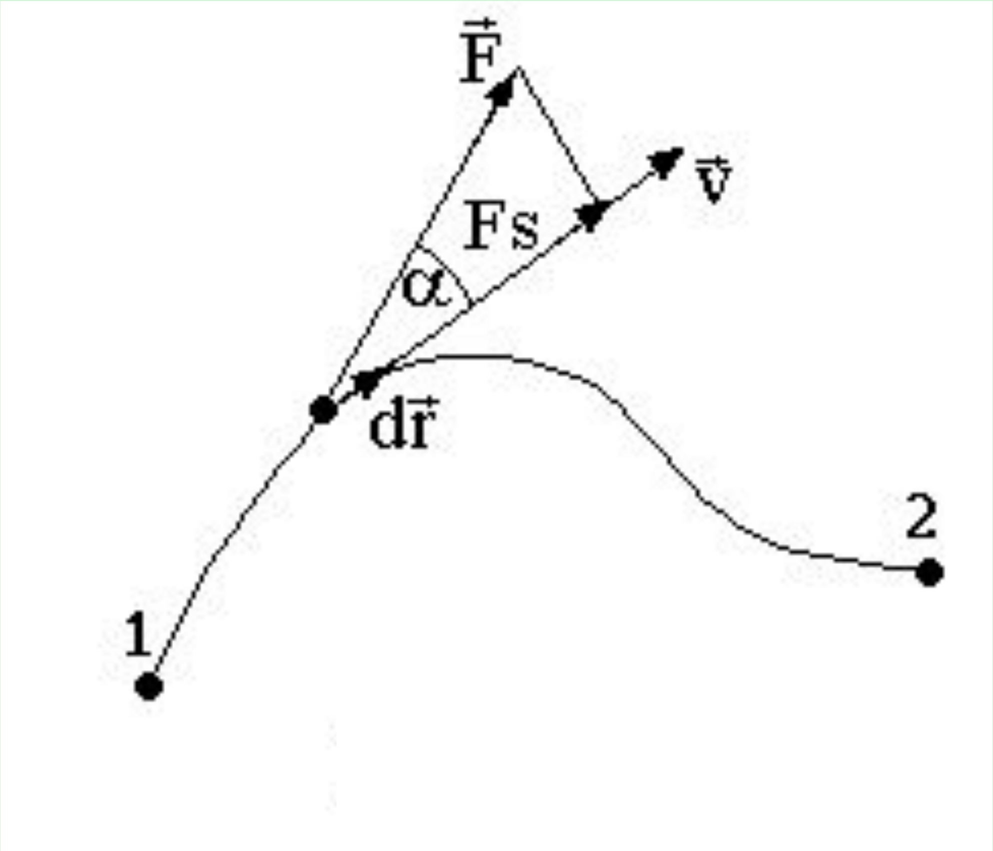
*Сегодня: **

Лекция 6

Работа и энергия

Работа. Мощность. Энергия.



Пусть тело под действием силы **F** совершает перемещение по некоторой траектории 1-2. В общем случае сила в процессе движения тела может меняться как по модулю, так и по направлению.

Рассмотрим элементарное перемещение, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS$$

где α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$,

$dS = |d\vec{r}|$ - элементарный путь,

F_S-проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Суммируя (интегрируя) выражение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS$$

по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем <u>работу силы</u> F на данном пути:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_S dS$$

Если сила имеет постоянные величину и направление, то вектор в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула

$$A = F_S \int_1^2 dS = F_S \cdot S = F \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа *положительна.* Если угол α - тупой ($\cos\alpha < 0$), работа *отрицательна.* При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ работа равна 0.

Единица работы – джоуль (Дж). 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1м (1 Дж=1Н·1м).

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью.

Мощность – это работа, совершаемая силой за единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Если за время dt сила F совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$, то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени есть

$$N = \vec{F}d\vec{r}/dt$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$, получим

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Таким образом, мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы.

Мощность – скалярная величина. Единица мощности – ватт (Вт):

1 Вт – мощность при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт=1 Дж/с).

Существуют различные формы движения материи – механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое).

Универсальной мерой различных форм движения является ***энергия***. Во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

В механике различают два вида энергии – ***кинетическую*** и ***потенциальную.***

Кинетическая энергия – это механическая энергия движущегося тела.

