

Смілянська загальноосвітня школи I – III ступенів № 11
Смілянської міської ради Черкаської області

Паралельність прямих і площин у просторі

Геометрія, 10 клас
Профільний рівень

Учитель Русецька Т.В.

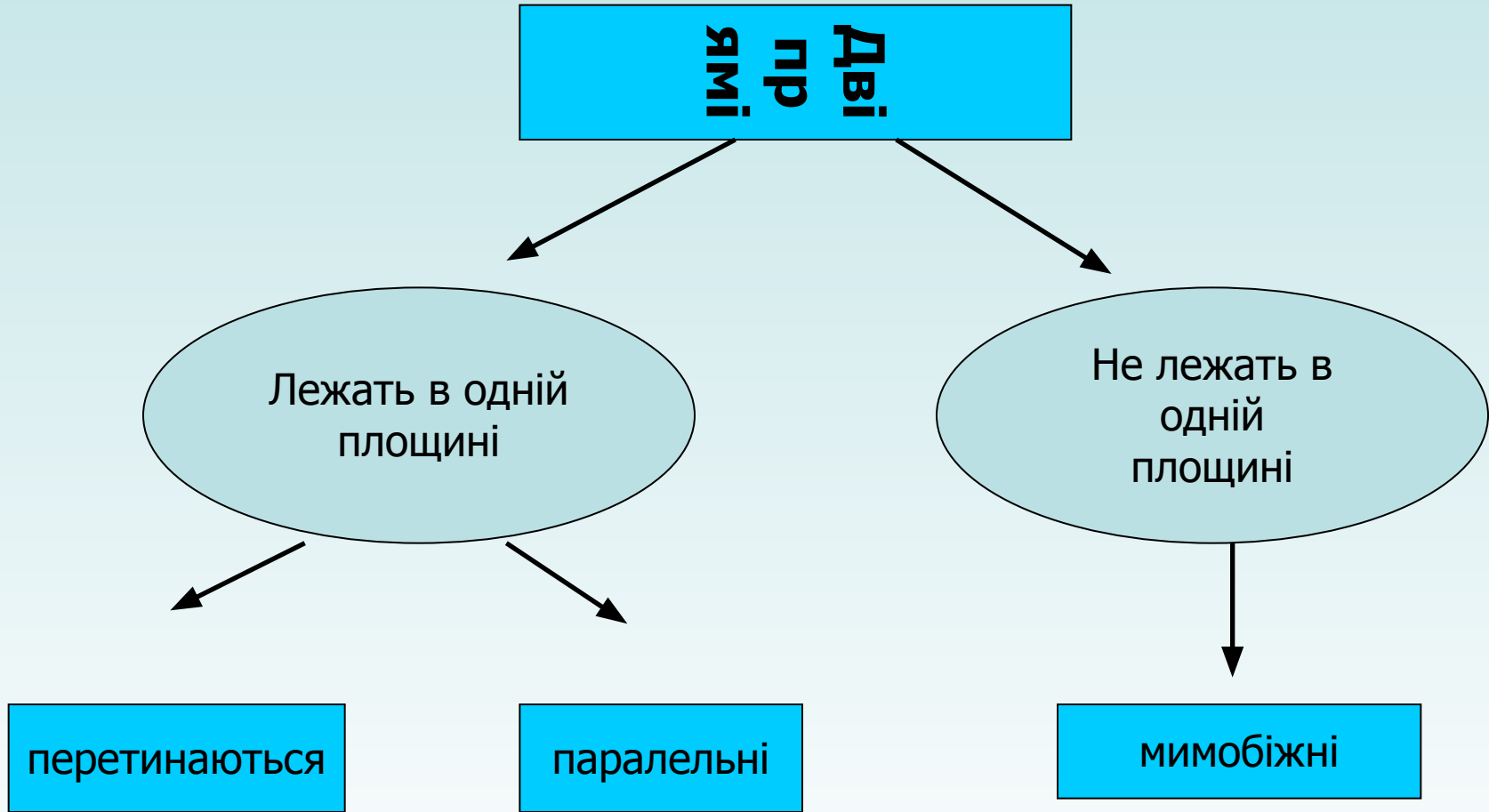
Основні теми розділу

- Мимобіжні та паралельні прямі
- Паралельність прямої та площини
- Паралельність площин
- Паралельне проектування та його властивості
- Зображення фігур у стереометрії
- Методи побудови перерізів многогранників

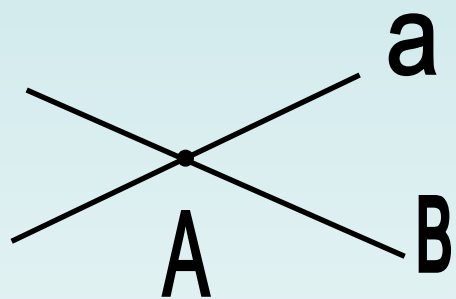
Мета: вчити

- Формулювати означення паралельних і мимобіжних прямих, паралельних прямої і площини, паралельних площин; ознаки паралельності прямих і площин; властивості паралельності прямих і площин.
- Класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі.
- Знаходити і зображати паралельні прямі, прямі та площини на малюнках, будувати зображення фігур.
- Розв'язувати задачі на застосування властивостей та ознак паралельності прямих і площин.
- Застосовувати метод слідів та проекцій для побудови перерізів многогранників.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

