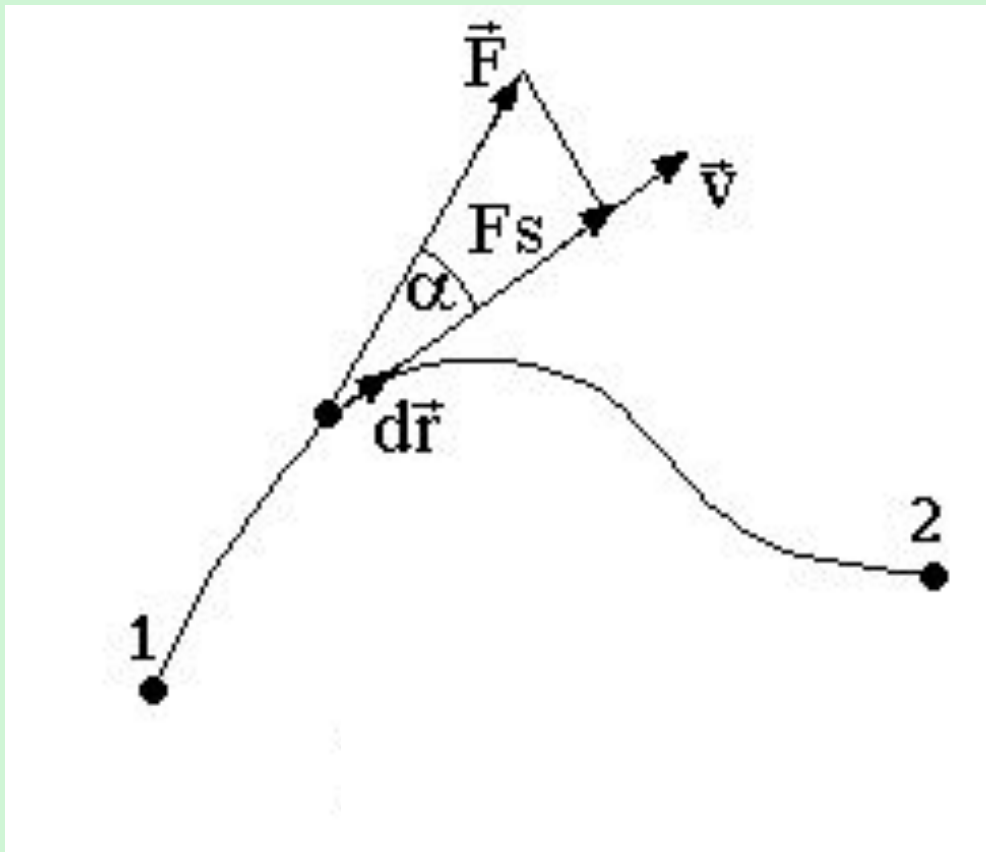


Сегодня: \*

# Лекция 6

## ***Работа и энергия***

# Работа. Мощность. Энергия.



Пусть тело под действием силы  $\mathbf{F}$  совершает перемещение по некоторой траектории 1-2. В общем случае сила в процессе движения тела может меняться как по модулю, так и по направлению.

Рассмотрим элементарное перемещение, в пределах которого силу  $\vec{F}$  можно считать постоянной.

*Элементарной работой силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется скалярная величина.*

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha \cdot dS = F_S dS$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ ,

$dS = |d\vec{r}|$  - элементарный путь,

$F_S$  - проекция вектора  $\vec{F}$  на вектор  $d\vec{r}$

Суммируя (интегрируя) выражение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha \cdot dS = F_S dS$$

по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы  $F$  на данном пути:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_S dS$$

Если сила имеет постоянные величину и направление, то вектор  $\vec{F}$  в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула

$$A = F_S \int_1^2 dS = F_S \cdot S = F \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Если сила и направление перемещения образуют острый угол ( $\cos \alpha > 0$ ), работа *положительна*. Если угол  $\alpha$  - тупой ( $\cos \alpha < 0$ ), работа *отрицательна*. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  работа равна 0.

Единица работы – джоуль (Дж). 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж=1Н·1м ).

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью.

**Мощность** – это работа, совершаемая силой за единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Если за время  $dt$  сила  $F$  совершает работу  $\vec{F}d\vec{r}$ , то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени есть

$$N = \vec{F}d\vec{r} / dt$$

Учитывая, что  $\frac{dr}{dt}$ , получим

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Таким образом, мощность, развиваемая силой  $\vec{F}$  равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы.