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы F. Найдем элементарную работу этой силы на перемещении $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}$$

Таким образом,

$$dA = m\upsilon d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$$

То есть работа силы идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках). Эту величину называют ***кинетической энергией***.

Таким образом, кинетическая энергия это механическая энергия, которой обладает тело массой m, движущееся со скоростью v.

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

При конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа силы идет на приращение кинетической энергии:

$$A_{12} = E_{K2} - E_{K1}$$

Если $A_{12} > 0$, то $E_{K2} > E_{K1}$, т.е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если же $A_{12} < 0$, то кинетическая энергия уменьшается.

Потенциальная энергия – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие между телами осуществляется с помощью силовых полей (например, поле гравитационных сил, поле упругих сил), которые обладают следующим свойством: *работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от траектории тела, а зависит только от начального и конечного положения тела*.

Такие силы называются ***консервативными.*** *Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории тела, то такая сила называется* ***диссипативной***; ее примером является сила трения.

Тело, находящееся в поле консервативных сил, обладает потенциальной энергией $E_П$. Работа консервативной силы определяется разностью потенциальной энергии тела в начальной и конечной точках пути. При элементарном перемещении работа равна приращению потенциальной энергии.

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dE_П$$

Знак (-) говорит о том, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии.

Работа консервативных сил на конечном участке пути 1 – 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\left(E_{П2} - E_{П1}\right) = E_{П1} - E_{П2}$$

Потенциальная энергия – функция, которая определяется с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно, ибо во все формулы входит только разность значений $E_П$ в двух положениях частицы. Поэтому выбирают нулевой уровень отсчета энергии, т.е. потенциальную энергию тела в каком – то определенном положении считают равной нулю. Энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Конкретный вид функции $E_П$ зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массы m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна работе силы тяжести при падении тела на Землю, т.е.

$$E_П = mgh$$

Здесь за нуль принята потенциальная энергия тела, лежащего на Земле.

Потенциальной энергией может обладать не только система тел, но и отдельно взятое упруго деформированное тело – пружина. В этом случае потенциальная энергия зависит от степени сжатия пружины, т.е. от взаимного расположения витков пружины.

Когда пружина деформирована, в ней возникает сила упругости

$$F = -kx$$

(закон Гука), где x – величина сжатия или растяжения пружины, k – коэффициент жесткости пружины.

При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила упругости совершает работу

$$A = \int_x^0 F dx = k\int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Если потенциальную энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$E_П = \frac{1}{2}kx^2$$

Полная механическая энергия системы

$$E=E_{К} + E_{П},$$

т.е. равна сумме ***кинетической*** и ***потенциальной*** энергий

Связь между потенциальной энергией и силой.

Потенциальная энергия тела зависит от его координат: $E_П = E_П (x, y, z)$.

Зная вид этой функции, можно найти силу, действующую на тело.

Установим связь между потенциальной энергией и силой.

Рассмотрим перемещение тела под действием силы F. Разложим силу на три составляющие вдоль координатных осей и рассмотрим работу каждой составляющей силы.

Итак, работа по перемещению тела в направлении оси x на пути dx:

$$dA = F_x dx$$

Эту работу можно представить как убыль потенциальной энергии:

$$dA = -dE_{П}$$

Из сравнения последних выражений имеем:

$$F_x dx = -dE_{П}$$

Отсюда

$$F_x = -\frac{dE_{П}}{dx}$$

Здесь $\frac{dE_{П}}{dx}$ - производная функции $E_{П}$ (x,y,z,), вычисленная в предположении, что переменные y и z остаются неизменными, а изменяется лишь величина x.

Такие производные называются частными и обозначаются символом

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}$$

Итак, $F_x = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}$ $\quad F_y = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}$

Эти три формулы можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим их на единичные векторы координатных осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

и сложим: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

Или $$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k} \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называют <u>градиентом функции</u> $E_П$ и обозначают

