Фракталы

Пензенский государственный университет

Содержание

Содержание

Свойства фракталов

- **Фрактал** (от лат. «Fractus» — «фрагментированный, изломанный, неправильный по форме») — структура, состоящая из частей, которые в некотором смысле подобны целому.

Свойства:

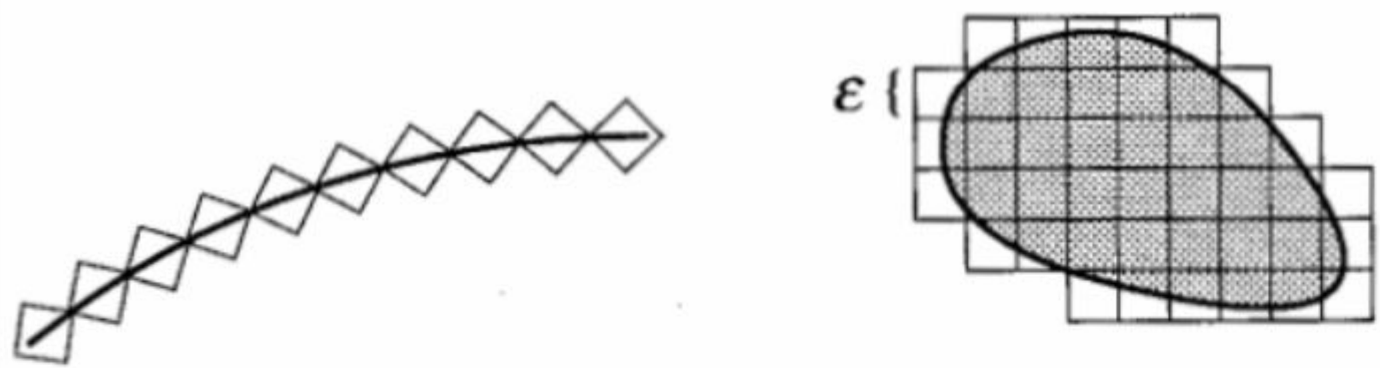
- **Нерегулярность**. Если фрактал описывать функцией, то свойство нерегулярности в математических терминах будет означать, что такая функция не дифференцируема, то есть не гладкая ни в какой точке.
- **Самоподобие** означает, что у объекта нет характерного масштаба: будь у него такой масштаб, вы сразу бы отличили увеличенную копию фрагмента от исходного снимка.

Свойства фракталов

- Размерность. Интуитивно мы понимаем термин размерность как число координат, необходимых для задания положения точки внутри фигуры. Но фрактальные объекты имеют размерность, отличную от евклидовой. Фрактальная размерность является показателем сложности кривой.
- Допустим, что фигура F, размерность которой мы хотим найти, расположена на плоскости. А плоскость, в свою очередь, покрыта сеткой из квадратиков со стороной ε. Через $N(\varepsilon)$ обозначим число квадратиков, которые пересекаются с фигурой F (объединение всех таких квадратиков содержит в себе F). Ясно, что это число зависит от размера квадратиков: чем они меньше, тем больше их нужно, чтобы покрыть фигуру.

Свойства фракталов

- Если эта зависимость выражается степенным законом: число *N(ε)* пропорционально некоторой степени $(1/\varepsilon)^D$, то будем считать (здесь мы несколько упрощаем реальное положение дел), что фигура *F* имеет размерность *D* (вполне может случиться, что число *D* не целое).

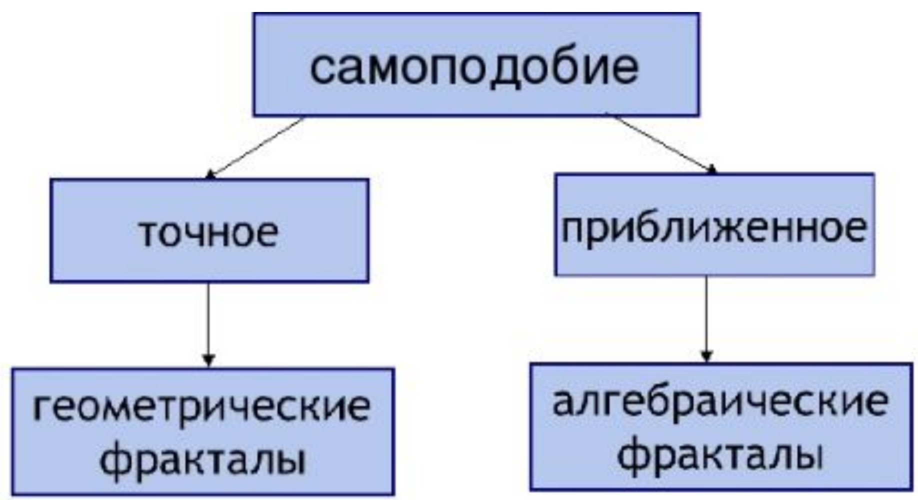


$$N(\varepsilon) \propto \frac{L}{\varepsilon} \qquad N(\varepsilon) \propto \frac{A}{\varepsilon^2}$$

Классификация фракталов

Для представления многообразия фракталов удобно прибегнуть к их общепринятой классификации:

- геометрические (конструктивные);
- алгебраические (динамические);
- стохастические.



