# Градусная и радианная меры угла. Вращательное движение.

# Синус, косинус, тангенс и

# Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?

На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.

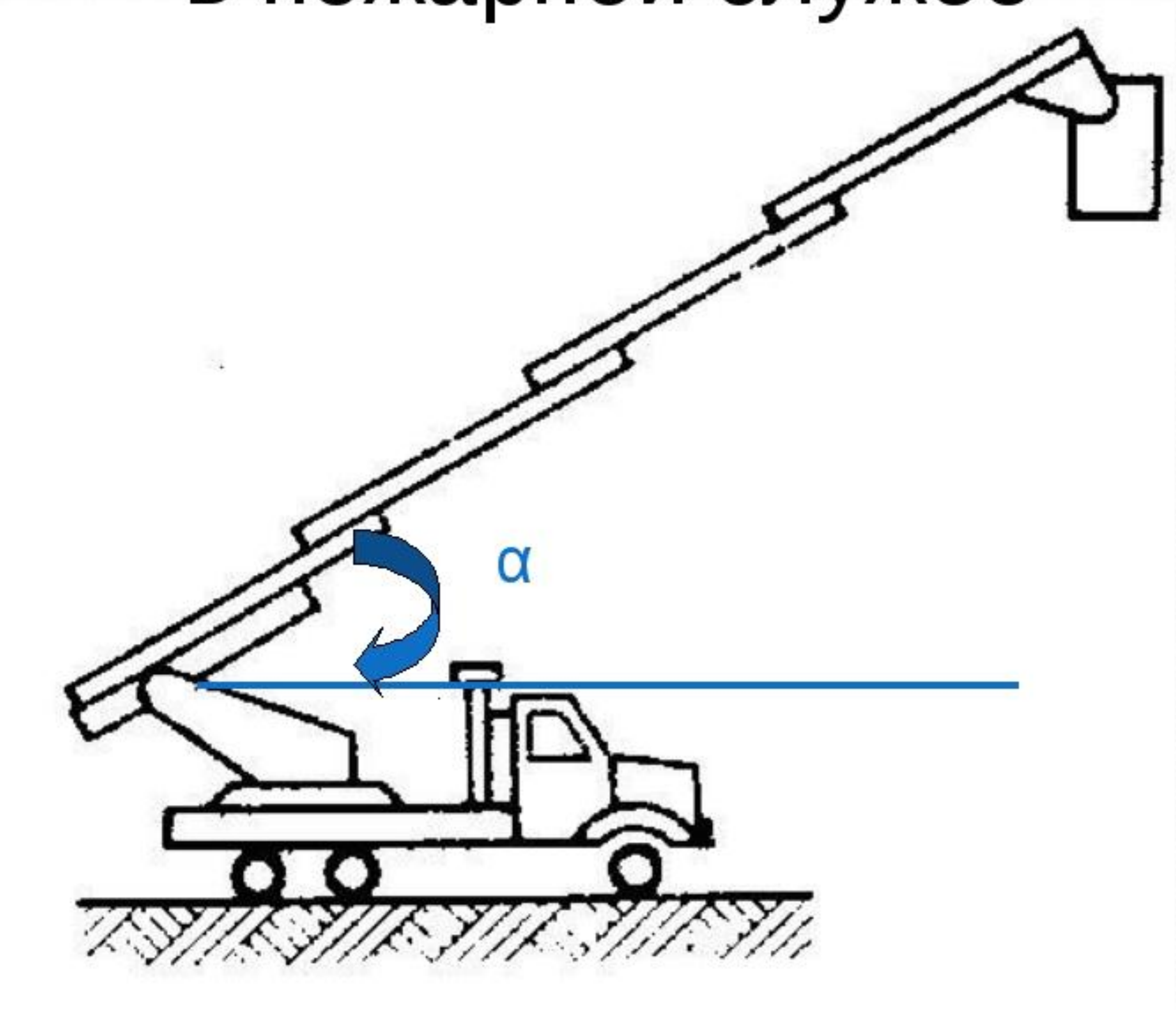
# Тригонометрия в искусстве

Детская школа Гауди в Барселоне

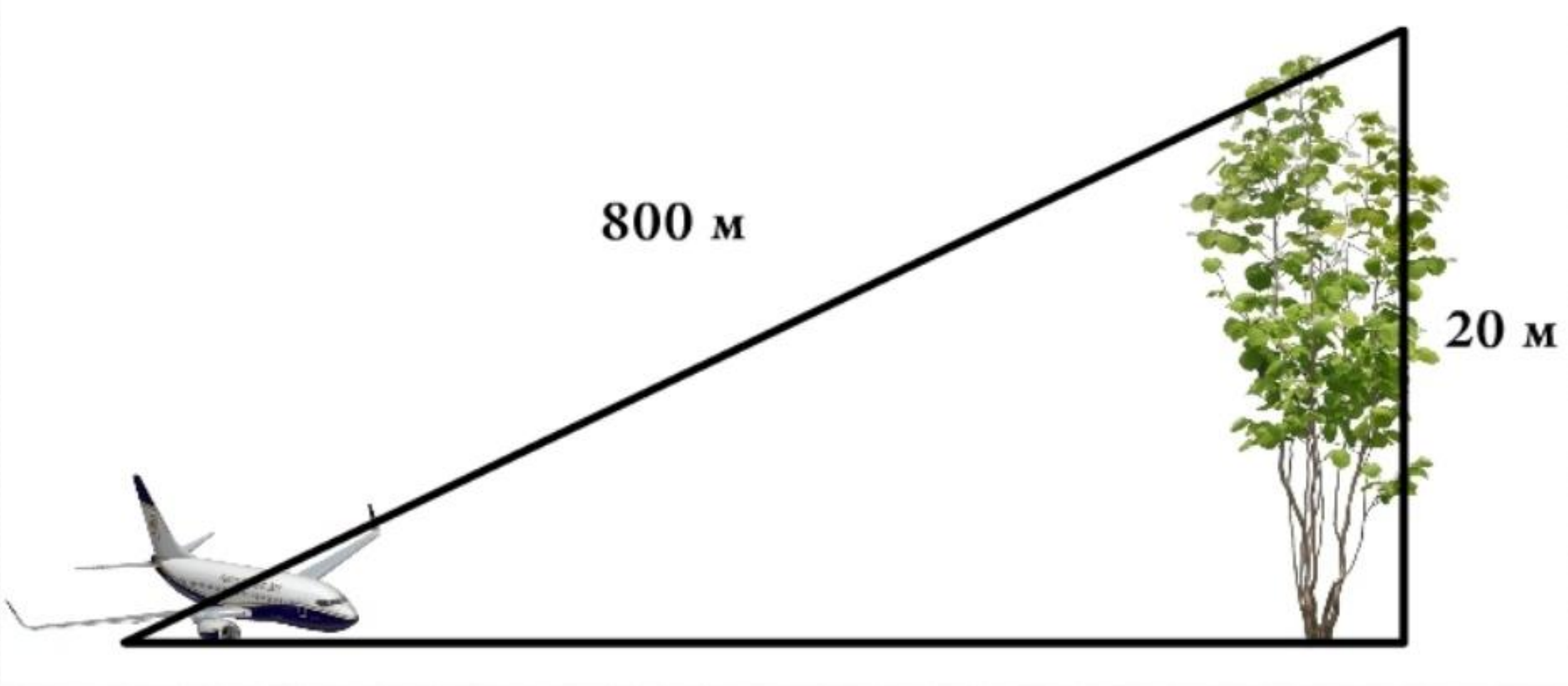
Ресторан в Лос-Манантиалесе в Аргентине

Мост в Сингапуре

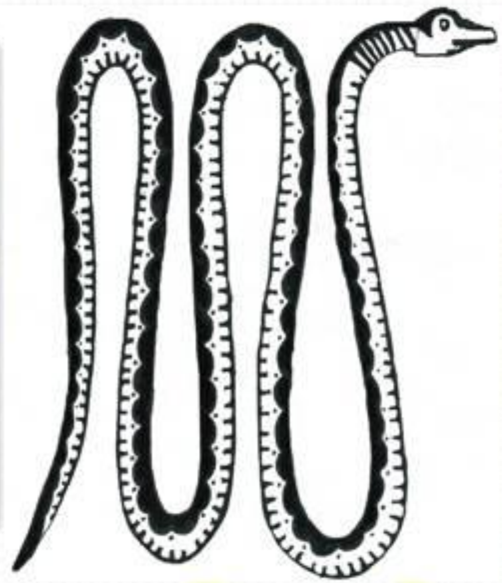
# Тригонометрия в пожарной службе

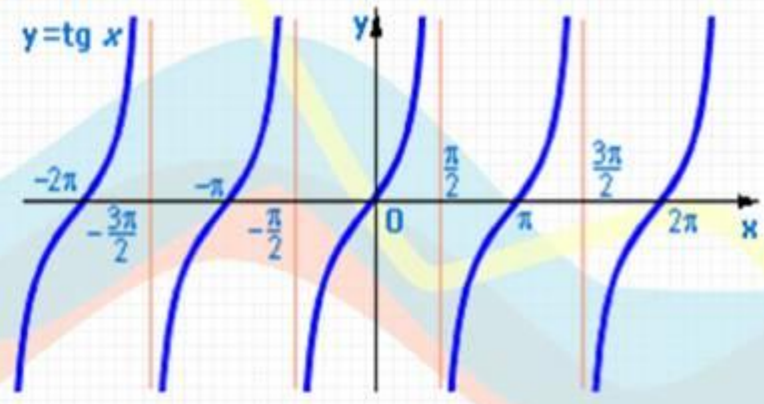


# Тригонометрия в авиации



# Тригонометрия в биологии



# Немного из истории…

1. Древние вавилоняне и египтяне изучали тригонометрию как часть астрономии; разделили окружность на 360°

2. Древние индийцы: ввели названия «синус», «косинус», составили таблицы синусов, косинусов

3. IX-XVвв – Средний и Ближний восток: составляли таблицы котангенса, тангенса, косеканса; ввели понятие единичной окружности

# Немного из истории…

4. Насир ад-Дин Мухаммад ат-Туси (1201-1274) выделил раздел тригонометрии из астрономии.