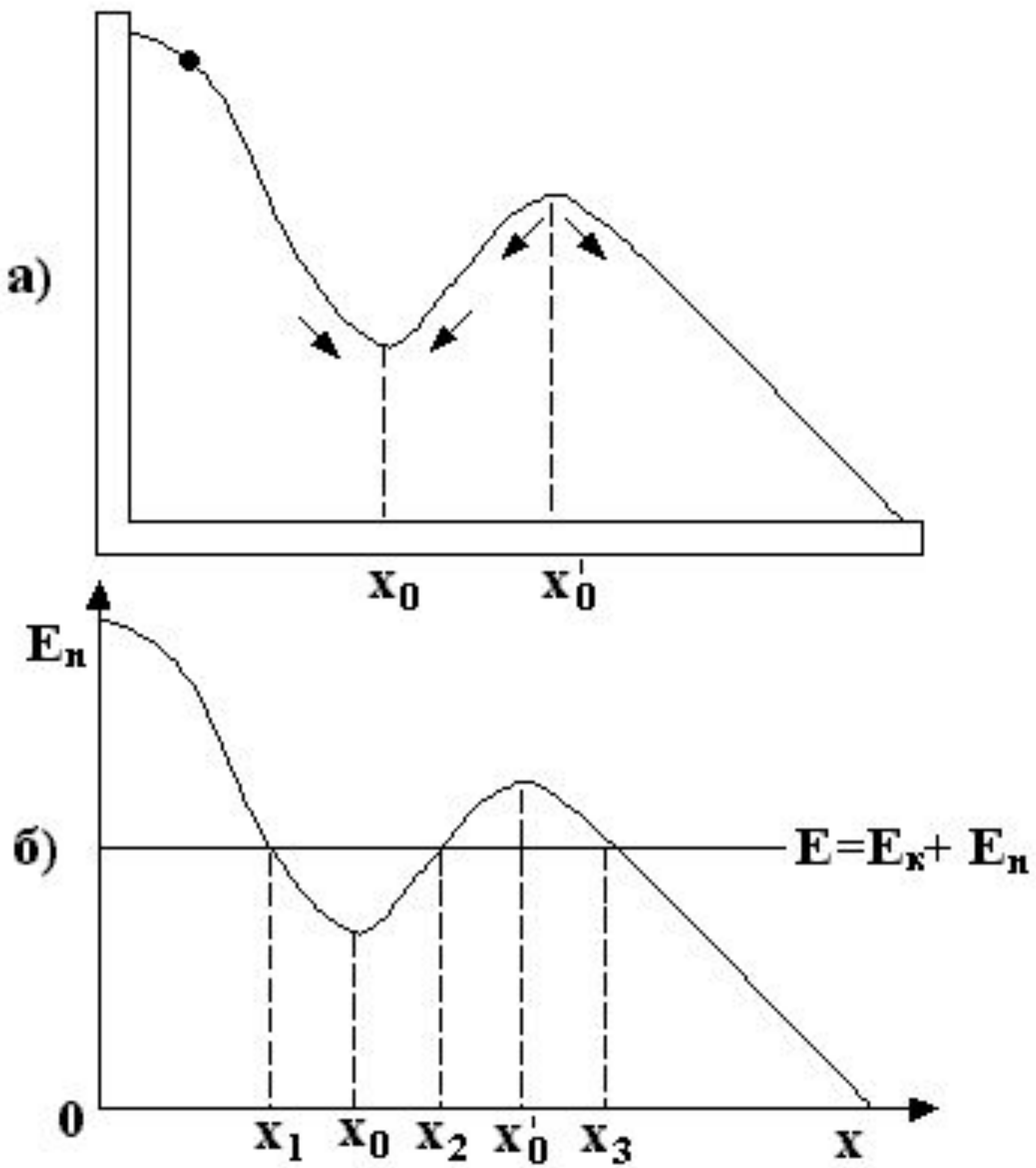
$$\operatorname{grad} E_П$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_П$$

Сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. Знак (-) означает, что сила всегда направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.

