

$$-1/2 < -1/12 + n/3 < 1, \quad n = 0, x = -\pi/12$$

$$-1/2 + 1/12 < n/3 < 1 + 1/12, \quad n = 1, x = -\pi/12 + \pi/3 = \pi/4$$

$$-5/12 < n/3 < 13/12, \quad n = 2, x = -\pi/12 + 2\pi/3 = 7\pi/12$$

$$-5/4 < n < 13/4, n \in \mathbb{Z}, \quad n = 3, x = -\pi/12 + \pi = 11\pi/12$$

$$n = -1; 0; 1; 2; 3$$

**Ответ:**  $-\pi/12; -5\pi/12; \pi/4; 7\pi/12; 11\pi/12$

# Различные способы отбора корней

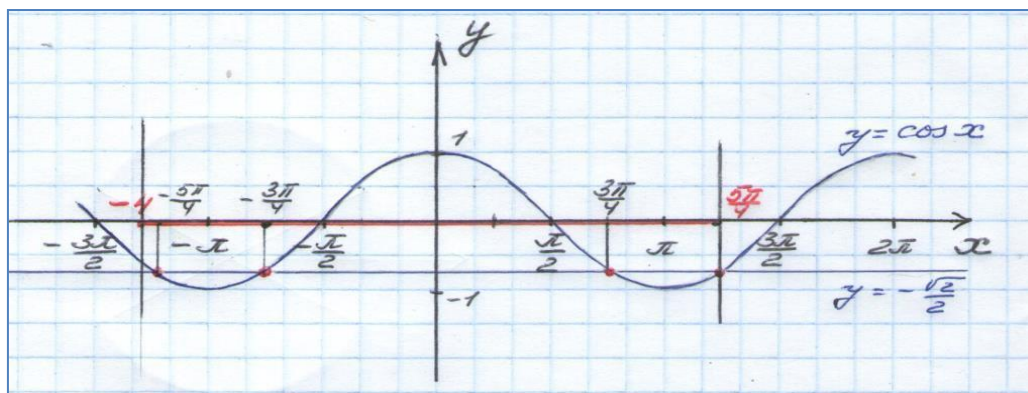
Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку  
(с помощью графика)

$$\cos x = -\sqrt{2}/2, x \in [-4; 5\pi/4]$$

$$x = \pm \arccos(-\sqrt{2}/2) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни с помощью графика:



$$x = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4; x = -\pi - \pi/4 = -5\pi/4$$

**Ответ:  $\pm 5\pi/4; \pm 3\pi/4$**

# 1. Решить уравнение $7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x}$ и указать его корни на отрезке $[\pi; 5\pi/2]$

Решим уравнение:

$$7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x},$$

$$7^{2\cos x} = 7^{2\sin 2x},$$

$$2\cos x = 2\sin 2x,$$

$$\cos x - 2\sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x (1 - 2\sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0,$$

$$x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

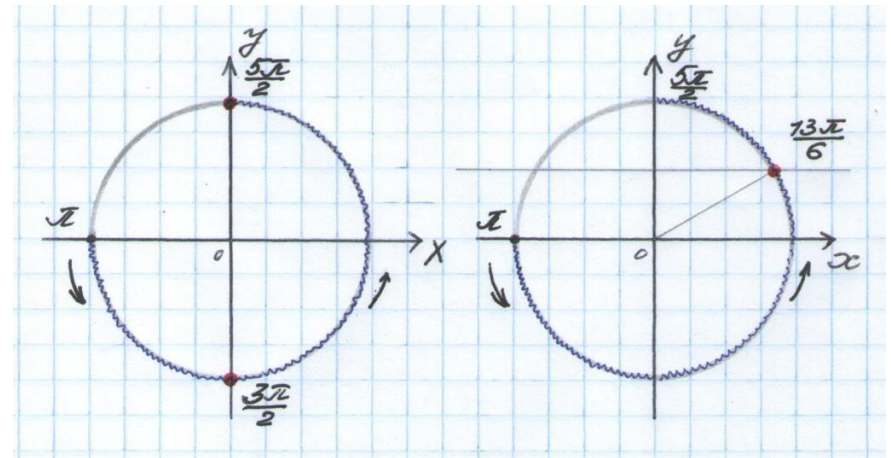
или

$$1 - 2\sin x = 0,$$

$$\sin x = 1/2,$$

$$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Проведём отбор корней с помощью тригонометрической окружности:



$$x = 2\pi + \pi/6 = 13\pi/6$$

**Ответ:**

**а)  $\pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, (-1)^n \pi/6 + \pi n,$   
 $n \in \mathbb{Z}$**

**б)  $3\pi/2; 5\pi/2; 13\pi/6$**

**2. Решить уравнение  $4\cos^2 x + 8 \cos (x - 3\pi/2) + 1 = 0$   
Найти его корни на отрезке  $[3\pi; 9\pi/2]$**

$$4\cos^2 x + 8 \cos (x - 3\pi/2) + 1 = 0$$

$$4\cos^2 x + 8 \cos (3\pi/2 - x) + 1 = 0,$$

$$4\cos^2 x - 8 \sin x + 1 = 0,$$

$$4 - 4\sin^2 x - 8 \sin x + 1 = 0,$$

$$4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0,$$

$$D/4 = 16 + 20 = 36,$$

$$\sin x = -2,5$$

$\emptyset$

*или*

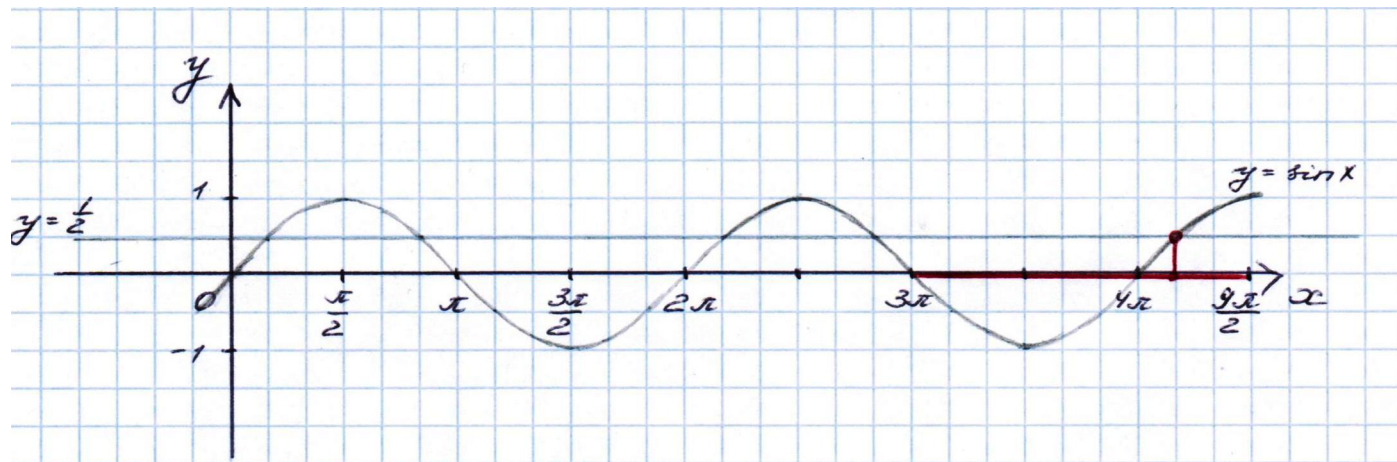
$$\sin x = 1/2$$

$$x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Проведем отбор корней на отрезке  $[3\pi; 9\pi/2]$   
(с помощью графиков)

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Построим графики функций  $y = \sin x$  и  $y = \frac{1}{2}$



$$x = 4\pi + \pi/6 = 25\pi/6$$

Ответ: а)  $(-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $25\pi/6$

### 3. Решить уравнение $4 - \cos^2 2x = 3 \sin^2 2x + 2 \sin 4x$

Найти его корни на отрезке  $[0; 1]$

$$4 - \cos^2 2x = 3 \sin^2 2x + 2 \sin 4x$$

$$4 (\sin^2 2x + \cos^2 2x) - \cos^2 2x = 3 \sin^2 2x + 4 \sin 2x \cos 2x,$$

$$\sin^2 2x + 3 \cos^2 2x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0$$

Если  $\cos^2 2x = 0$ , то  $\sin^2 2x = 0$ , что невозможно, поэтому  $\cos^2 2x \neq 0$  и обе части уравнения можно разделить на  $\cos^2 2x$ .

$$\operatorname{tg}^2 2x + 3 - 4 \operatorname{tg} 2x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 2x - 4 \operatorname{tg} 2x + 3 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1,$$

$$2x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{x = \pi/8 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}}$$