5. Лев Герсонид (1288-1344) – открыл теорему синусов.

6. XVII-XIXвв: применение тригонометрии в механике, физике, технике, как часть математического анализа (Виетт, Бернулли) – тригонометрические символы, графики – синусоиды.

7. Л.Эйлер: придал тригонометрии современный вид.

# Тригонометрия

*(«три» - три, «гониа» - угол, «метриа» - измеряю)*

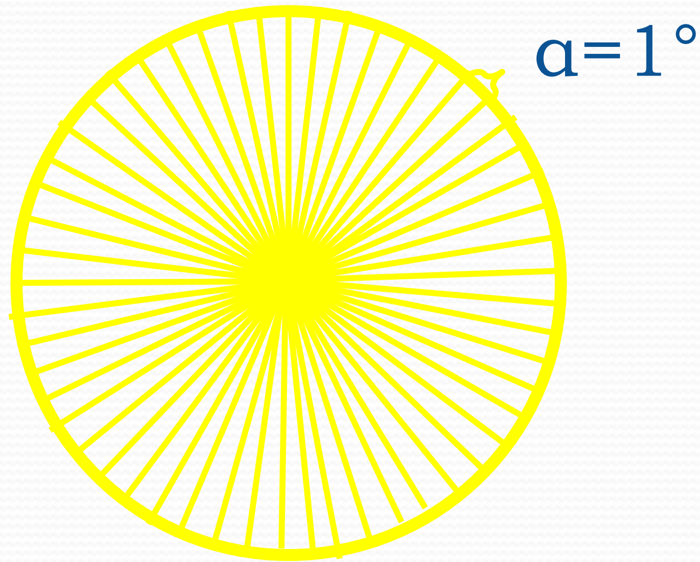
**раздел математики, изучающий соотношение сторон и углов в треугольнике**

# Единицы измерения углов

Градусы

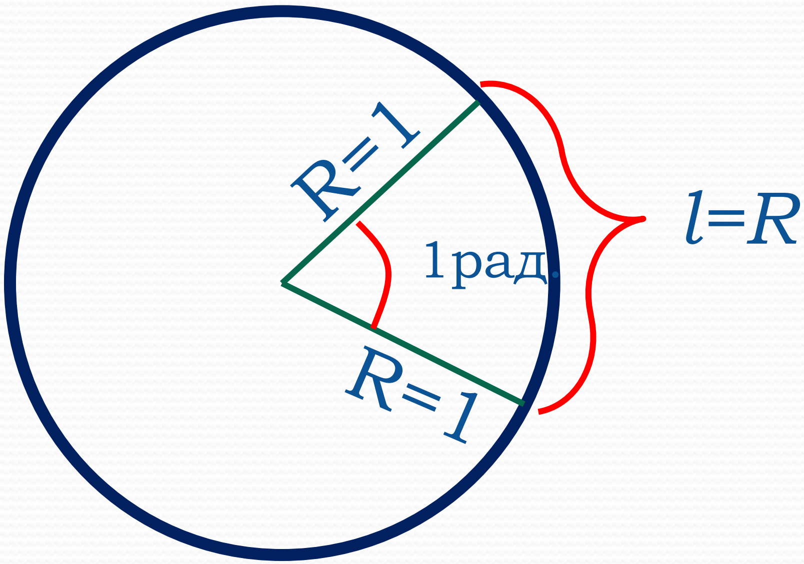
Радианы

# Градусная мера угла




***1° – цена одного деления окружности, разделенной на 360 частей***

# Радианная мера угла




***1 радиан – это величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу***

# Единицы измерения углов

**Радианы**

**Градусы**

$$\pi \text{ радиан} = 180°$$

# Перевод из градусной меры в радианную:

$\pi$ *радиан* $= 180^\circ$

$$\Downarrow$$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}\ \text{рад.}$$