Мощность – скалярная величина. Единица мощности – ватт (Вт):

1 Вт – мощность при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт=1 Дж/с).

Существуют различные формы движения материи – механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое).

Универсальной мерой различных форм движения является *энергия*. Во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

В механике различают два вида энергии – *кинетическую* и *потенциальную*.

*Кинетическая энергия* – это механическая энергия движущегося тела.

Пусть частица массы  $m$  движется под действием некоторой силы  $F$ . Найдем элементарную работу этой силы на перемещении  $dr$

$$dA = F dr = m a dr = m \frac{dv}{dt} dr = m v dv$$

Таким образом,

$$dA = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

То есть работа силы идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках).

Эту величину называют *кинетической энергией*.

Таким образом, кинетическая энергия это механическая энергия, которой обладает тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ .

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

При конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа силы идет на приращение кинетической энергии:

$$A_{12} = E_{K2} - E_{K1}$$

Если  $A_{12} > 0$ , то  $E_{K2} > E_{K1}$ , кинетическая энергия частицы увеличивается; если же  $A_{12} < 0$ , кинетическая энергия уменьшается.

*Потенциальная энергия* – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие между телами осуществляется с помощью силовых полей (например, поле гравитационных сил, поле упругих сил), которые обладают следующим свойством: *работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от траектории тела, а зависит только от начального и конечного положения тела.*

Такие силы называются **консервативными**. Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории тела, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

Тело, находящееся в поле консервативных сил, обладает потенциальной энергией  $E_{\text{П}}$ . Работа консервативной силы определяется разностью потенциальной энергии тела в начальной и конечной точках пути. При элементарном перемещении работа равна приращению потенциальной энергии.

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = -dE_{\text{П}}$$

Знак (-) говорит о том, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии.



# Работа консервативных сил на конечном участке пути 1 – 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -(E_{\text{п}2} - E_{\text{п}1}) = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}$$

Потенциальная энергия – функция, которая определяется с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно, ибо во все формулы входит только разность значений  $E_{\text{п}}$  в двух положениях частицы. Поэтому выбирают нулевой уровень отсчета энергии, т.е. потенциальную энергию тела в каком – то определенном положении считают равной нулю. Энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Конкретный вид функции  $E_{\Pi}$  зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массы  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, равна работе силы тяжести при падении тела на Землю, т.е.

$$E_{\Pi} = mgh$$

Здесь за нуль принята потенциальная энергия тела, лежащего на Земле.

Потенциальной энергией может обладать не только система тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело – пружина. В этом случае потенциальная энергия зависит от степени сжатия пружины, т.е. от взаимного расположения витков пружины.

Когда пружина деформирована, в ней возникает сила упругости

$$F = -kx$$

(закон Гука), где  $x$  – величина сжатия или растяжения пружины,  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила упругости совершает работу

$$A = \int_x^0 F dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2} kx^2$$

Если потенциальную энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx^2$$

## Полная механическая энергия системы

$$E = E_{\text{К}} + E_{\text{П}},$$

т.е. равна сумме *кинетической* и *потенциальной* энергий

# Связь между потенциальной энергией и силой.

Потенциальная энергия тела зависит от его координат:  $E_{\text{П}} = E_{\text{П}}(x, y, z)$ .

Зная вид этой функции, можно найти силу, действующую на тело.

Установим связь между потенциальной энергией и силой.

Рассмотрим перемещение тела под действием силы  $F$ . Разложим силу на три составляющие вдоль координатных осей и рассмотрим работу каждой составляющей силы.

Итак, работа по перемещению тела в направлении оси  $x$  на пути  $dx$ :

$$dA = F_x dx$$

Эту работу можно представить как убыль потенциальной энергии:

$$dA = -dE_{\Pi}$$

Из сравнения последних выражений имеем:

$$F_x dx = -dE_{\Pi}$$

Отсюда

$$F_x = -\frac{dE_{\Pi}}{dx}$$

Здесь  $\frac{dE_{\Pi}}{dx}$  - производная функции  $E_{\Pi}(x, y, z)$ , вычисленная в предположении, что переменные  $y$  и  $z$  остаются неизменными, а изменяется лишь величина  $x$ .