или

$$\operatorname{tg} 2x = 3,$$

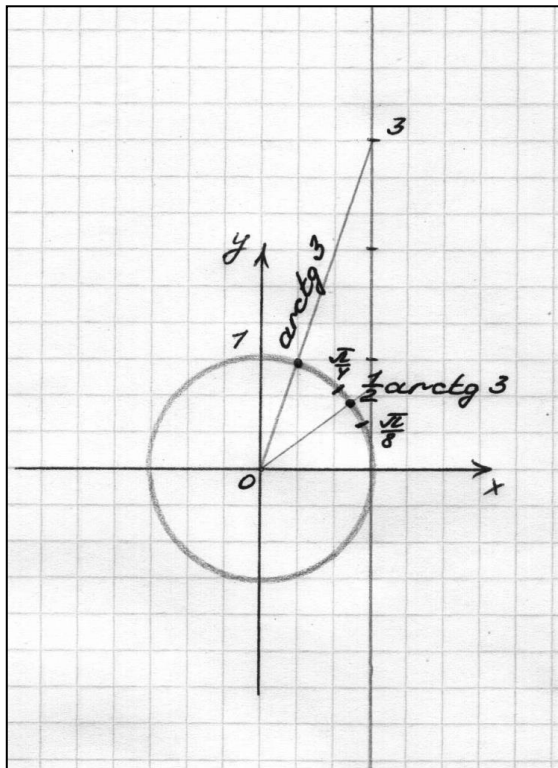
$$2x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{x = 1/2 \operatorname{arctg} 3 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}}$$

Проведём отбор корней на отрезке  $[0; 1]$

$$4 - \cos^2 2x = 3 \sin^2 2x + 2 \sin 4x$$

$$x = \pi/8 + \pi n/2, n \in \mathbf{Z} \text{ или } x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \pi k/2, k \in \mathbf{Z}$$



Так как  $0 < \operatorname{arctg} 3 < \pi/2$ ,  
 $0 < \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 < \pi/4$ , то  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$   
является решением

Так как  $0 < \pi/8 < \pi/4 < 1$ , значит  $\pi/8$   
также является решением

Другие решения не попадут в  
промежуток  $[0; 1]$ , так как они  
получаются из чисел  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$  и  $\pi/8$   
прибавлением чисел, кратных  $\pi/2$ .

**Ответ:** а)  $\pi/8 + \pi n/2, n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \pi k/2, k \in \mathbf{Z}$

б)  $\pi/8; \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3$

## 4. Решить уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$ Найти его корни на отрезке $[2\pi; 7\pi/2]$

Решим уравнение:

$$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$$

$$\text{ОДЗ: } \cos x - \sin 2x + 25 > 0,$$

$$\cos x - \sin 2x + 25 = 25, \quad 25 > 0,$$

$$\cos x - 2\sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x (1 - 2\sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0,$$

$$\mathbf{x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

*или*

$$1 - 2\sin x = 0,$$

$$\sin x = 1/2$$

$$\mathbf{x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}}$$



# Проведём отбор корней на отрезке

Проведём отбор корней на отрезке  $[2\pi; 7\pi/2]$ :

1)  $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$2\pi \leq \pi/2 + \pi n \leq 7\pi/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \leq 1/2 + n \leq 7/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 - 1/2 \leq n \leq 7/2 - 1/2, n \in \mathbb{Z}$$

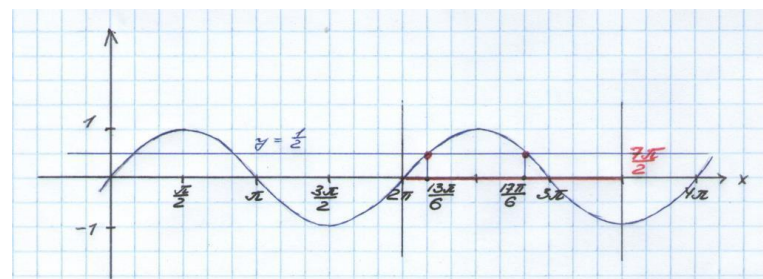
$$1,5 \leq n \leq 3, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2; 3$$

$$x = \pi/2 + 2\pi = 5\pi/2$$

$$x = \pi/2 + 3\pi = 7\pi/2$$

2)  $\sin x = 1/2$



$$x = 2\pi + \pi/6 = 13\pi/6$$

$$x = 3\pi - \pi/6 = 17\pi/6$$

Ответ: а)  $\pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$  ;  $(-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  $13\pi/6$  ;  $5\pi/2$  ;  $7\pi/2$  ;  $17\pi/6$