# Пример:

**1.** $30^{\circ} =$

**2.** $90^{\circ} =$

**3.** $135^{\circ} =$

# Пример:

**4.** $36^{\circ} =$

**5.** $45^{\circ} =$

**6.** $720^{\circ} =$

# Пример:

**1.** $30^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 30^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = \dfrac{\pi}{6}\,рад.$

**2.** $90^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 90^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = \dfrac{\pi}{2}\,рад.$

**3.** $135^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 135^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = \dfrac{3\pi}{4}\,рад.$

# Пример:

**4.** $36^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 36^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = \dfrac{\pi}{5}\,рад.$

**5.** $45^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 45^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = \dfrac{\pi}{4}\,рад.$

**6.** $720^{\circ} = \dfrac{\pi \cdot 720^{\circ}}{180^{\circ}}\,рад. = 4\pi\ рад.$

# Перевод из радианной меры в градусную:

$$\pi \text{ радиан} = 180°$$

# Пример:

**1.** $$\frac{\pi}{3} рад. = \frac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$$

**2.** $$\frac{\pi}{4} рад.$$

**3.** $$\frac{4\pi}{5} рад.$$

# Пример:

**1.** $$\frac{\pi}{3}\,рад. = \frac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$$

**2.** $$\frac{\pi}{4}\,рад. = \frac{180^{\circ}}{4} = 45^{\circ}$$

**3.** $$\frac{4\pi}{5}\,рад. = \frac{4\cdot 180^{\circ}}{5} = 144^{\circ}$$

# №1: Переведите в радианную меру углы:

| | | |
|---|---|---|
| 1) 45° | 4) 100° | 7) 215° |
| 2) 15° | 5) 200° | 8) 150° |
| 3) 72° | 6) 360° | 9) 330° |

# №2: Переведите в градусную меру углы:

1) $\frac{\pi}{9}$ *рад.*

2) $\frac{\pi}{5}$ *рад.*

3) $\frac{5\pi}{12}$ *рад.*

4) $\frac{\pi}{4}$ *рад.*

5) $\frac{4\pi}{3}$ *рад.*

6) $\frac{3\pi}{4}$ *рад.*

# Перевод из градусной меры в радианную:

$$n^{\circ} = \frac{\pi \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}} \, рад.$$

# Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\,рад.} = n \cdot 180^{\circ}$$