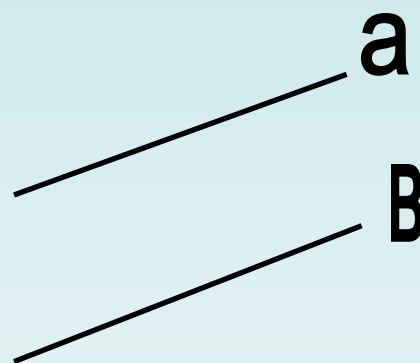


перетинаються



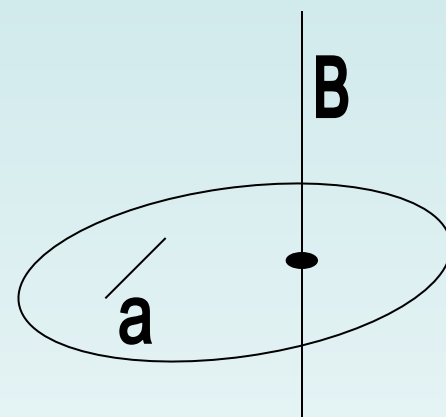
$$a \cap B = A$$

паралельні



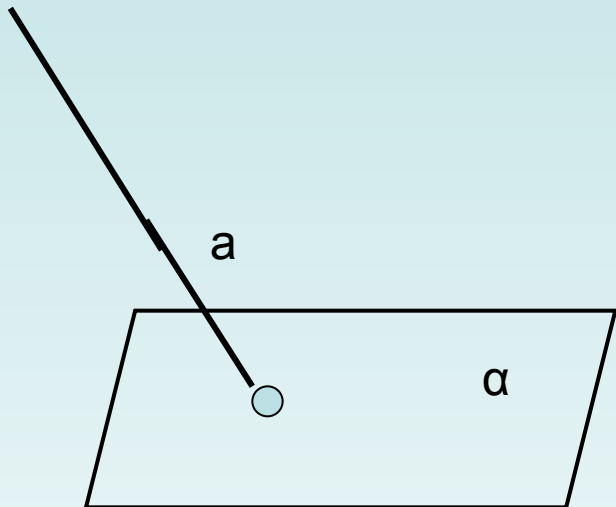
$$a \parallel B$$

мимобіжні

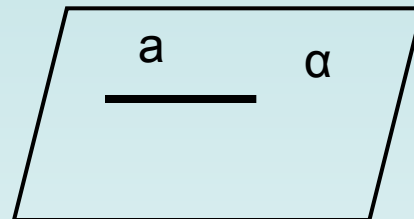


$$a \cdot B$$

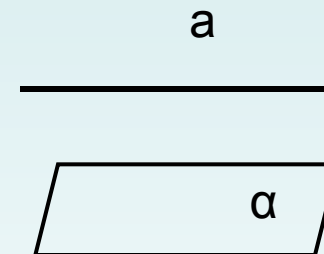
Пряма і площина у просторі МОЖУТЬ:



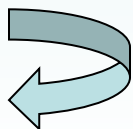
Мати одну
спільну точку



Безліч
спільних точок

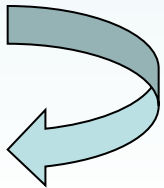
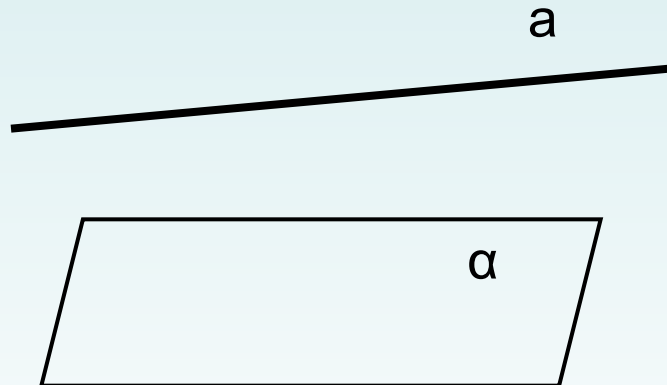


Пряма
паралельна
до площини



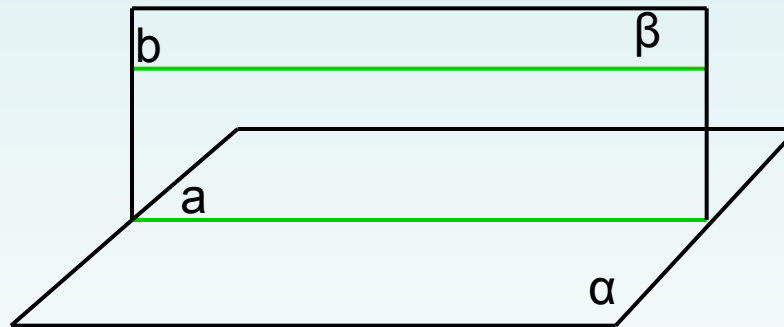
Паралельність прямої і площини

- Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.
- Якщо пряма a паралельна площині α , пишуть $a \parallel \alpha$.

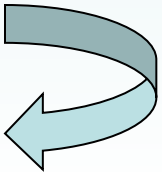


Ознака паралельності прямої і площини

- Якщо пряма , яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.