Геометрические фракталы

Это самый первый, ранний тип фракталов, с которых, по сути, и началась история фракталов. Такие фракталы – одни из самых наглядных, в них сразу видно точное самоподобие частей при любых масштабах, и получаются они путём простых геометрических построений:

1. Задаётся фигура, на основе которой будет строиться фрактал.
2. К данной фигуре применяется набор правил, который преобразует её.
3. Бесконечно (или требуемое количество раз) повторяем применение набора правил.

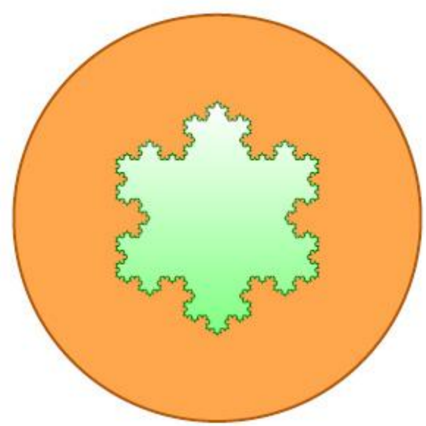
Геометрические фракталы

- Наиболее известными геометрическими фракталами являются снежинка Коха, ковёр и треугольник Серпинского, пыль Кантора, кривые Пеано, кривая Леви, дерево Пифагора.

Снежинка Коха и её построение

Один из первых исследованных учёными фракталов.
Придумана шведским математиком Хельге фон Кохом
в 1904 году.
Свойства:

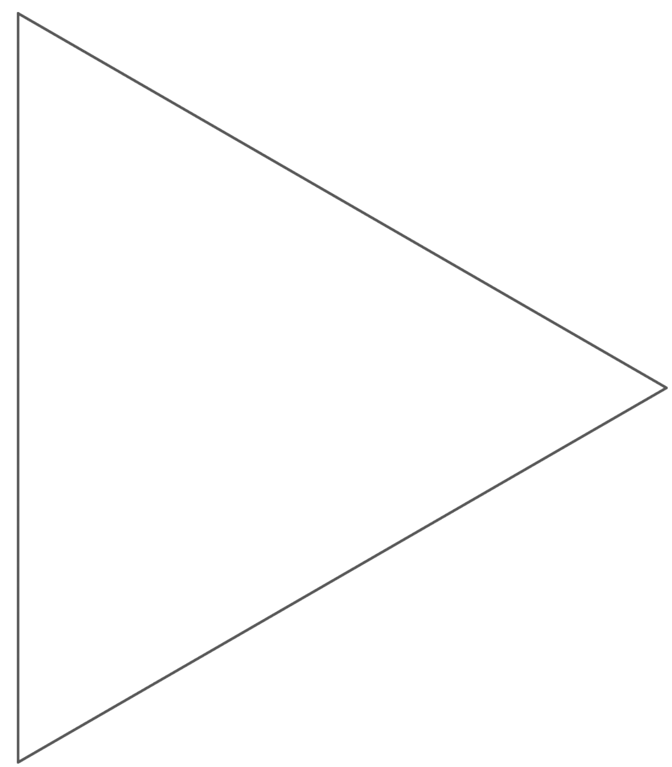
1. Она непрерывна, но нигде не дифференцируема.
2. Имеет бесконечную длину.
3. Снежинка Коха ограничивает конечную площадь при бесконечном периметре.
4. Фрактальная размерность равна $\log 4/\log 3 = \log_3 4 \approx 1{,}261859$



Снежинка Коха и её построение

1. Начнём с равностороннего треугольника, который фактически является нулевой итерации снежинки Коха.
2. Найдём центральную точку на каждом ребре текущей снежинки.
3. В центре каждого ребра добавим выступающий наружу равносторонний треугольник со стороной, равной 1/3 длины текущего ребра.
4. Определим следующую итерацию снежинки Коха, чтобы оказаться снаружи с внешней стороны предыдущей снежинки и всех добавленных треугольников.
5. Повторим шаги 2-4 необходимое количество раз.

Снежинка Коха и её построение



Треугольник и ковёр Серпинского

Треугольник (салфетка) Серпинского был описан польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 г.

Свойства:

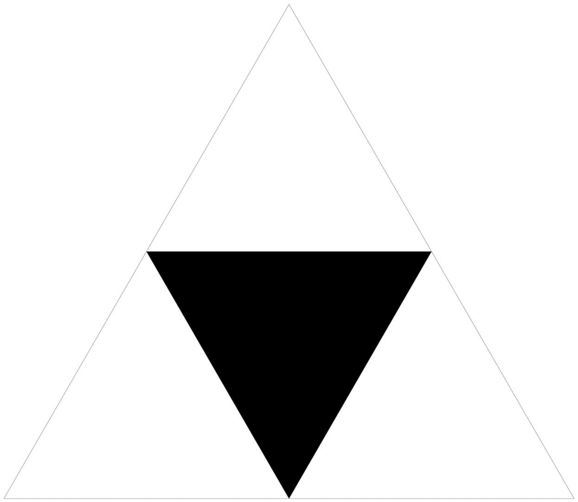
1. Треугольник Серпинского имеет нулевую площадь.
2. Неожиданная связь с комбинаторикой. Если в треугольнике Паскаля с 2^n строками покрасить все четные числа белым, а нечетные — черным, то видимые числа образуют треугольник Серпинского (в некотором приближении).