Такие производные называются частными и обозначаются символом

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}$$

$$\text{Итак, } F_x = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}$$

Эти три формулы можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим их на единичные векторы координатных осей  $\overset{\vee}{i}, \overset{\vee}{j}, \overset{\vee}{k}$

$$\text{и сложим: } \overset{\vee}{F} = F_x \overset{\vee}{i} + F_y \overset{\vee}{j} + F_z \overset{\vee}{k}$$

Или 
$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_{\text{П}}}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называют градиентом функции  $E_{\text{П}}$  и обозначают

$$\text{grad } E_{\text{П}}$$

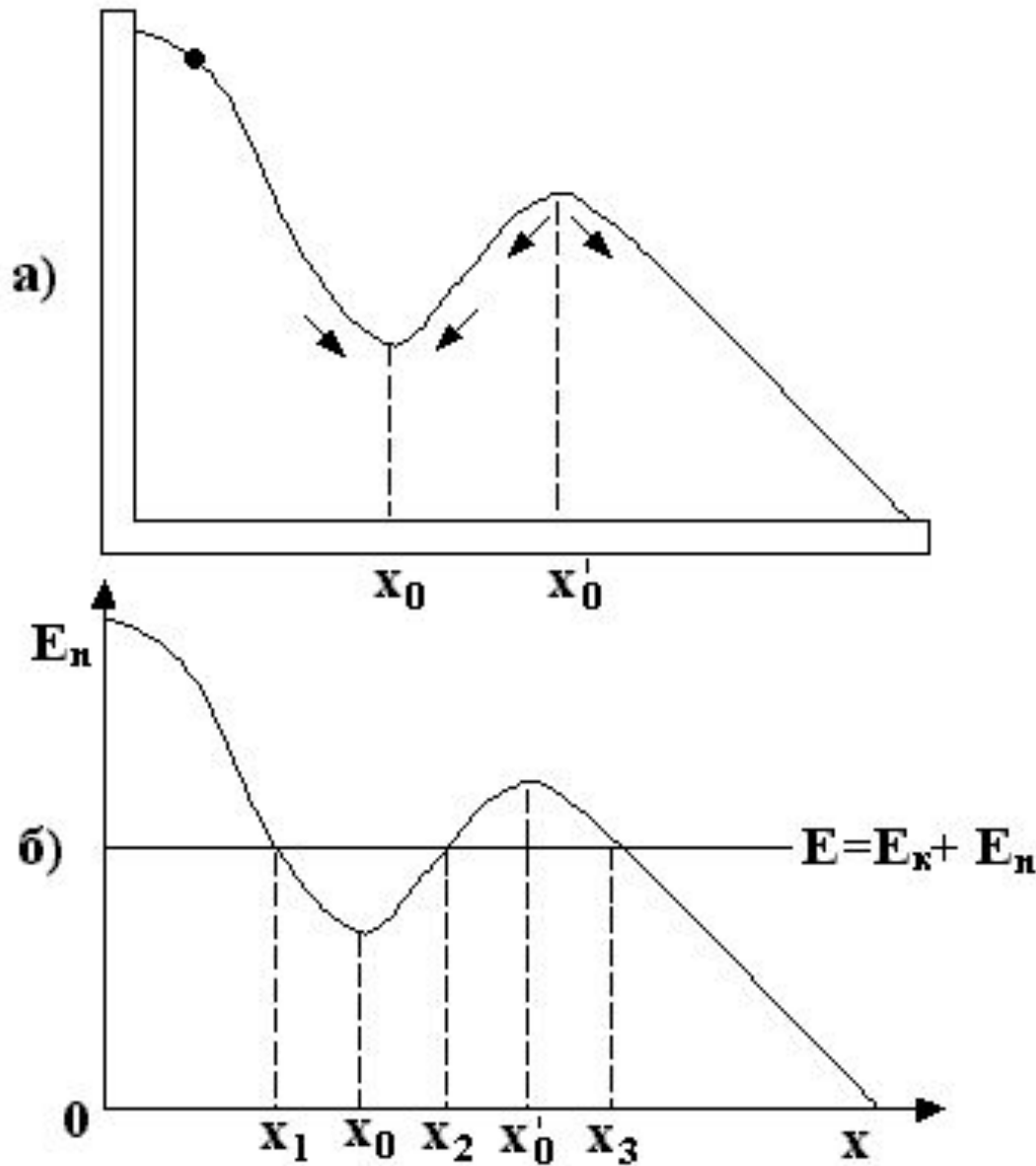
$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{П}}$$

Сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. Знак (-) означает, что сила всегда направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.