# Самостоятельная работа

**I вариант**

**1. Переведите в радианную меру углы:**

1) $60°$
2) $145°$
3) $240°$

**2. Переведите в градусную меру углы:**

1) $\frac{2\pi}{5}\ рад.$
2) $\frac{8\pi}{3}\ рад.$

**II вариант**

**1. Переведите в радианную меру углы:**

1) $320°$
2) $105°$
3) $40°$

**2. Переведите в градусную меру углы:**

1) $\frac{9\pi}{4}\ рад.$
2) $\frac{5\pi}{6}\ рад.$

# Ответы

**I вариант**

***1.***

1) $\frac{\pi}{3}$ *рад.*

2) $\frac{29\pi}{36}$ *рад.*

3) $\frac{4\pi}{3}$ *рад.*

***2.***

1) 72°

2) 480°

**II вариант**

1) $\frac{16\pi}{9}$ *рад.*

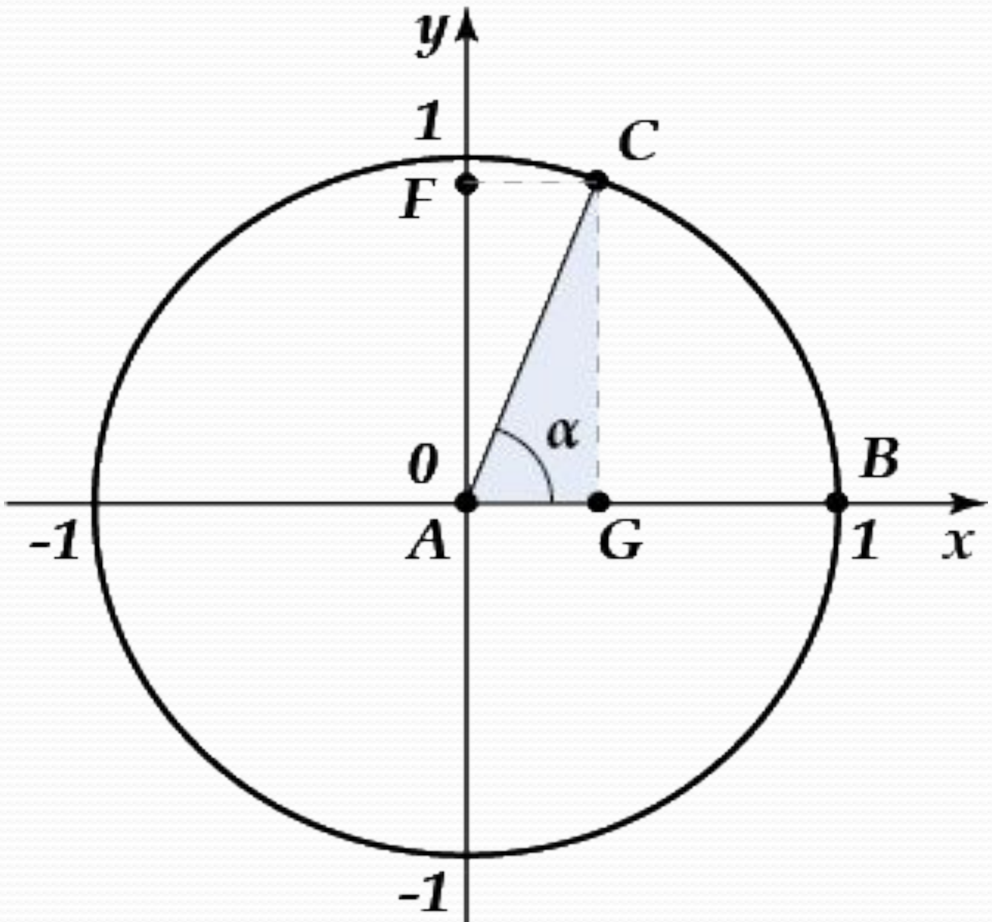
2) $\frac{7\pi}{12}$ *рад.*

3) $\frac{2\pi}{9}$ *рад.*

1) 405°

2) 150°

# Окружность с радиусом, равным 1называется **единичной**.



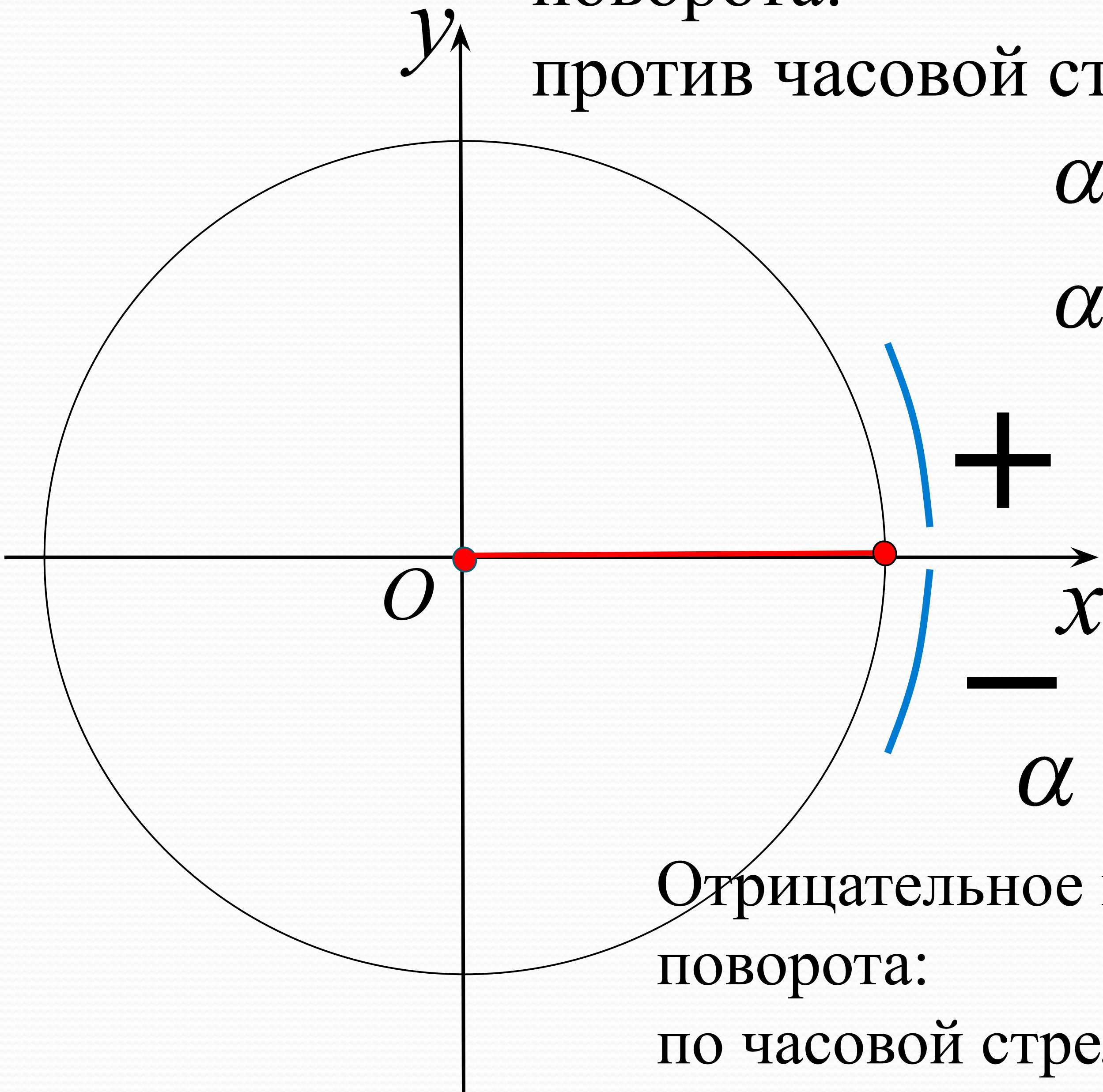

Единичная окружность $r = 1$

Данная окружность построена в декартовой системе координат. Радиус окружности равен единице, при этом центр окружности лежит в начале координат, начальное положение радиуса-вектора зафиксировано вдоль положительного направления оси x (в нашем примере, это радиус AB).

Положительное направление поворота:
против часовой стрелки.

$$\alpha = 47^0$$

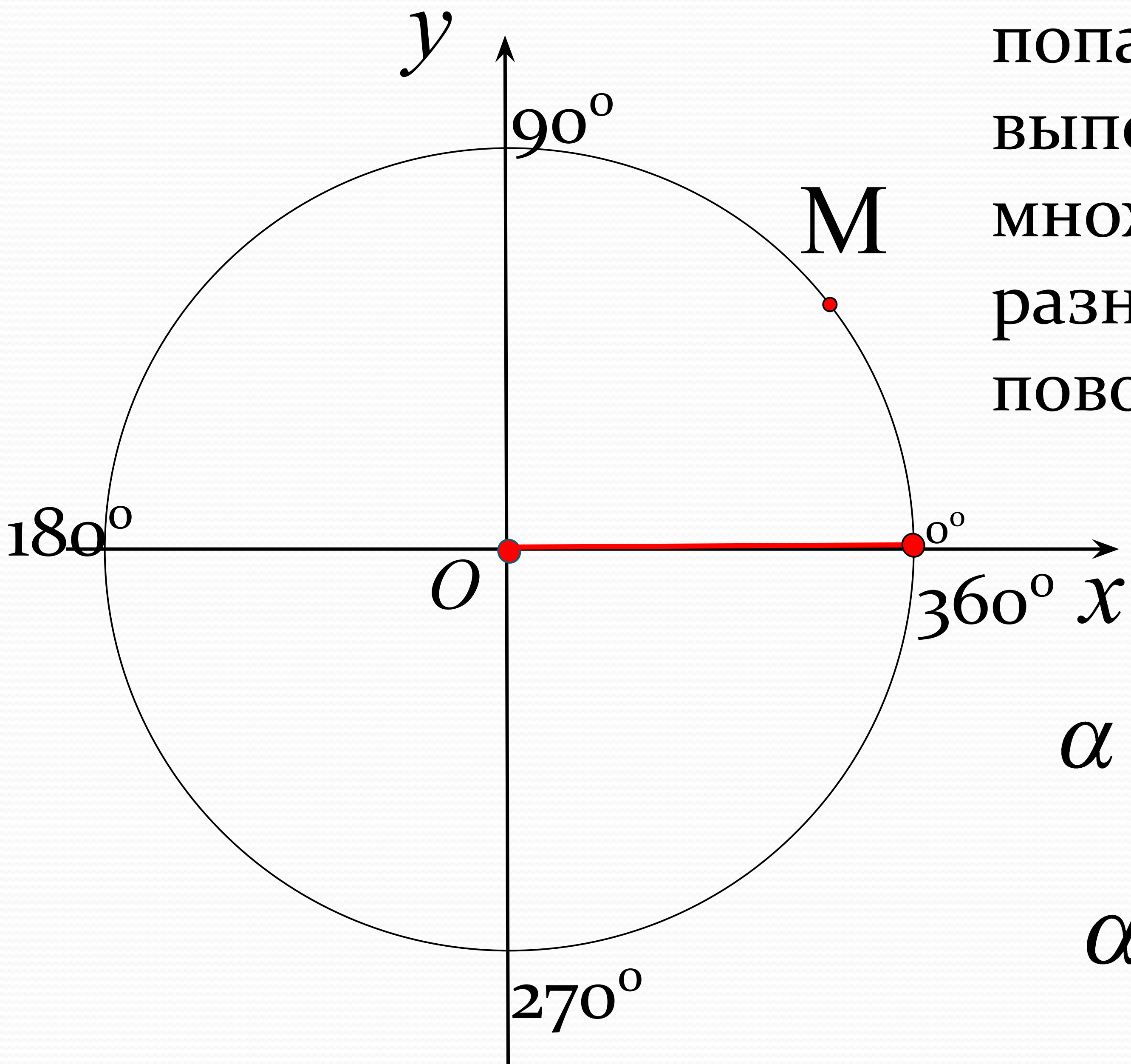
$$\alpha = 497^0$$




$$\alpha = -323^0$$

Отрицательное направление поворота:
по часовой стрелке.