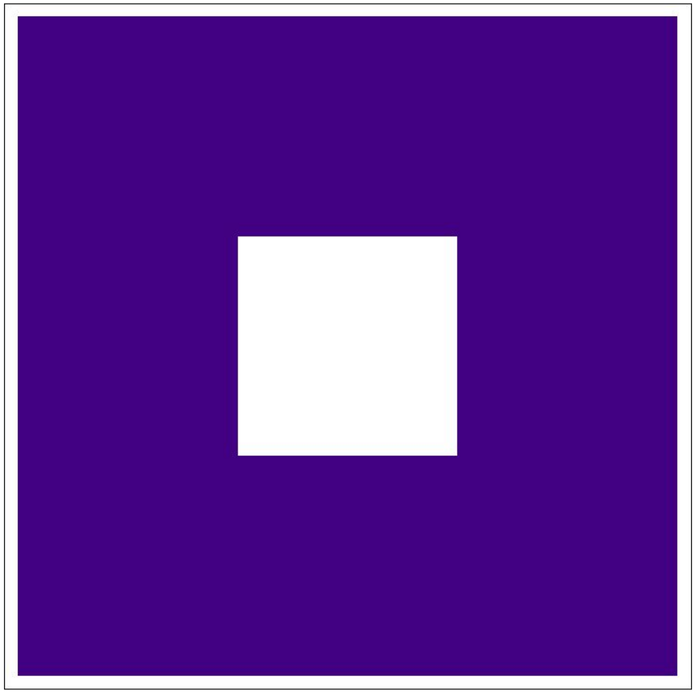
Квадратная версия фрактала была описана в 1916 году.

Треугольник и ковёр Серпинского

- Чтобы получить треугольник Серпинского, нужно взять (равносторонний) треугольник с внутренностью, провести в нём средние линии и выкинуть центральный из четырёх образовавшихся маленьких треугольников. Дальше эти же действия нужно повторить с каждым из оставшихся трёх треугольников, и т. д.
- Чтобы получить ковёр (квадрат) Серпинского, берётся квадрат, и также на каждом шаге выбрасывается центральная часть.

Треугольник и ковёр Серпинского





Пыль Кантора и её построение

Пыль (множество) Кантора — классический фрактал, описанный немецким математиком Георгом Кантором в 1883 г.

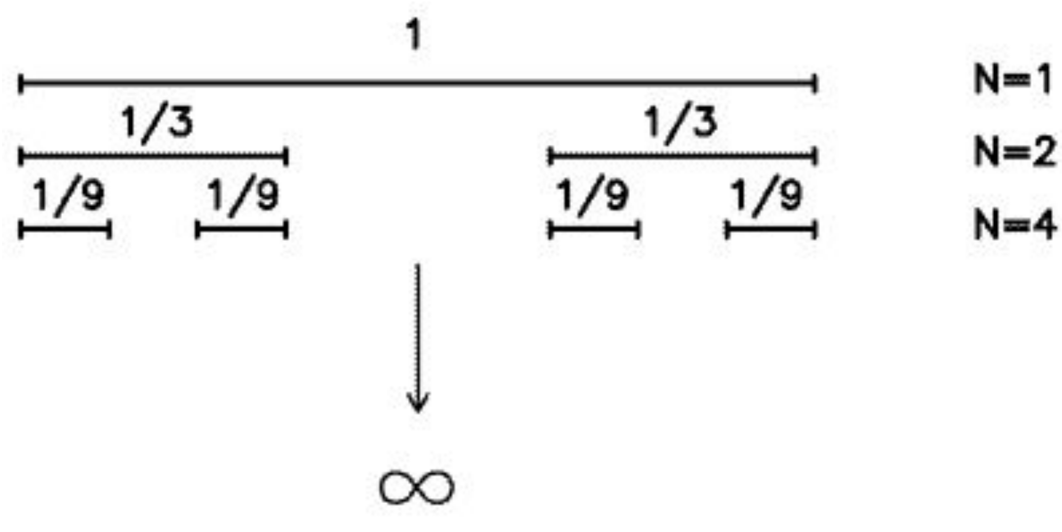
Свойства:

- Канторово множество замкнуто и не счётно.
- Не содержит интервалов положительной длины.
- Сумма длин интервалов, удалённых при построении множества С, в точности равна 1.
- Пыль Кантора есть фрактал размерности log 2/log 3 ≈ 0,6309.