## 5. Решить уравнение $1/\sin^2 x + 1/\sin x = 2$ Найти его корни на отрезке $[-5\pi/2; -3\pi/2]$

Решим уравнение:

$$1/\sin^2 x + 1/\sin x = 2$$

$$x \neq \pi k$$

Замена  $1/\sin x = t$ ,

$$t^2 + t = 2,$$

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

$$t_1 = -2, t_2 = 1$$

$$1/\sin x = -2,$$

$$\sin x = -1/2,$$

$$x = -\pi/6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1/\sin x = 1,$$

$$\sin x = 1,$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или

$$x = -5\pi/6 + 2\pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$   
*Исключается эта серия корней, т.к.  $-150^\circ + 360^\circ n$  выходит за пределы заданного промежутка  $[-450^\circ; -270^\circ]$*

# Продолжим отбор корней на отрезке

Рассмотрим остальные серии корней и проведём отбор корней на отрезке  $[-5\pi/2; -3\pi/2]$  ( $[-450^\circ; -270^\circ]$ ):

1)  $x = -\pi/6 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$-5\pi/2 \leq -\pi/6 + 2\pi n \leq -3\pi/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5/2 \leq -1/6 + 2n \leq -3/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5/2 + 1/6 \leq 2n \leq -3/2 + 1/6,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$-7/3 \leq 2n \leq -4/3, n \in \mathbb{Z}$$

$$-7/6 \leq n \leq -2/3, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -1$$

$$x = -\pi/6 - 2\pi = -13\pi/6 \quad (-390^\circ)$$

2)  $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$-5\pi/2 \leq \pi/2 + 2\pi n \leq -3\pi/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5/2 \leq 1/2 + 2n \leq -3/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5/2 - 1/2 \leq 2n \leq -3/2 - 1/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-3 \leq 2n \leq -2, n \in \mathbb{Z}$$

$$-1,5 \leq n \leq -1, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -1$$

$$x = \pi/2 - 2\pi = -3\pi/2 \quad (-270^\circ)$$

**Ответ:** а)  $\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  ;  $(-1)^{k+1} \pi/6 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  $-13\pi/6$  ;  $-3\pi/2$

## 6. Решить уравнение $|\sin x|/\sin x + 2 = 2\cos x$ Найти его корни на отрезке $[-1; 8]$

Решим уравнение

$$|\sin x|/\sin x + 2 = 2\cos x$$

1) Если  $\sin x > 0$ , то  $|\sin x| = \sin x$

Уравнение примет вид:

$$2\cos x = 3,$$

$$\cos x = 1,5 \text{ – не имеет корней}$$

2) Если  $\sin x < 0$ , то  $|\sin x| = -\sin x$

и уравнение примет вид

$$2\cos x = 1, \cos x = 1/2,$$

$$x = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что  $\sin x < 0$ , то  
остается одна серия ответа

$$x = -\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Произведём отбор корней на  
отрезке  $[-1; 8]$

$k=0, x = -\pi/3, -\pi < -3, -\pi/3 < -1,$   
 $-\pi/3$  не принадлежит данному отрезку

$$k=1, x = -\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3 < 8,$$

$$5\pi/3 \in [-1; 8]$$

$$k=2, x = -\pi/3 + 4\pi = 11\pi/3 > 8,$$

$11\pi/3$  не принадлежит данному  
отрезку.

Ответ: а)  $-\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  $5\pi/3$

**7. Решить уравнение  $4\sin^3 x = 3\cos(x - \pi/2)$   
Найти его корни на промежутке  $[7\pi/2; 9\pi/2)$**

Решим уравнение

$$4\sin^3 x = 3\cos(x - \pi/2)$$

$$4\sin^3 x = 3\cos(\pi/2 - x),$$

$$4\sin^3 x - 3\cos(\pi/2 - x) = 0,$$

$$4\sin^3 x - 3\sin x = 0,$$

$$\sin x (4\sin^2 x - 3) = 0,$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