# Поворот




В т. М можем попасть, выполнив множество разных поворотов.

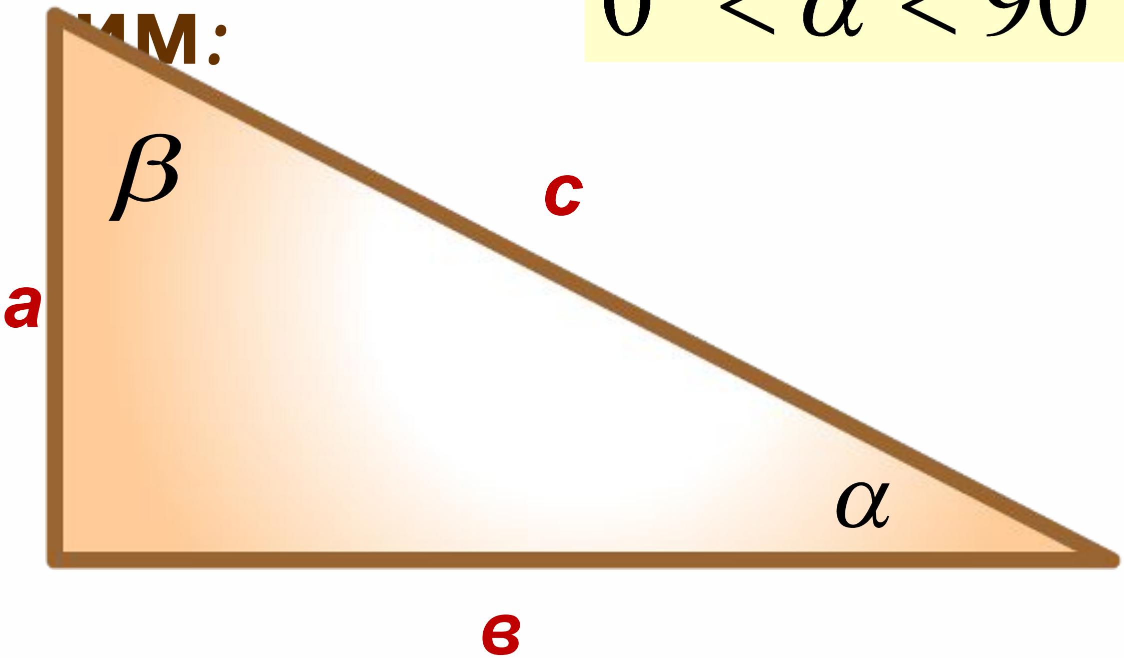
$$\alpha = 37^0$$

$$\alpha = -323^0$$

$$\alpha = 397^0$$

# Вспомним:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$




$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

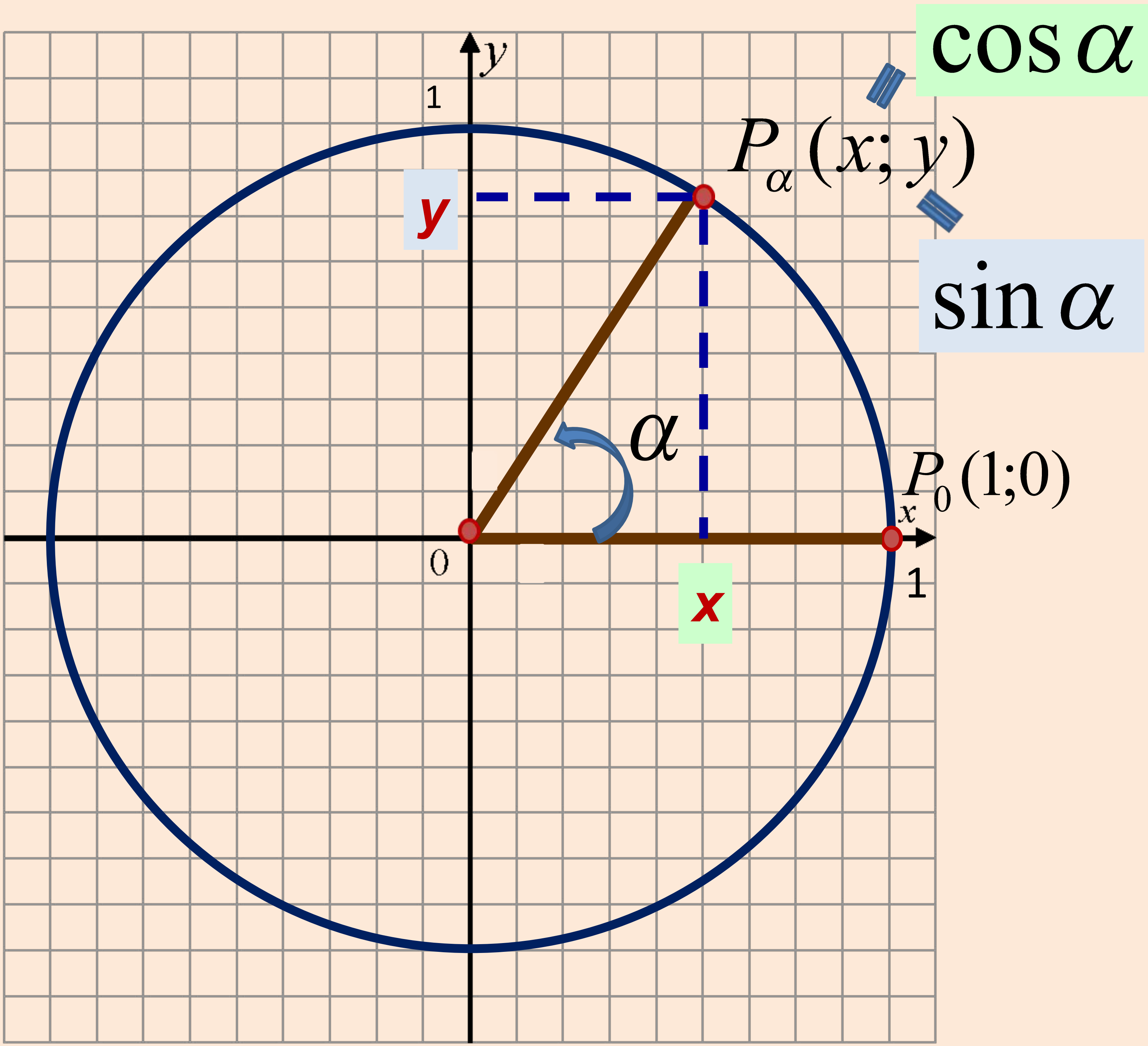
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