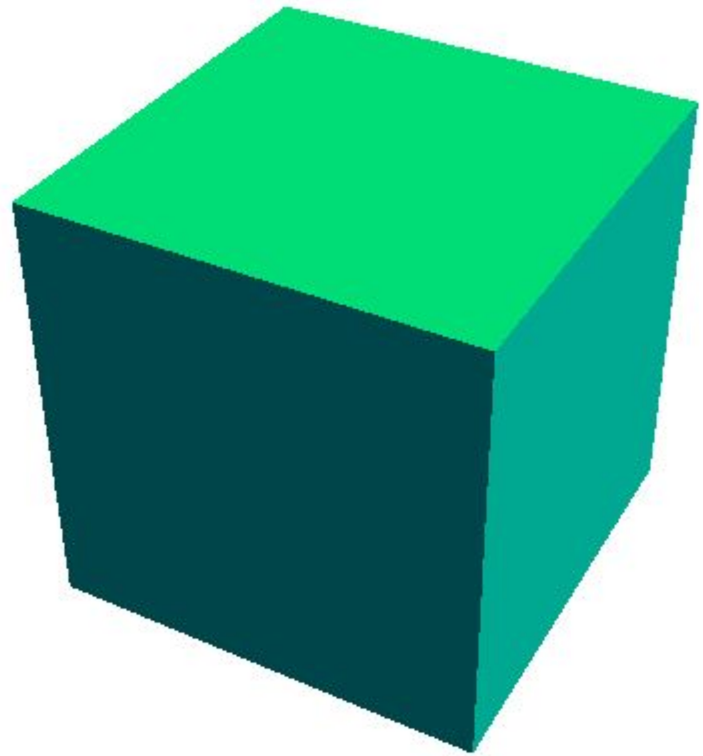
Пыль Кантора и её построение

Построение классической пыли Кантора начинается с выбрасывания средней трети (не включая концы) единичного отрезка.

То есть исходное множество есть отрезок [0,1], и первый шаг состоит в удалении открытого интервала (1/3,2/3). На следующем и всех остальных шагах мы выкидываем среднюю треть (не включая концы) всех отрезков текущего уровня.



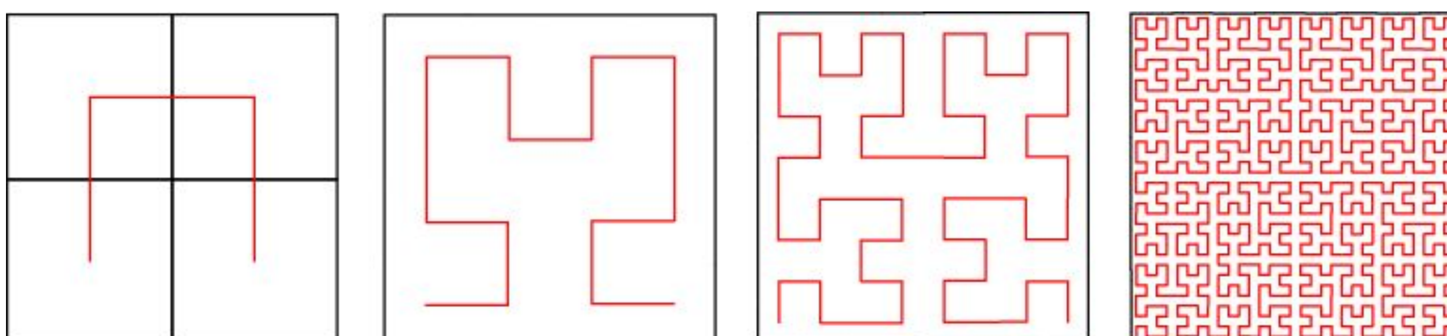
Пыль Кантора и её построение



Кривые Пеано и их построение

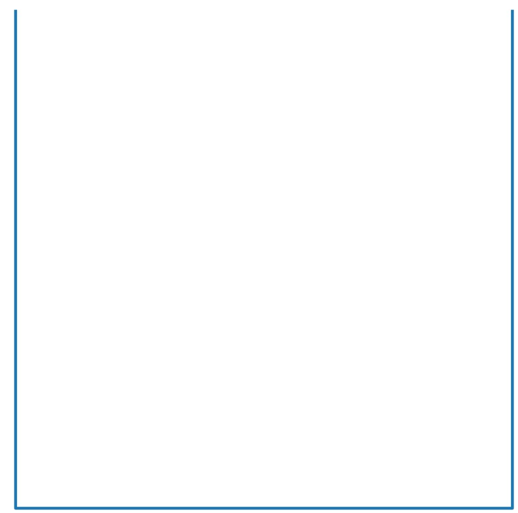
Кривые Пеано — общее название общее название для параметрических кривых, образ которых содержит квадрат (другое название — кривая, заполняющая плоскость). Названы в честь итальянского математика Джузеппе Пеано, построившего первую из них в 1890г.

Для построения необходимо задать квадрат и разбить его на четыре равные части, соединив их центры тремя отрезками (а). Повторение процедуры в результате даст кривую Пеано.