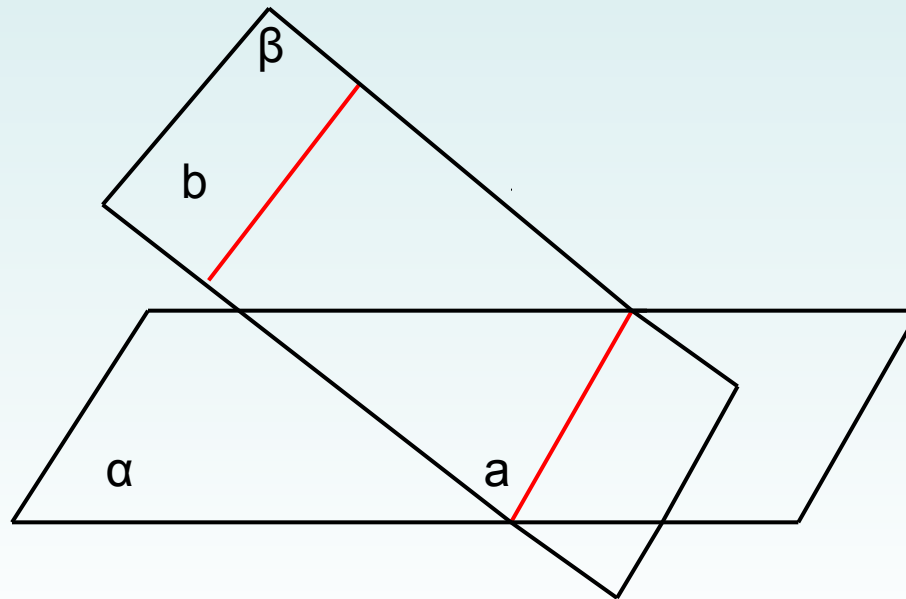


$b \parallel \alpha$



Властивість паралельності прямої і площини

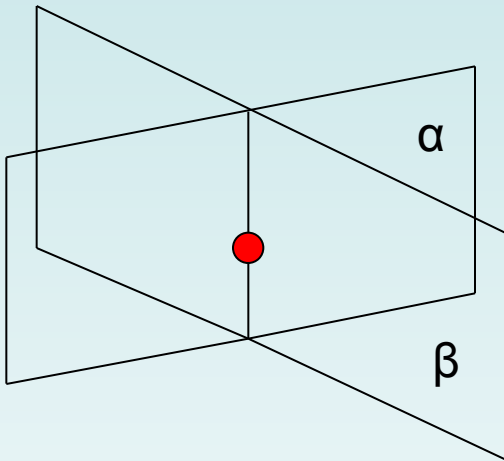
Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.



$a \parallel b$

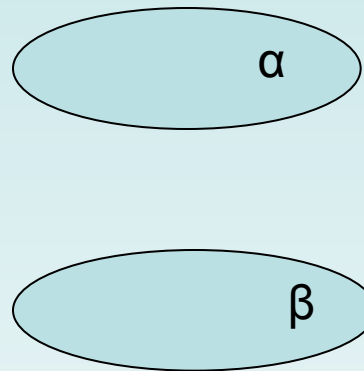
Взаємне розміщення двох площин у просторі.

Мають одну спільну точку



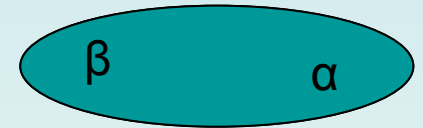
Перетинаються по прямій

Не мають спільної точки



$\alpha \parallel \beta$

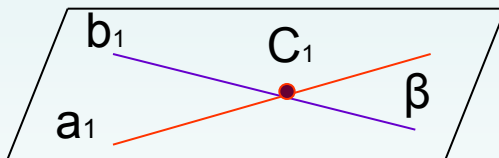
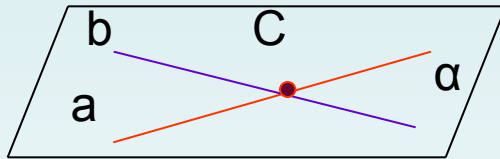
Мають безліч спільних точок



Накладання площин α і β

Ознаки паралельності двох площин

Якщо дві прямі, що перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.



$$\begin{aligned} 1. & a \subset \alpha \\ & b \subset \alpha \\ & a \cap b = C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & a_1 \subset \beta \\ & b_1 \subset \beta \\ & a_1 \cap b_1 = C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & a \parallel a_1 \\ & b \parallel b_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

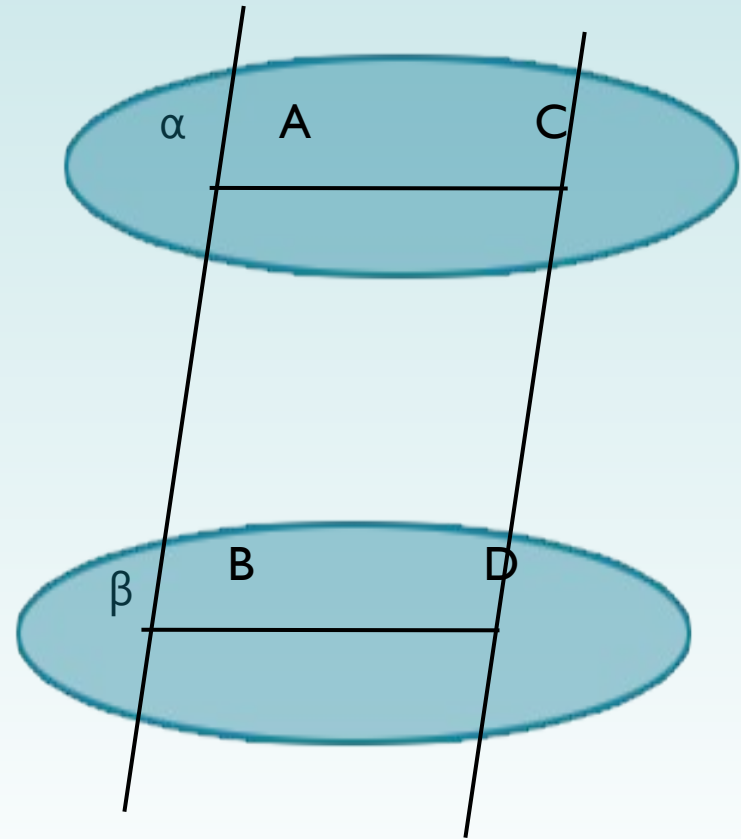
Властивості паралельних площин

1. Площина, яка проходить через прямі AB і CD , перетинає паралельні площини по паралельних прямих.

$$AC \parallel BD$$

2. Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні.