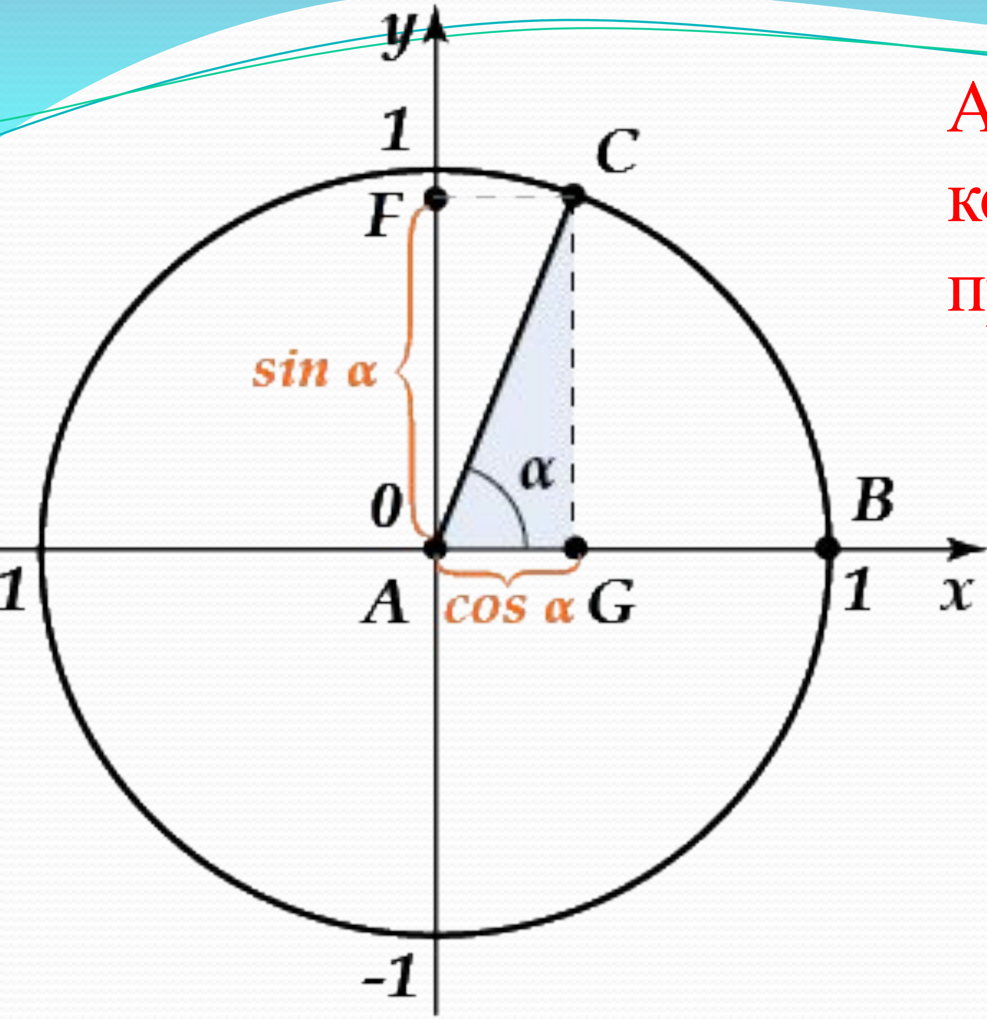
**Синус** острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

**Косинус** — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

**Тангенс** — отношение противолежащего



cos α
=
P_α(x; y)
=
sin α
y
1
y
α
P_0(1;0)
x
0
1
x




А можно сказать, какие координаты имеет точка С, принадлежащая окружности?

А если сообразить, что cos α и sinα - это просто числа?

Какой координате соответствует **sinα**?

Ну, конечно, **координате х**!

А какой координате соответствует **cos α**?

Все верно, координате у!