а) б) в) г)

Кривые Пеано и их построение



Кривая Леви и её построение

- Хотя этот объект изучал еще итальянец Эрнесто Чезаро в 1906 году, его самоподобие и фрактальные свойства исследовал в 1930-х годах француз Поль Пьер Леви. Фрактальная размерность границы этого фрактала примерно равна 1,9340... . Но это довольно сложный математический результат, а точное значение неизвестно.
- За сходство с буквой «С», написанной витиеватым шрифтом, ее еще называют С-кривой Леви.

i = 0

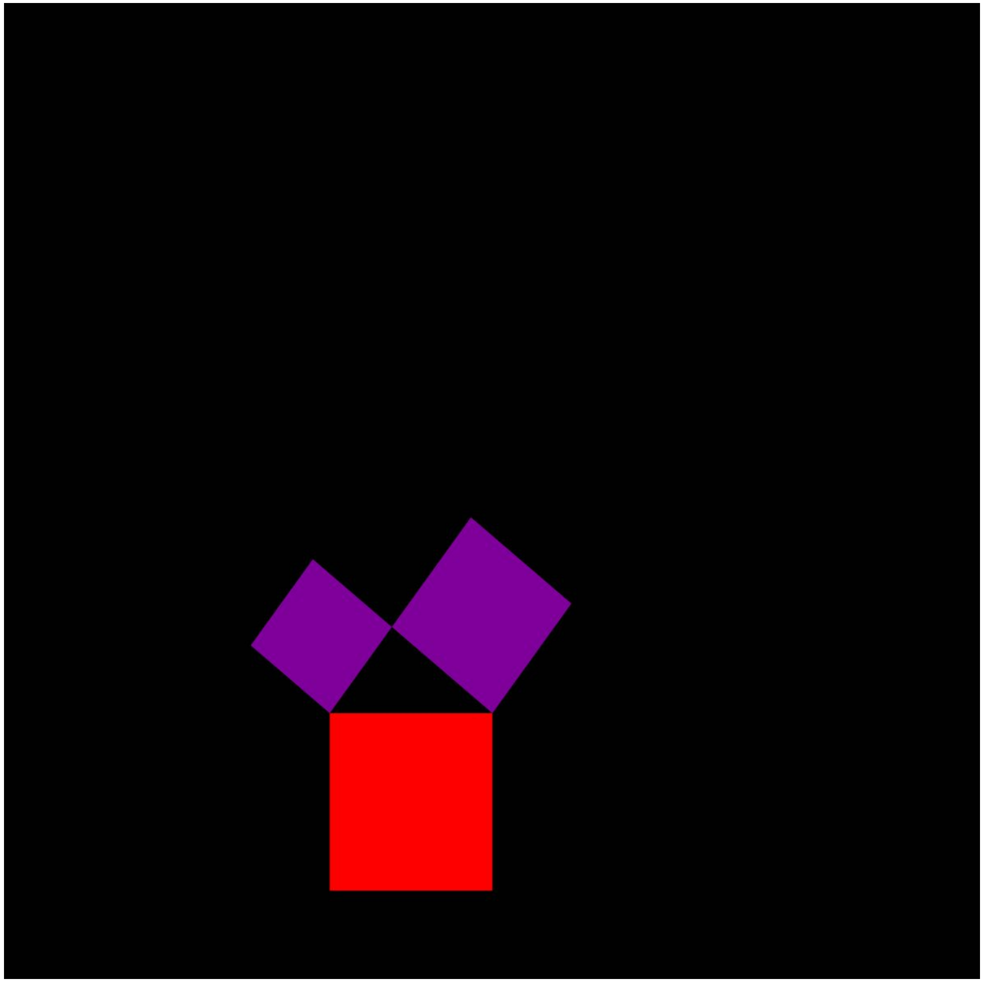
Дерево Пифагора и его построение

- Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в целое дерево. Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891—1961) во время второй мировой войны, используя обычную чертёжную линейку.
- Одним из свойств дерева Пифагора является то, что если площадь первого квадрата равна единице, то на каждом уровне сумма площадей квадратов тоже будет равна единице.

Дерево Пифагора и его построение

- Если в классическом дереве Пифагора угол равен 45 градусам, то также можно построить и обобщённое дерево Пифагора при использовании других углов. Такое дерево часто называют обдуваемое ветром дерево Пифагора. Если изображать только отрезки, соединяющие каким-либо образом выбранные «центры» треугольников, то получается обнаженное дерево Пифагора.
- Кроной дерева Пифагора является кривая Леви.