*или*  $4\sin^2 x - 3 = 0,$

$$\sin x = \sqrt{3}/2; \sin x = -\sqrt{3}/2$$

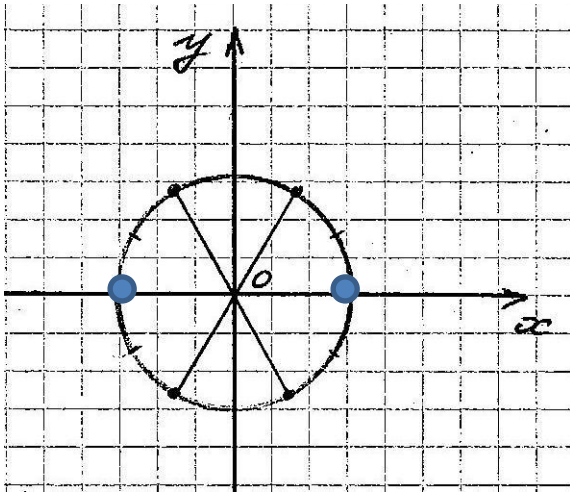
$$\sin x = \sqrt{3}/2,$$

$$x = (-1)^k \pi/3 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = -\sqrt{3}/2,$$

$$x = (-1)^{k+1} \pi/3 + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Объединим решения ( см. рисунок)



или  $x = \pi m/3, m \in \mathbb{Z}$

Уравнение можно решить короче, зная формулу

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x:$$

$$4\sin^3 x - 3\sin x = 0,$$

$$3\sin x - 4\sin^3 x = 0,$$

$$\sin 3x = 0, \mathbf{x = \pi m/3, m \in \mathbb{Z}}$$

Проведём отбор корней на промежутке  $[7\pi/2; 9\pi/2)$

$$x = \pi m/3, m \in \mathbb{Z}.$$

$$7\pi/2 \leq \pi m/3 < 9\pi/2,$$

$$21/2 \leq m < 27/2, m \in \mathbb{Z},$$

$$10,5 \leq m < 13,5, m \in \mathbb{Z},$$

$$m = 10; 11; 12,$$

$$x = 10\pi/3, x = 11\pi/3, x = 12\pi/3$$

Ответ : а)  $\pi m/3, m \in \mathbb{Z};$

б)  $10\pi/3; 11\pi/3; 12\pi/3$

## 8. Решить уравнение $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x$ Найти его корни на промежутке $[5\pi/2; 4\pi]$

Решим уравнение  $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x$ .

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 1 - \sin^2 x = \sin^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 2\sin^2 x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x = \sqrt{2}/2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x = -\sqrt{2}/2; \end{cases} \quad \sin x = \sqrt{2}/2$$

$$\sin x = \sqrt{2}/2$$

$$x = (-1)^k \pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

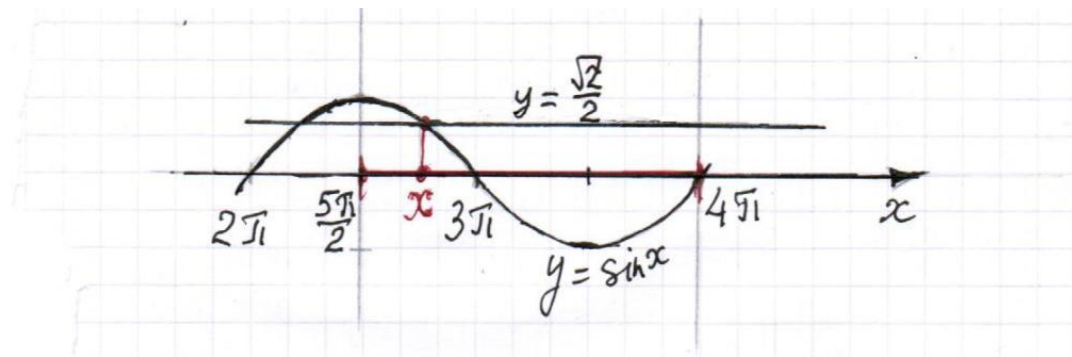


Проведём отбор корней на отрезке  
 $[5\pi/2; 4\pi]$

$$x = (-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sqrt{2}/2$$

$$y = \sin x \text{ и } y = \sqrt{2}/2$$



$$5\pi/2 + \pi/4 = 11\pi/4$$

Ответ: а)  $(-1)^k \pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  ; б)  $11\pi/4$