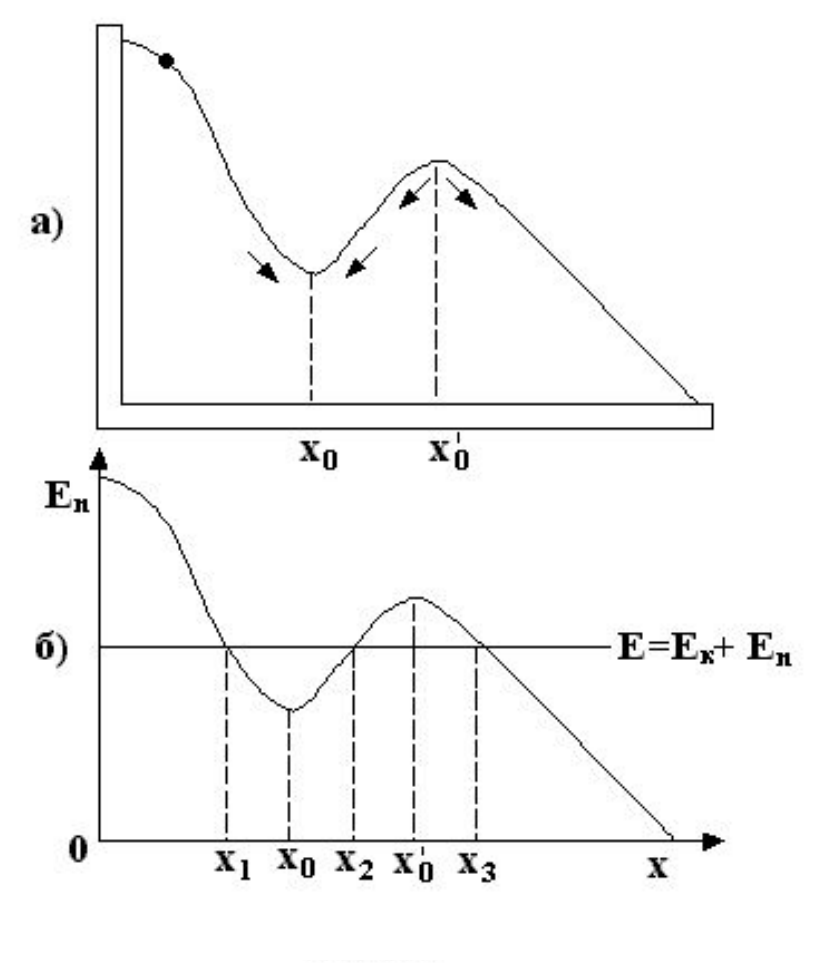
Потенциальные кривые.
Условия равновесия механической системы.

Рассмотрим материальную точку, положение которой может быть определено с помощью одной величины, например, координаты x, т.е. потенциальная энергия точки является функцией $E_П = E_П(x)$. Графическая зависимость потенциальной энергии от координаты x называется ***потенциальной кривой.*** Зная вид функции $E_П(x)$, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы.