Дерево Пифагора и его построение



Алгебраические фракталы

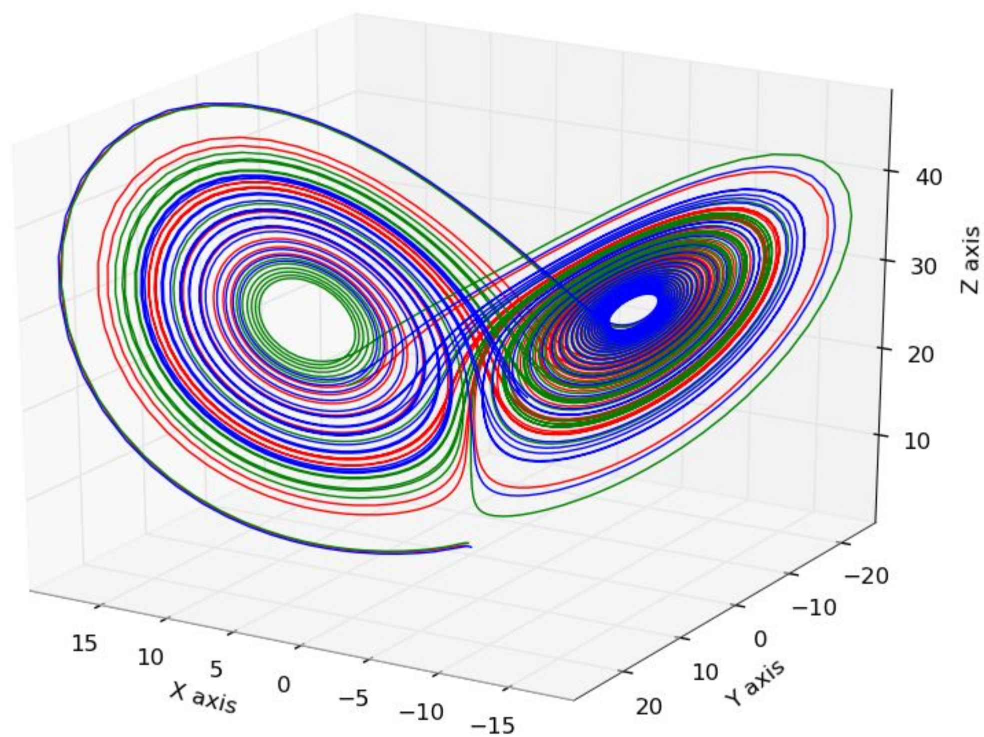
- Фракталы этого типа возникают при исследовании нелинейных динамических систем (отсюда и название). Поведение такой системы можно описать комплексной нелинейной функцией (многочленом) $f(z)$.
- Возьмем какую-нибудь начальную точку z_0 на комплексной плоскости. Теперь рассмотрим бесконечную последовательность чисел на комплексной плоскости, каждое следующее из которых получается из предыдущего: z_0, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, ... $z_{n+1} = f(z_n)$.
- В зависимости от начальной точки z_0 такая последовательность может вести себя по-разному: стремиться к бесконечности при $n \to \infty$; сходиться к какой-то конечной точке; циклически принимать ряд фиксированных значений; возможны и более сложные варианты.

Алгебраические фракталы

- Как известно (из синергетических представлений), нелинейные динамические системы могут иметь несколько устойчивых состояний. При этом состояние, в котором оказалась динамическая система после определенного конечного числа итераций, напрямую зависит от ее начального состояния. А это значит, что изучаемая система может рассматриваться в некотором фазовом пространстве, в котором будут присутствовать области притяжения (аттракторы).
- Рассматривая двумерное фазовое пространство и окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет любой системы. Применение различных алгоритмов выбора цвета позволяет получить достаточно сложные фрактальные картины с удивительными многоцветными узорами.

Алгебраические фракталы

- Важным понятием в данной теме является понятие **аттракторов** — множеств, к которым приближаются точки при последовательных итерациях отображения.

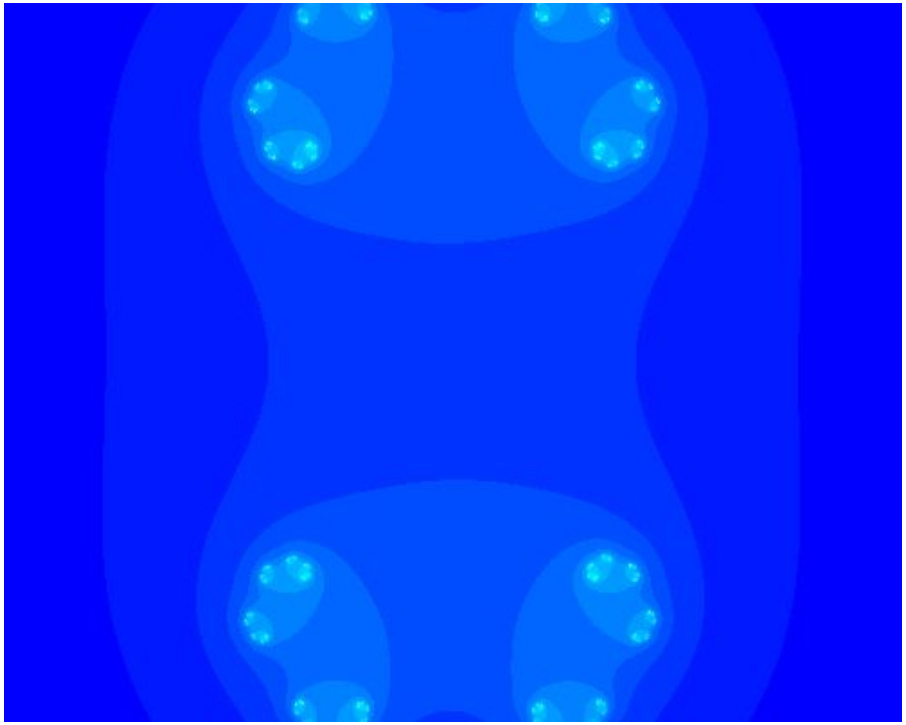


Множества Жюлиа

- Любая точка z комплексной плоскости имеет свой характер поведения (остается конечной, стремится к бесконечности, принимает фиксированные значения) при итерациях функции $f(z)$, а вся плоскость делится на части. При этом точки, лежащие на границах этих частей, обладают таким свойством: при сколь угодно малом смещении характер их поведения резко меняется (такие точки называют **точками бифуркации**). При этом множества точек, имеющих один конкретный тип поведения, а также множества бифуркационных точек часто имеют фрактальные свойства. Это и есть множества Жюлиа для функции $f(z)$.