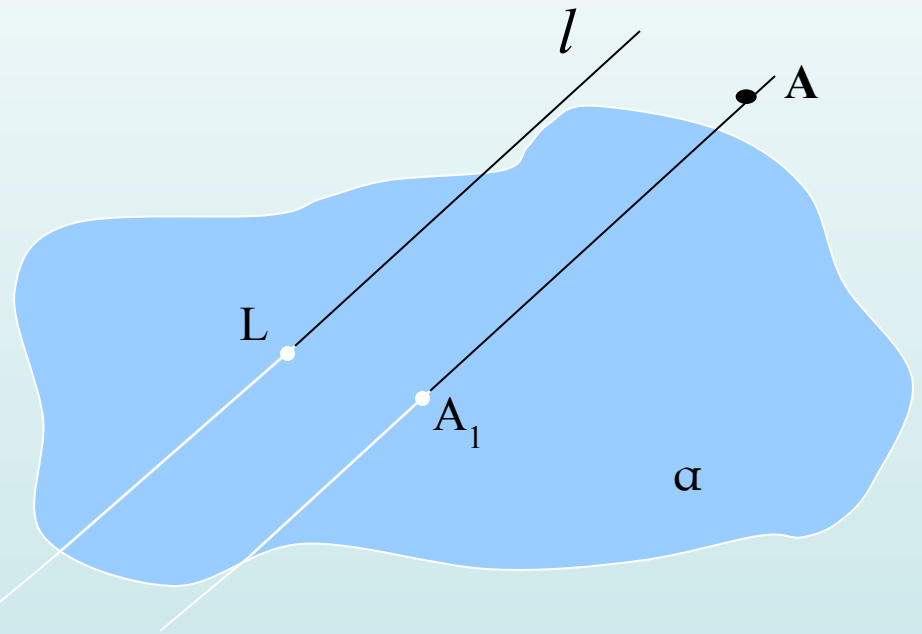
$$AB = CD$$



Метод паралельного проектування

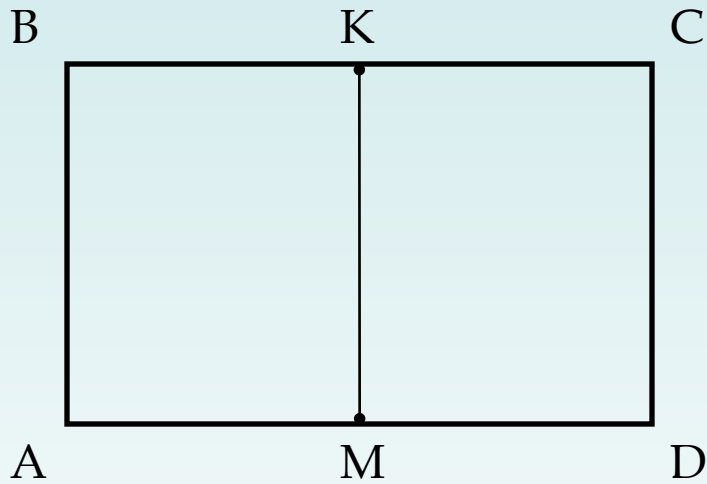
Нехай дано довільну площину α , довільну пряму l і точку A .

Тоді образ точки A можна побудувати провівши через неї пряму, паралельну прямій l і яка перетинає площину α . Точкою перетину прямої з площиною є точка A_1 .