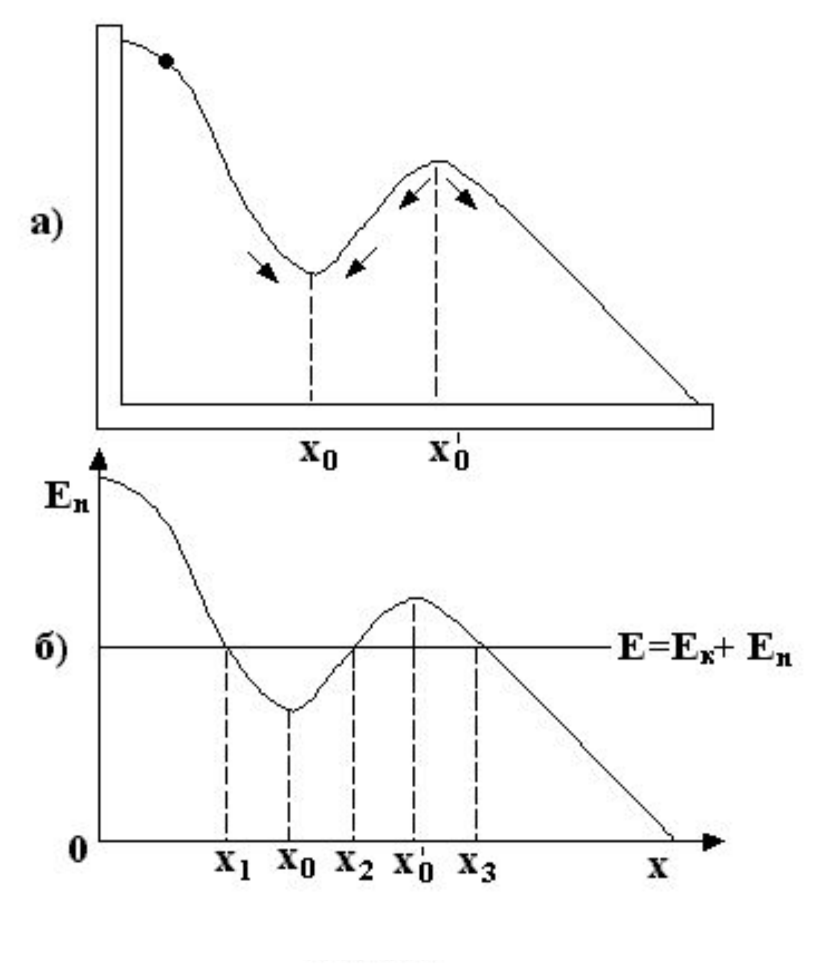


В качестве примера рассмотрим шарик, скользящий без трения по изогнутой в вертикальной плоскости проволоке.

На шарик действует консервативная сила – сила тяжести. График потенциальной энергии $E_П(x)$ показан на рис. б.

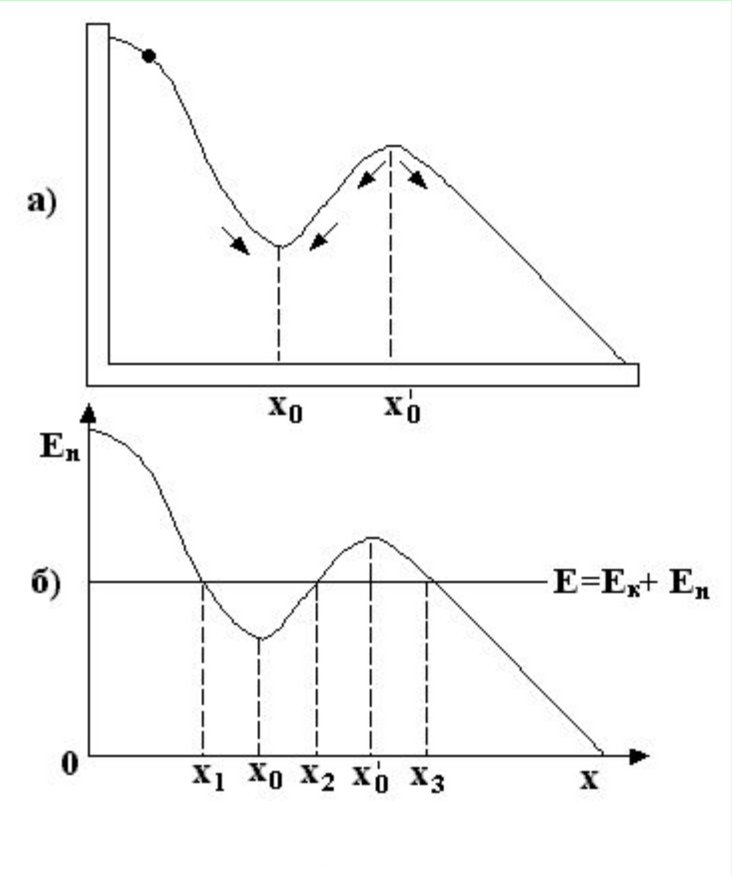


Полная энергия шарика Е изображена на графике горизонтальной линией, поскольку имеет место закон сохранения энергии $E=E_к+E_п$. Частица может находится только там, где $E_П(x) \le E$, т.е. в областях от x_1 до x_2 или от x_3 до бесконечности.



В области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ частица проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии.

Таким образом, область $x_2 < x < x_3$ представляет собой ***потенциальный барьер***, через который частица не может проникнуть при данном запасе полной энергии. Область $x_1 < x < x_2$ называется ***потенциальной ямой.***



Минимуму потенциальной энергии соответствует на графике точка с координатой x_0. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{dE_П}{dx} = 0$$

Поскольку действующая на частицу сила, $F_x = -\frac{dE_П}{dx}$ то в точке x_0 Fx =0.

При смещении частицы из положения x_0 она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_0 является положением ***устойчивого равновесия***.

Итак, устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии частицы.

В точке x_0', соответствующей максимуму потенциальной энергии, выполняются эти же условия равновесия. Однако, это равновесие будет ***неустойчивым:*** при смещении частицы из положения возникает сила, которая будет удалять его из положения равновесия.

Таким образом, неустойчивому равновесию соответствует максимум потенциальной энергии.