Множества Жюлиа

- Заполненное множество Жюлиа — множество точек, не стремящихся к бесконечности. Обычное множество Жюлиа при этом является его границей.



Множество Мандельброта

- Рассмотрим функцию $f_c(z) = z^2 + c$, где c — комплексное число. Построим последовательность этой функции с $z_0 = 0$, в зависимости от параметра c она может расходиться к бесконечности или оставаться ограниченной.

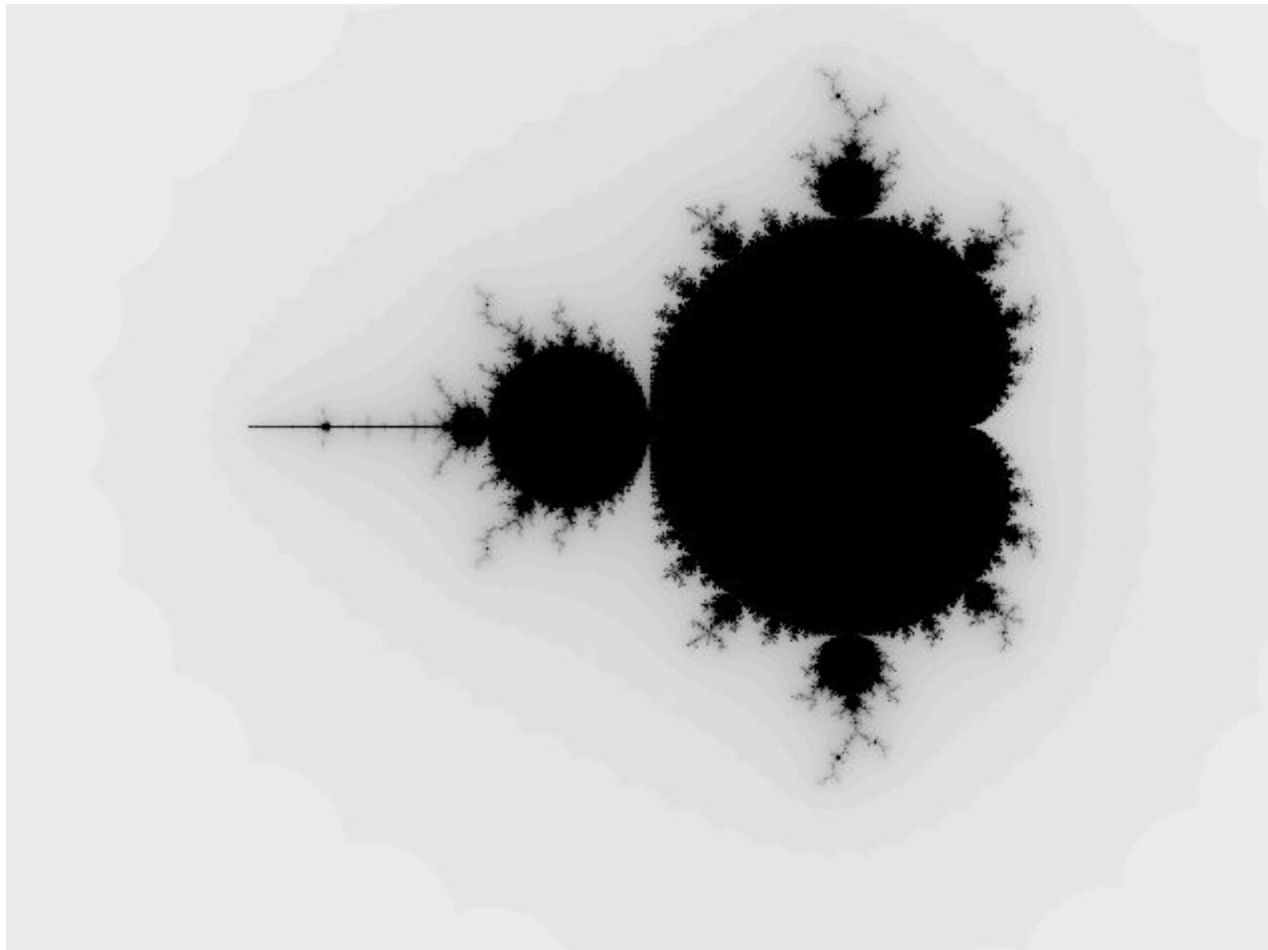
$$z_0 = 0,\ z_1 = z_0^{\ 2} + c,\ \ldots,\ z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$$

- При этом все значения c, при которых эта последовательность ограничена, как раз и образуют множество Мандельброта.

Множество Мандельброта

- Визуально множество Мандельброта выглядит как набор бесконечного количества различных фигур, самая большая из которых называется **кардиоидой** (она похожа на стилизованное изображение сердца и получила свое название от двух греческих слов — «сердце» и «вид»).
- Кардиоида окружена всё уменьшающимися кругами, каждый из которых окружен еще меньшими кругами, и т. д. до бесконечности. При любом увеличении этого фрактала будут выявляться всё более и более мелкие детали изображения, дополнительные ветки с более мелкими кардиоидами, кругами.