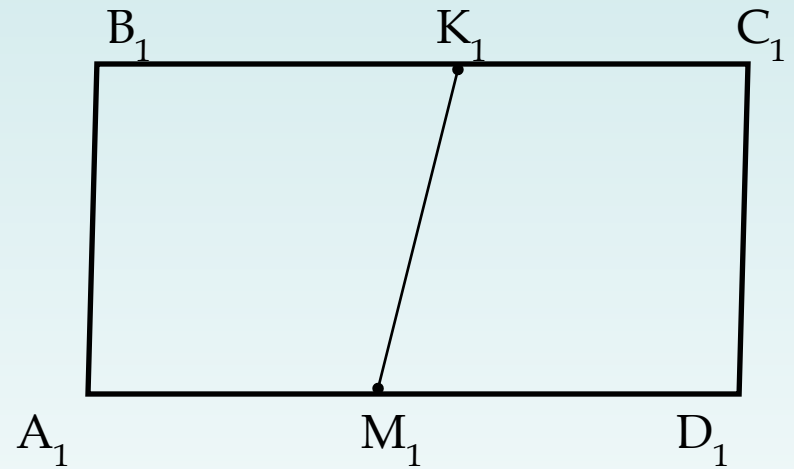


1. Відрізки фігури зображаються відрізками

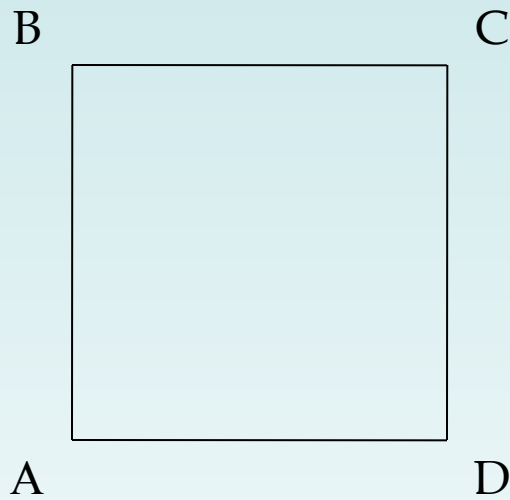
Оригінал



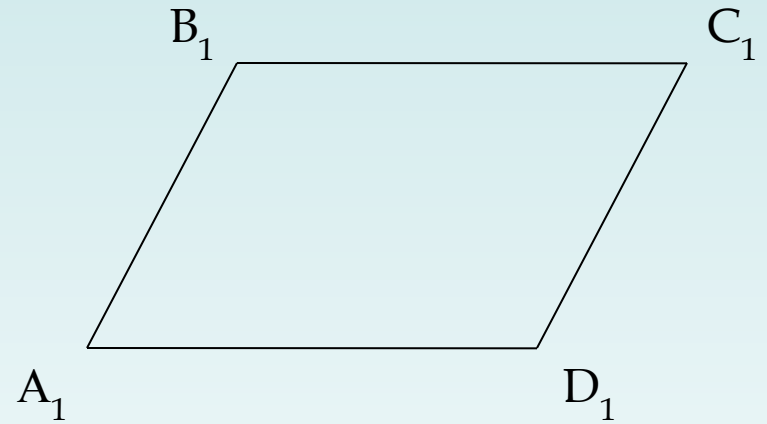
Зображення



2. паралельні відрізки - паралельними відрізками



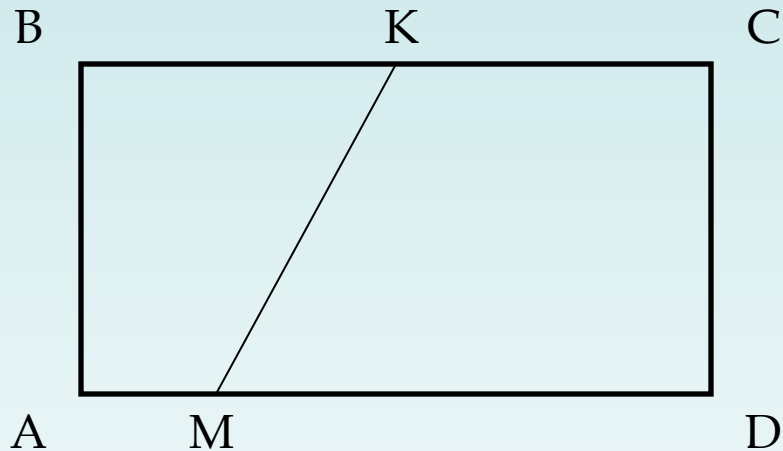
Оригінал



Зображення

3. Відношення довжин паралельних відрізків або відрізків однієї прямої

Оригінал



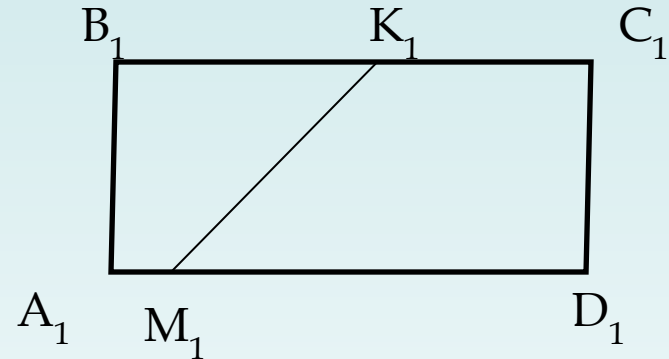
$$AB : BC = 1 : 2$$

$$CD : AD = 1 : 2$$

$$BK : KC = B_1K_1 : K_1C_1$$

$$AM : MD = A_1M_1 : M_1D_1$$

Зображення



$$A_1B_1 : B_1C_1 = 1 : 2$$

$$C_1D_1 : A_1B_1 = 1 : 2$$

Тестове завдання

1. Точка **M** не лежить у площині прямокутника **ABCD**. Яке взаємне розташування прямих **MA** і **CD** ?

А) Перетинаються; Б) паралельні; В) мимобіжні; Г) паралельні або мимобіжні.

2. Пряма **a** паралельна площині α , пряма **b** належить площині α .

Яким може бути взаємне розміщення прямих **a** і **b**?

А) Паралельні; Б) перетинаються; В) мимобіжні; Г) мимобіжні або паралельні.

3. Точка **M** лежить поза площиною трикутника **ABC**. Точки **K**, **P**, **E** і **D** – середини відрізків **MA**, **AB**, **MC** і **BC** відповідно. Яке взаємне розміщення прямих **KP** і **ED**?

А) Перетинаються; Б) мимобіжні; В) паралельні; Г) мимобіжні або перетинаються.

4. Сторона **AB** паралелограма **ABCD** належить площині α , а сторона **CD** не належить цій площині. Яке взаємне розміщення прямої **CD** і площини α ?

- А) пряма **CD** перетинає площину α ; Б) пряма **CD** паралельна площині α ; В) пряма **CD** лежить у площині α .

5. Пряма a паралельна площині α . Скільки площин, паралельних площині α можна провести через пряму a ?

- А) Одну; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.

6. Як розташовані площини α і β , якщо пряма a перетинає площину α і паралельна площині β ?

- А) Паралельні; Б) перетинаються; В) збігаються; Г) визначити неможливо.

7. Точка M не належить жодній із паралельних площин α і β .

Скільки всього існує площин, які проходять через точку M і паралельні площинам

- α і β ?
- А) Одна; Б) дві; В) жодної; Г) безліч.

8. Площини α і β паралельні. Пряма a перетинає площину α .

Як розташована пряма a відносно площини β ?

- А) Паралельна площині; Б) лежить у площині; В) перетинає площину;
Г) визначити неможливо.

9. Основи трапеції паралельні площині α . Яке взаємне розміщення площини трапеції і площини α ?

- А) Перетинаються; Б) паралельні; В) збігаються; Г) визначити неможливо.

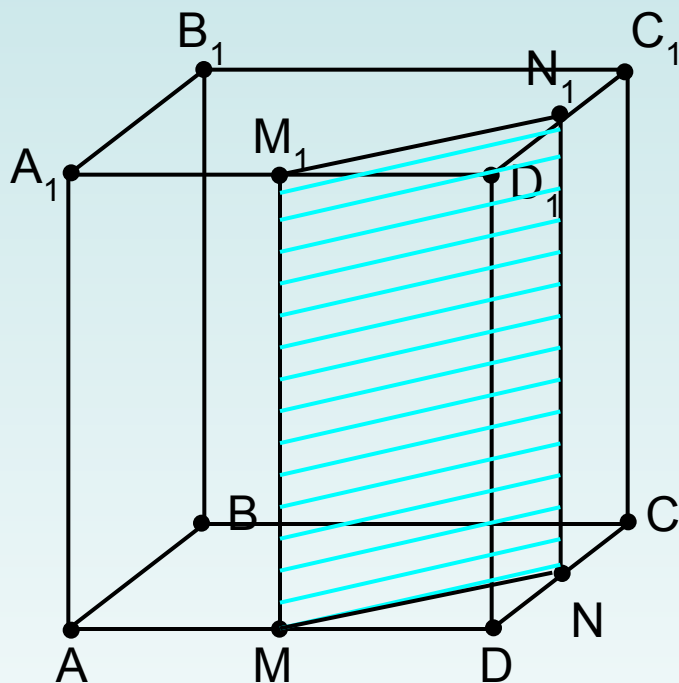
10. Площини α і β паралельні. Площина γ перетинається з площиною α по прямій a , а з площиною β - по прямій b . Яке взаємне розміщення прямих a і b ?

- А) Перетинаються; Б) мимобіжні; В) паралельні; Г) визначити неможливо.

Відповіді до тесту

**1В , 2Г , 3В , 4Б , 5А ,
6Б , 7А , 8В , 9А , 10В**

Задача. Побудувати переріз куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини ребер AD і CD паралельно до ребра DD_1 .

