

Линейная алгебра

- Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим задачу решения системы линейных уравнений размерностью $(m \times n)$. Запишем систему в матричном виде: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Если закрепить раз и навсегда нумерацию неизвестных, то можно опустить неизвестные в записи системы и записать ее в виде матрицы, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

$$\boxtimes B = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Расширенная матрица системы

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Следующие действия над расширенной матрицей системы называются *элементарными преобразованиями*.

- Умножение или деление элементов строк на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух строк
- Прибавление к элементам строки элементов другой строки, умноженных на произвольный множитель.

Конечной целью элементарных преобразований является получение верхнетреугольной матрицы, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю. Преобразования стараются производить так, чтобы на главной диагонали появлялись единицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы. Ко второй строке прибавим третью строку, умноженную на (-5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \times (-2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} + \text{I} \times (-2) \\ \text{III} + \text{I} \times (-3) \end{array}$$

К первой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{III} - \text{II} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} + \text{III} \times (-5) \\ \\ \end{array}$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на (-3). Ко третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-3).

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \text{II} \times 4} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \times (-1) \\ \text{III} : 5 \end{array}$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на 4

Вторую строку умножим на (-1) и третью строку разделим на 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - 8y + 6z = -9 \\ y - 2z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 8y - 6z \\ y = 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 16 - 6 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1$$