Множество Мандельброта



Стохастические фракталы

- Третьей крупной разновидностью фракталов являются стохастические фракталы, которые образуются путем многократных повторений случайных изменений каких-либо параметров.
- В результате итерационного процесса получаются объекты, очень похожие на природные фракталы — несимметричные деревья, изрезанные лагунами береговые линии островов и многое другое. Двумерные стохастические фракталы используются преимущественно при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

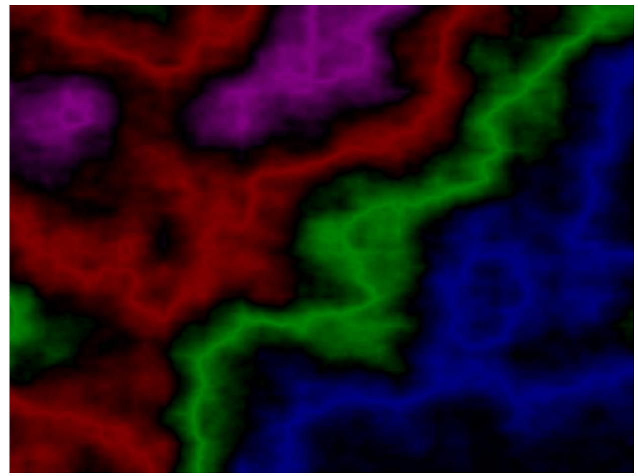
Стохастические фракталы

Примеры стохастических фракталов:

- траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве;
- различные виды рандомизированных фракталов, то есть фракталов, полученных с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге введён случайный параметр.

Стохастические фракталы

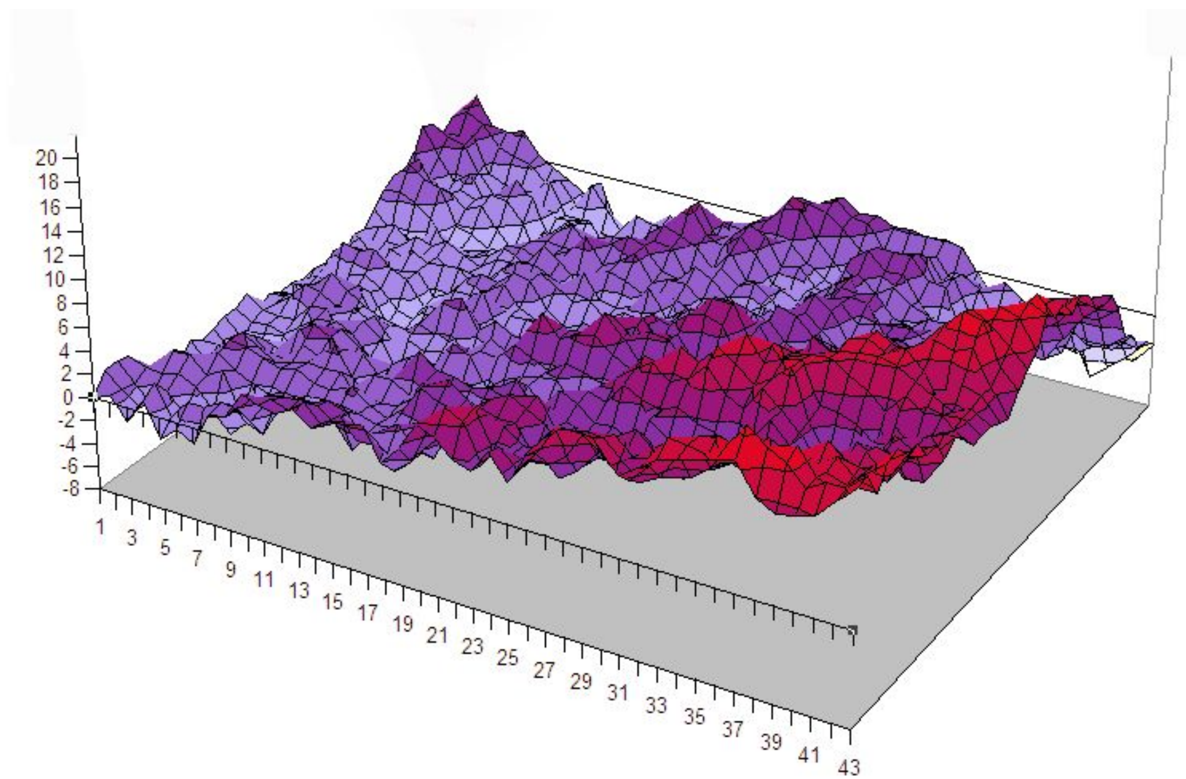
- Плазма — типичный представитель данного класса фракталов в компьютерной графике:



- Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число.

Стохастические фракталы

- Ярким примером стохастических фракталов может служить броуновская поверхность, с помощью которой можно генерировать реалистичные изображения горных массивов.



Стохастические фракталы