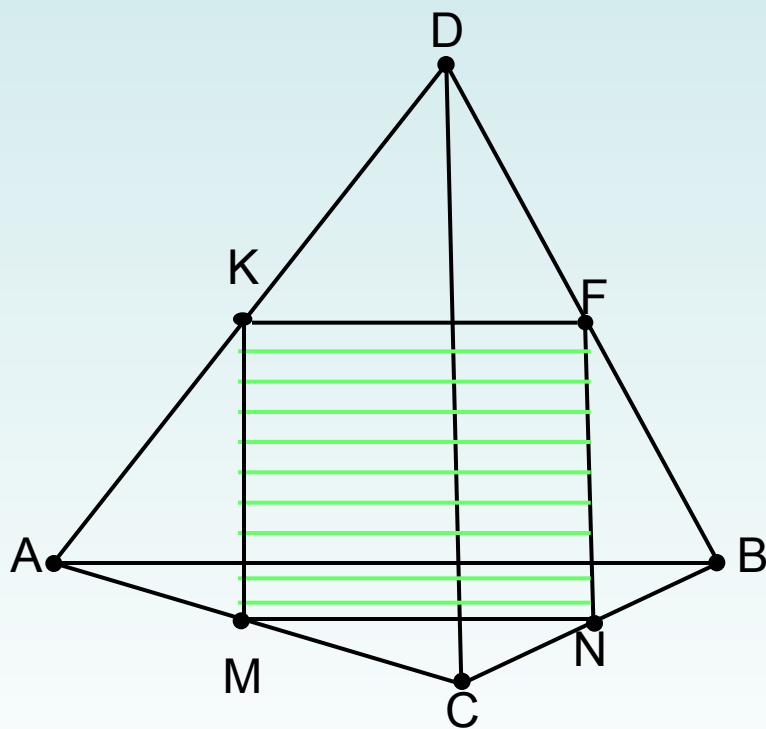


$MM_1 \parallel DD_1$

$NN_1 \parallel DD_1$

MM_1N_1N - шуканий
переріз

Задача. Побудувати переріз тетраедра $ABCD$ площиною, що проходить через середину ребра AC паралельно ребрам AB і DC .



$MK \parallel DC$

$MN \parallel AB$

$NF \parallel DC$

$MKFN$ – шуканий переріз

Методи побудови перерізів

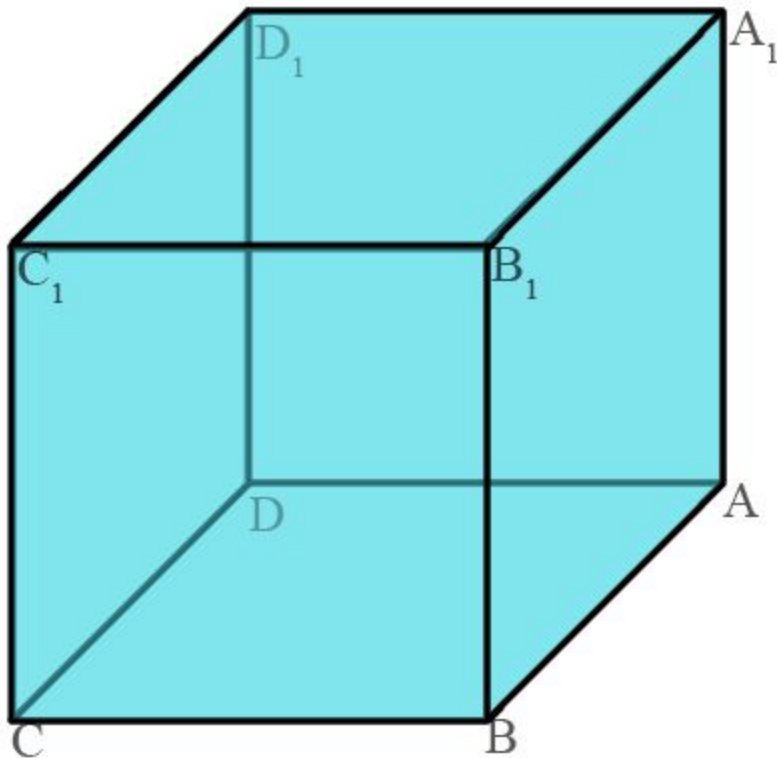
```
graph TD; A[Методи побудови перерізів] --> B[Метод слідів]; A --> C[Метод внутрішньої проєкції]; A --> D[Комбінований метод];
```

Метод слідів

Метод
внутрішньої
проєкції

Комбінований
метод

Пряма, по якій січна площина перетинає площину α , називається *слідом* січної площини в площині α . Точка, в якій січна площина перетинає пряму, -слід січної площини на цій прямій.