# Потенциальные кривые.

## Условия равновесия механической системы.

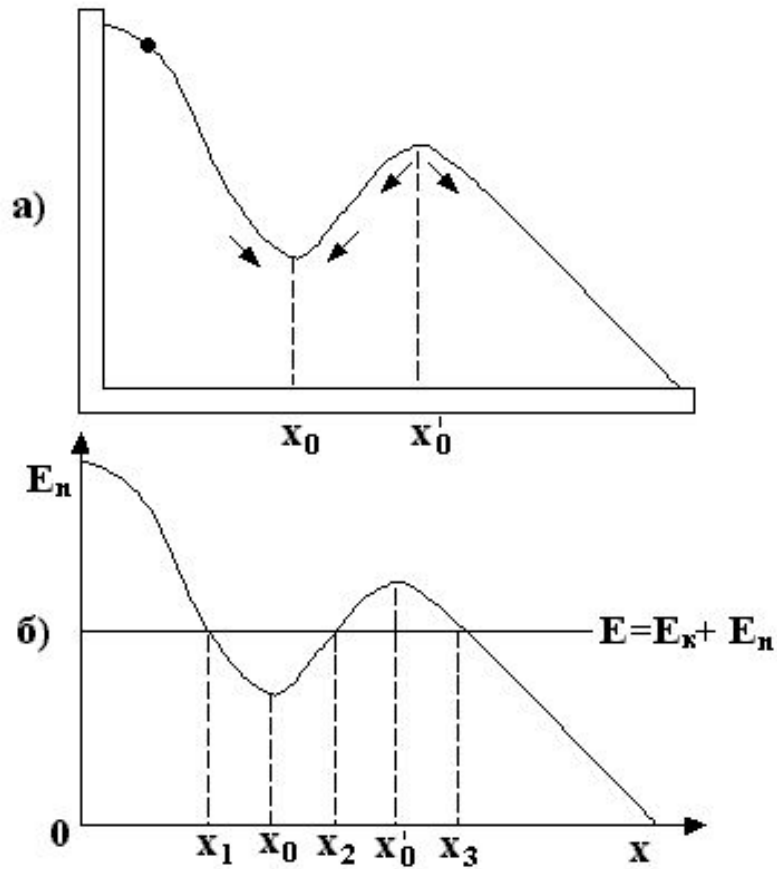
Рассмотрим материальную точку, положение которой может быть определено с помощью одной величины, например, координаты  $x$ , т.е. потенциальная энергия точки является функцией  $E_{\text{П}}(x)$ . Графическая зависимость потенциальной энергии от координаты  $x$  называется потенциальной кривой. Зная вид функции  $E_{\text{П}}(x)$ , можно сделать ряд заключений о характере движения частицы.



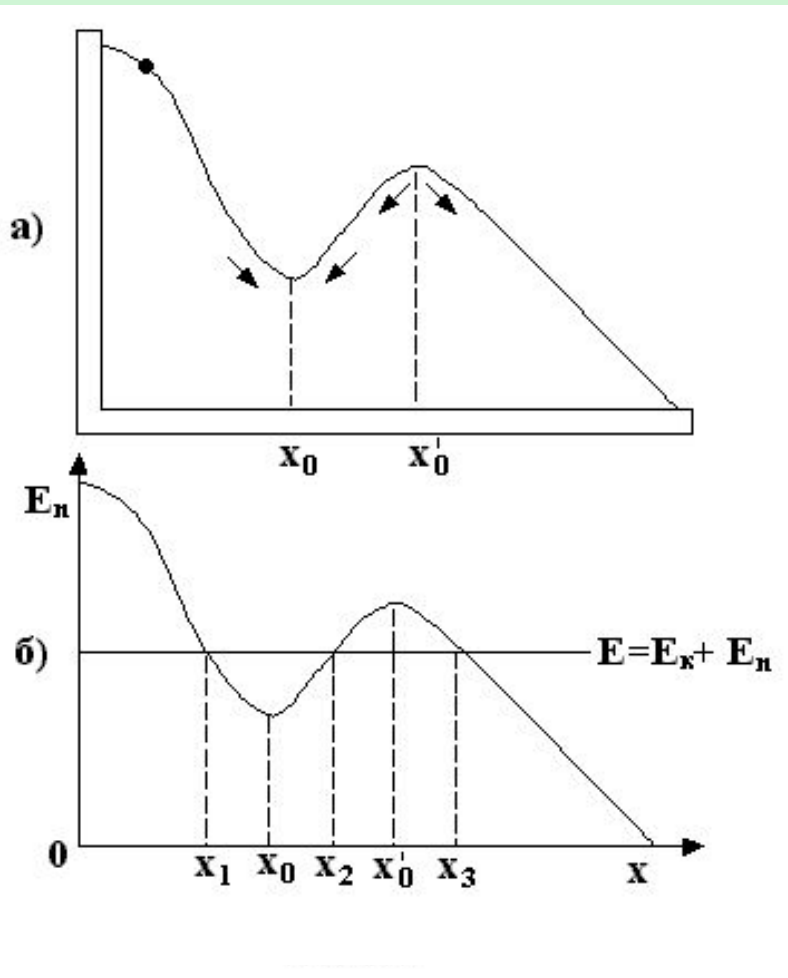
В качестве примера рассмотрим шарик, скользящий без трения по изогнутой в вертикальной плоскости проволоке.