## 9. Решить уравнение $(\sin 2x + 2 \sin^2 x) / \sqrt{-\cos x} = 0$ Найти его корни на промежутке $[-5\pi; -7\pi/2]$

Решим уравнение

$$(\sin 2x + 2 \sin^2 x) / \sqrt{-\cos x} = 0.$$

1) ОДЗ :  $\cos x < 0$ ,

$$\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2)  $\sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$ ,

$$2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x (\cos x + \sin x) = 0,$$

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

*или*

$$\cos x + \sin x = 0 \quad | : \cos x,$$

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

С учётом ОДЗ

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

# Отберём корни на заданном отрезке

Отберём корни на заданном отрезке  $[-5\pi; -7\pi/2]$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-5\pi \leq \pi + 2\pi n \leq -7\pi/2,$$

$$-5 - 1 \leq 2n \leq -7/2 - 1,$$

$$-3 \leq n \leq -9/4, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = -3, x = \pi - 6\pi = -5\pi$$

$$x = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5\pi \leq 3\pi/4 + 2\pi n \leq -7\pi/2$$

$-23/8 \leq n \leq -17/8$ , нет такого целого  $n$ .

Ответ: а)  $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  ;

$3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  ;

б)  $-5\pi$ .

**10. Решить уравнение  $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$   
Найти его корни на промежутке  $[\pi/2; 3\pi/2]$**

Решим уравнение

$$2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$$

$$2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1,$$

$$4 \sin x \cdot \cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0,$$

$$4\cos x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0,$$

$$(\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0,$$

$$\sin x - 1 = 0, \sin x = 1, \mathbf{x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

*или*

$$4\cos x + 1 = 0, \cos x = -0,25$$

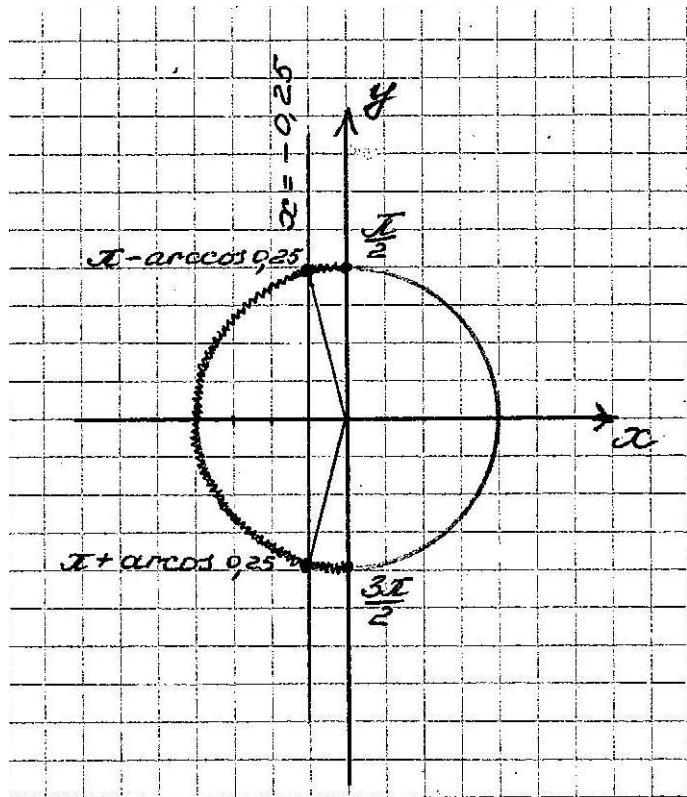
$$\mathbf{x = \pm (\pi - \arccos(0,25)) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

Запишем корни этого уравнения иначе

$$\mathbf{x = \pi - \arccos(0,25) + 2\pi n,}$$

$$\mathbf{x = -(\pi - \arccos(0,25)) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

# Отберём корни с помощью окружности



$$x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi/2;$$

$$x = \pi - \arccos(0,25) + 2\pi n,$$

$$x = -(\pi - \arccos(0,25)) + 2\pi n, \\ n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pi - \arccos(0,25),$$

$$x = \pi + \arccos(0,25)$$

$$\text{Ответ: а) } \pi/2 + 2\pi n,$$

$$\pi - \arccos(0,25) + 2\pi n,$$

$$-(\pi - \arccos(0,25)) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \pi/2;$$

$$\pi - \arccos(0,25); \pi + \arccos(0,25)$$