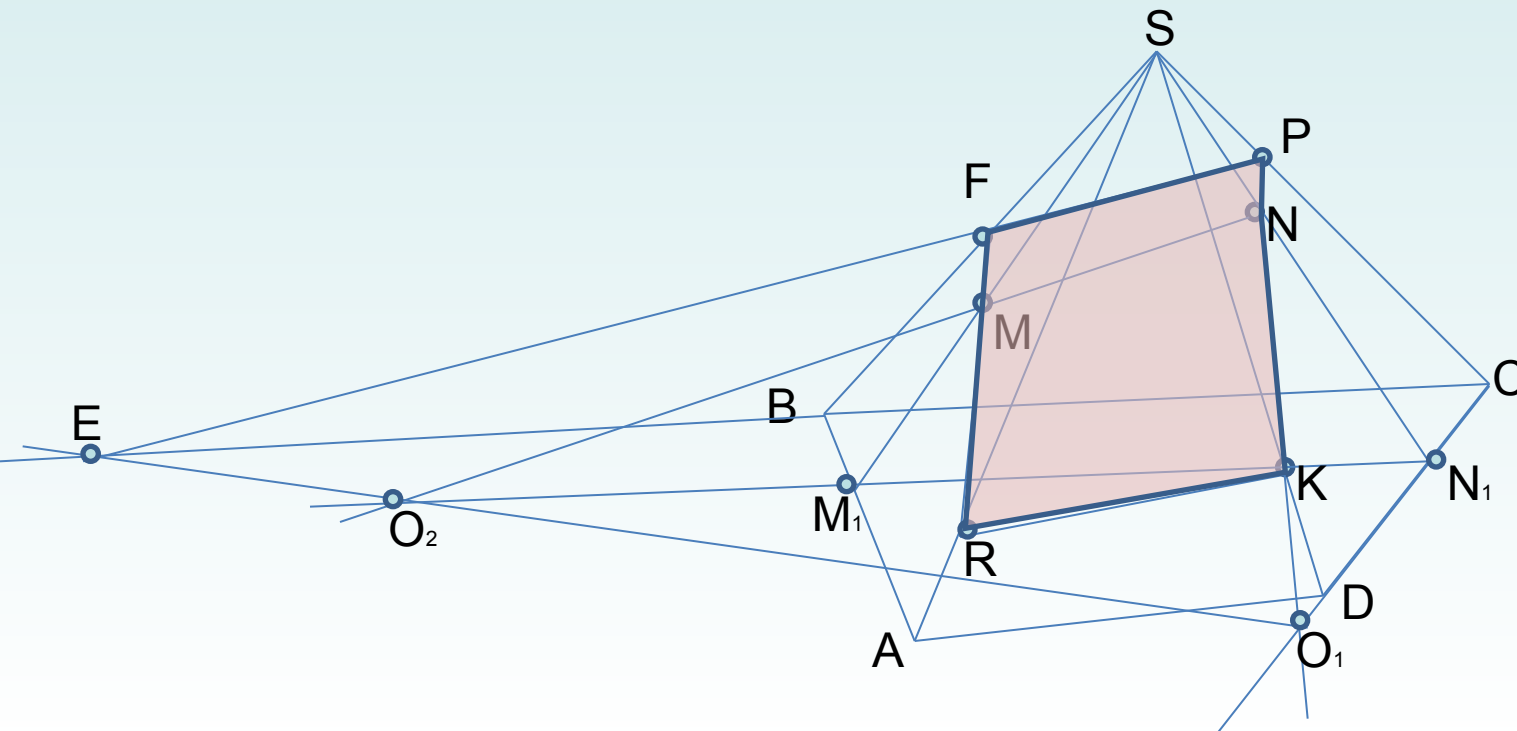
Задача.

Побудуйте переріз куба $ABCSDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T .

Якщо многогранником, переріз якого будується, є **піраміда**, то використовується **центральне проектування на площину основи**. Центром проектування є вершина піраміди, в якій сходяться всі бічні ребра.

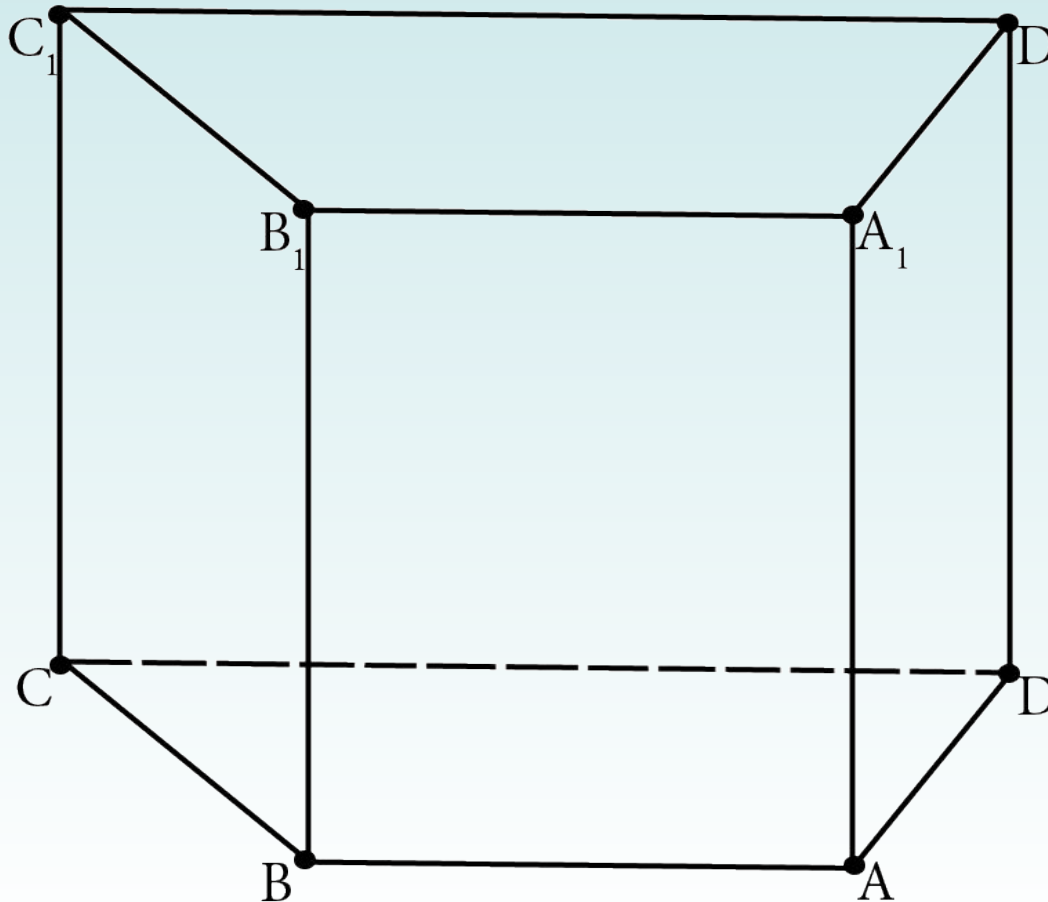
Задача.

Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через точки M , N , K .



Задача.