На шарик действует консервативная сила – сила тяжести.

График потенциальной энергии  $E_{\Pi}(x)$  показан на рис. б.



Полная энергия шарика  $E$  изображена на графике горизонтальной линией, поскольку имеет место закон сохранения энергии  $E = E_k + E_{\text{п}}$ . Частица может находиться только там, где  $E_{\text{п}}(x) \leq E$ , т.е. в областях от  $x_1$  до  $x_2$  или от  $x_3$  до бесконечности.



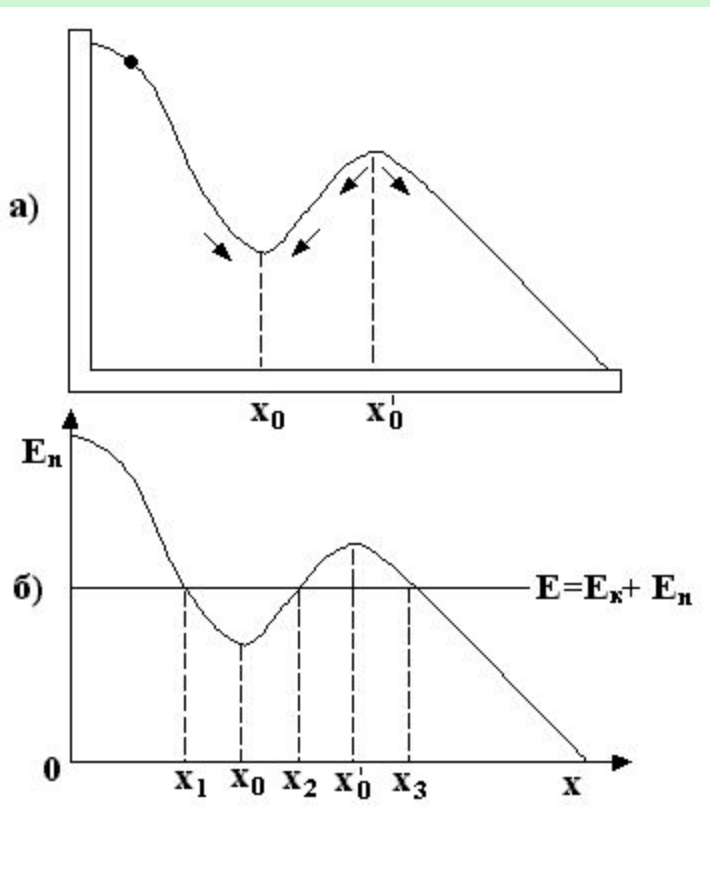
В области  $x < x_1$  и  $x_2 < x < x_3$  частица проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии.

Таким образом, область  $x_2 < x < x_3$  представляет собой **потенциальный барьер**, через который частица не может проникнуть при данном запасе полной энергии. Область  $x_1 < x < x_2$  называется **потенциальной ямой**.

Минимуму потенциальной энергии соответствует на графике точка с координатой  $x_0$ . Условие минимума потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{dE_{\Pi}}{dx} = 0$$

Поскольку действующая на частицу сила,  $F_x = -\frac{dE_{\Pi}}{dx}$  то в точке  $x_0$   $F_x = 0$ .



При смещении частицы из положения  $x_0$  она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение  $x_0$  является положением **устойчивого равновесия**.

*Итак, устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии частицы.*

В точке , соответствующей максимуму потенциальной  $\varphi_0$  энергии, выполняются эти же условия равновесия. Однако, это равновесие будет **неустойчивым**: при смещении частицы из положения возникает сила, которая будет удалять его из положения равновесия.

*Таким образом, неустойчивому равновесию соответствует максимум потенциальной энергии.*