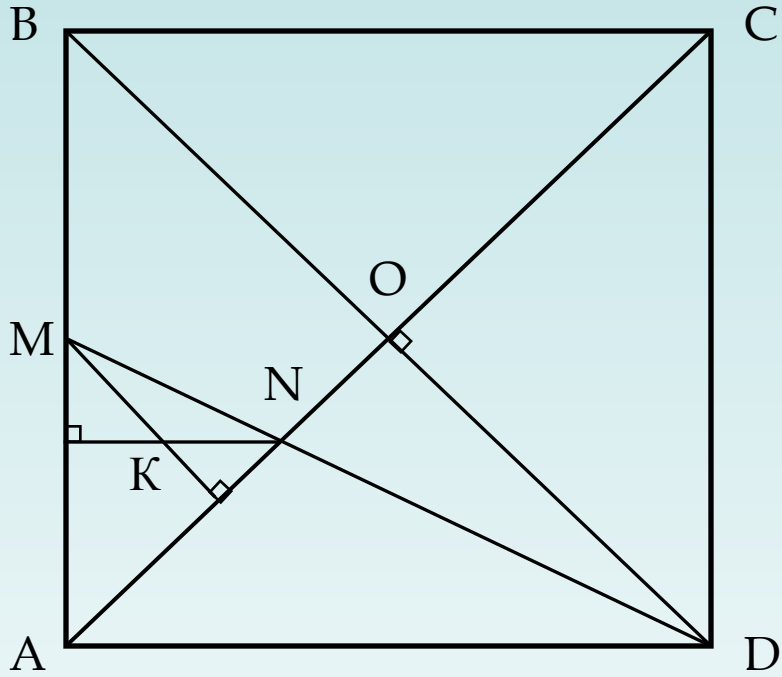
Побудуйте переріз призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, яка проходить через точки K, P, T .



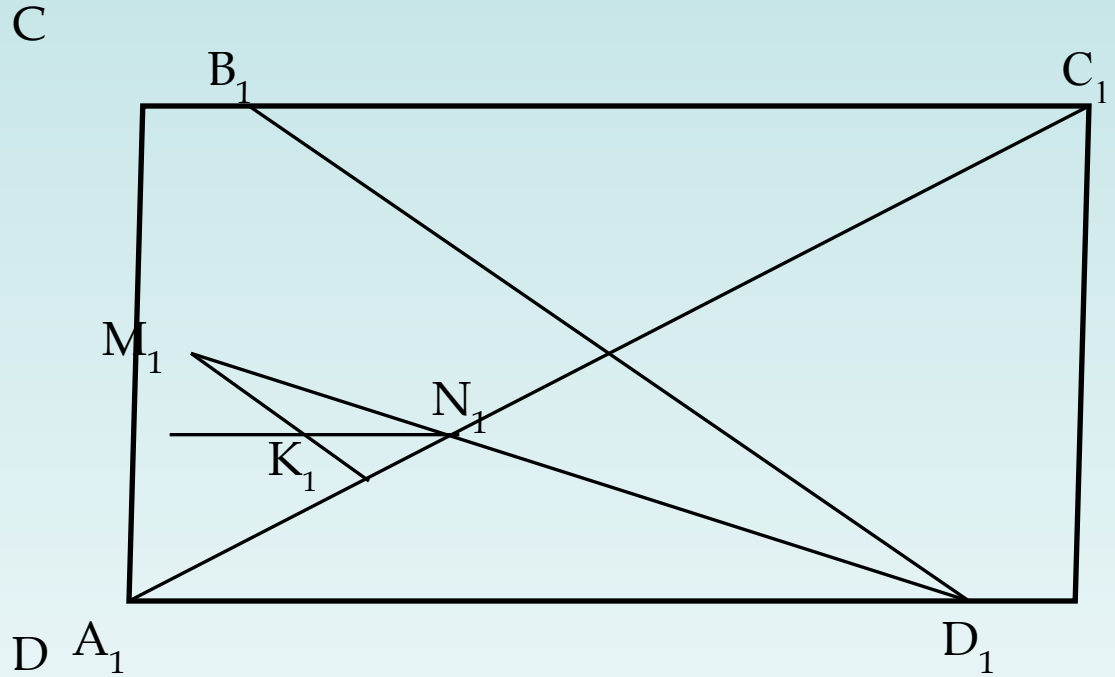
задача

Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням квадрата. Точка M – середина AB , AC і DM перетинаються у точці N . Побудувати зображення ортоцентра трикутника ANM .

Розв'язання

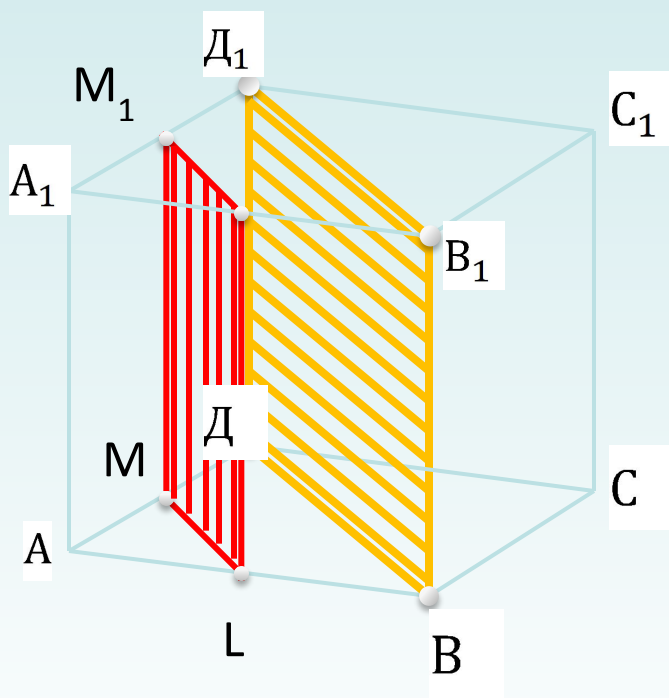


Оригінал



Зображення

Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки L, M, M_1 – середини ребер AB, AD, A_1D_1 відповідно. Яке взаємне розміщення площин DB_1D_1 і LMM_1 ?



$(DB_1D_1) \parallel (LMM_1)$
 $MZ \parallel DB$ як середня лінія $\triangle ABD$
 $MM_1 \parallel DD_1$ за ознакою паралельності площин

Задача для самостійного розв'язування

Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ у якого $AB = \sqrt{70}$, $BC = \sqrt{99}$, $AA_1 = \sqrt{126}$.
Через вершину D_1 зроблено переріз паралелепіпеда, паралельний площині $A_1 BD$. Знайдіть площу цього перерізу.