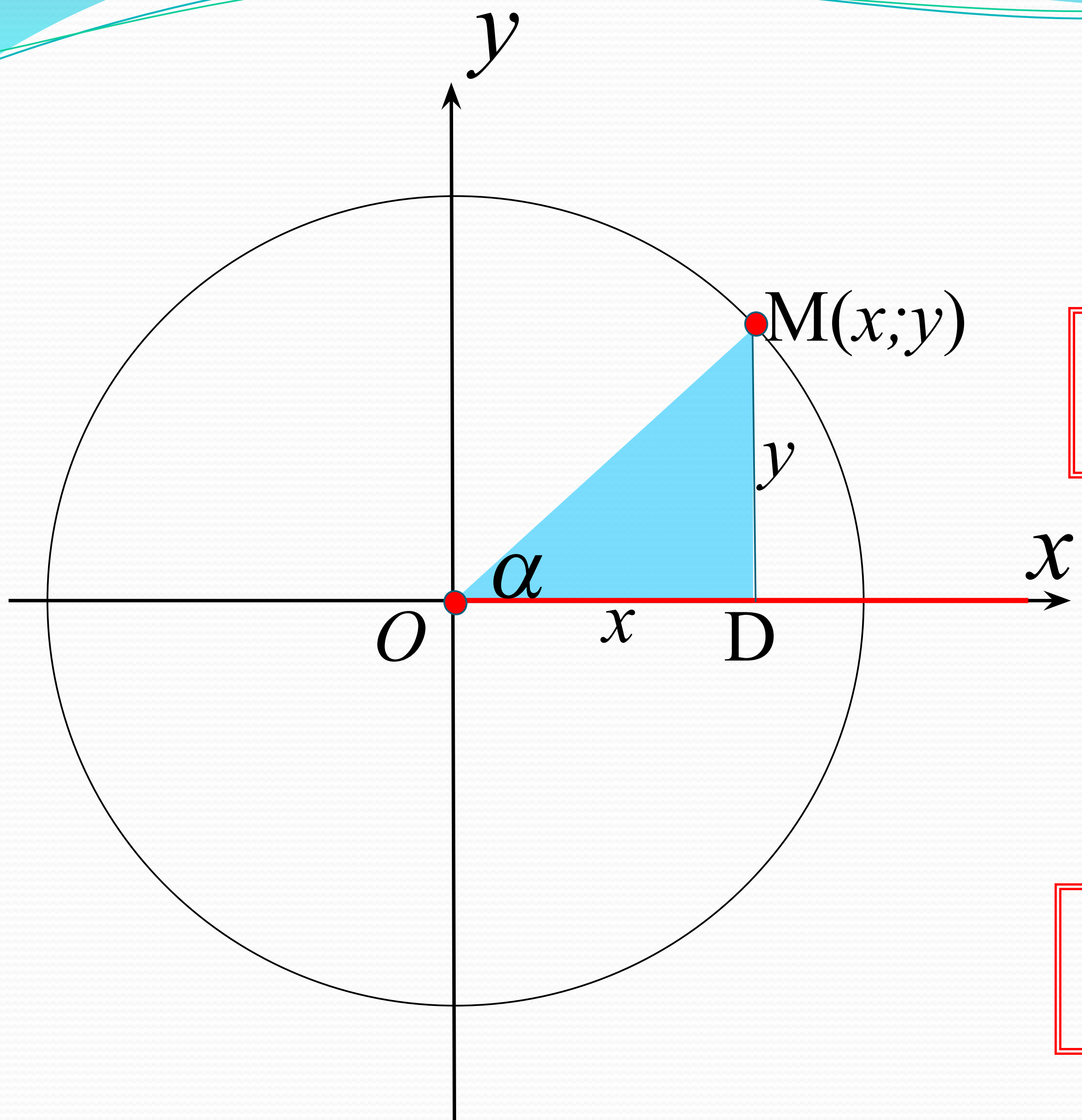
Таким образом,

точка **C(x;y)=C(cosα;sinα).**

$$\cos\alpha = x$$

$$\sin\alpha = y$$

# Единичная окружность $r = 1$




$$tg\alpha = \frac{MD}{OD}$$

$$tg = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$ *

$$ctg\alpha = \frac{OD}{DM}$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$ *

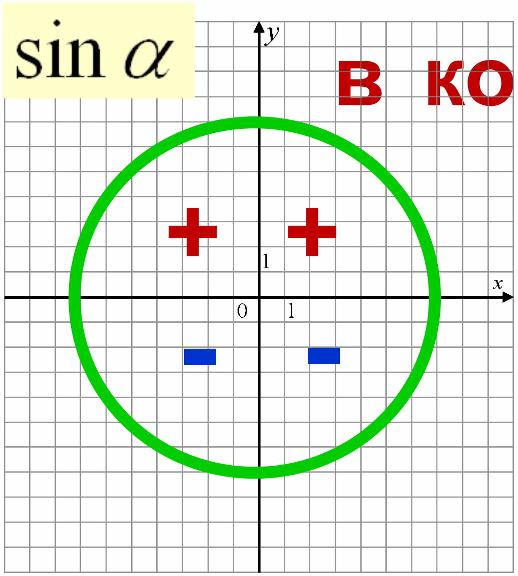
Синусом угла $\alpha$ называется ордината у точки М, а косинусом угла $\alpha$ – абсцисса $x$ точки М.

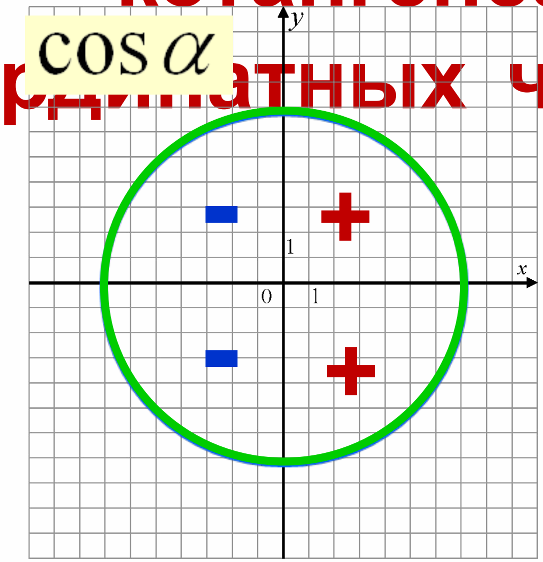
$$\sin\ a = y; \qquad \cos\ a = x$$

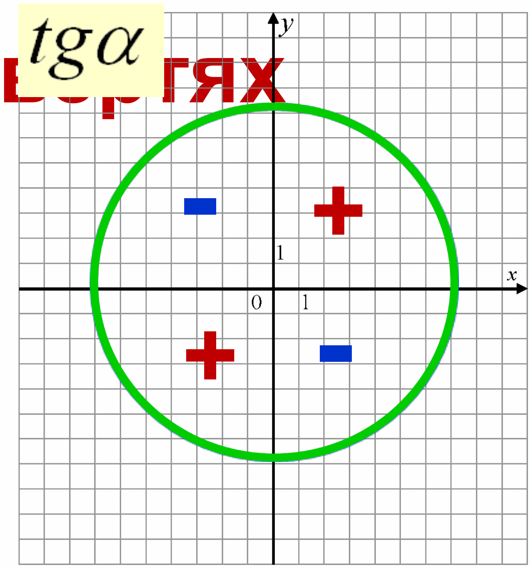
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

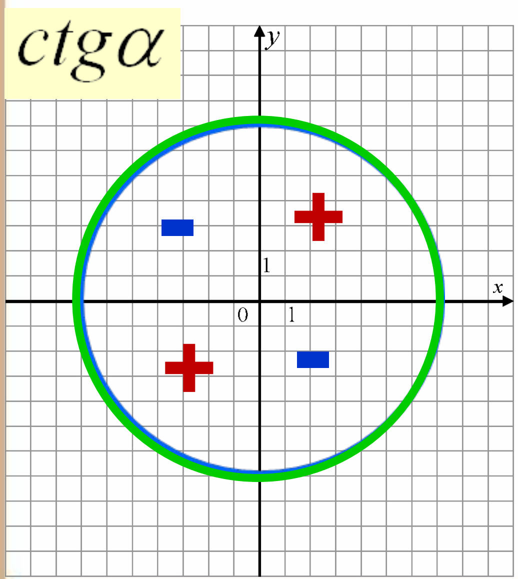
$$\mathrm{tg}\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

# Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях




$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$tg 127^\circ < 0$$

$$ctg 195^\circ > 0$$

# Четность, нечетность синуса, косинуса, тангенса, котангенса

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

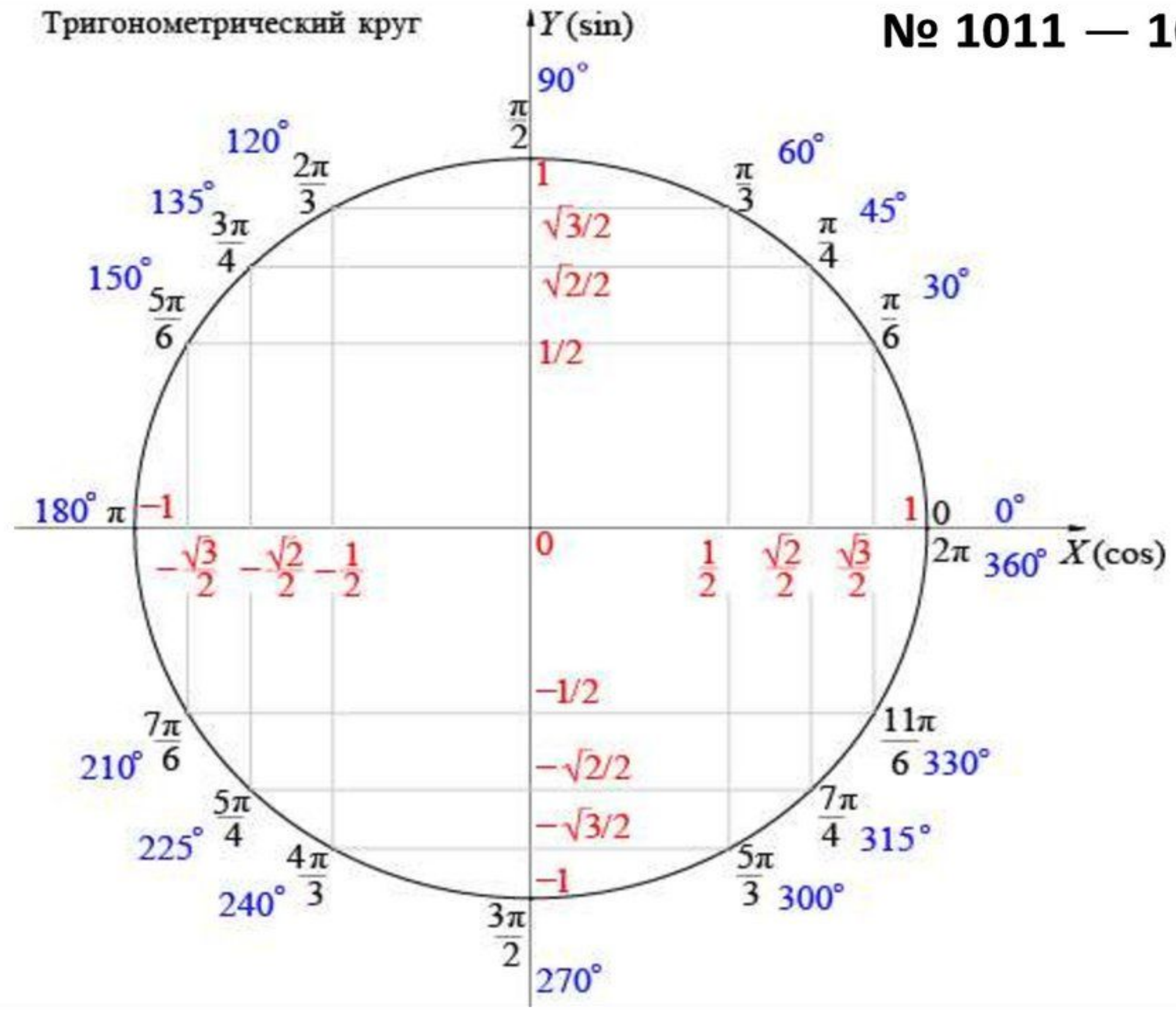
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

**Нечетные функции**

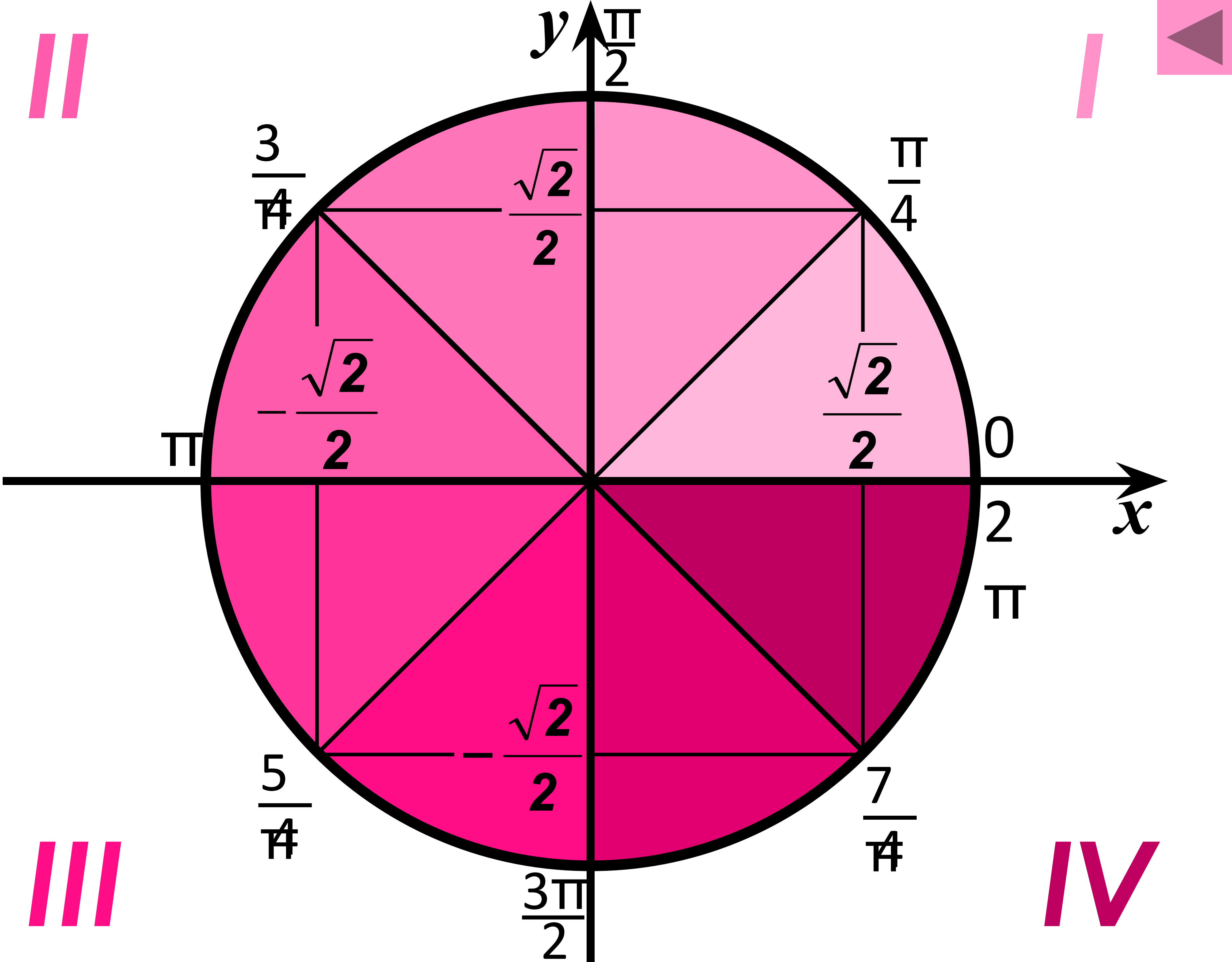
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

**Четная функция**

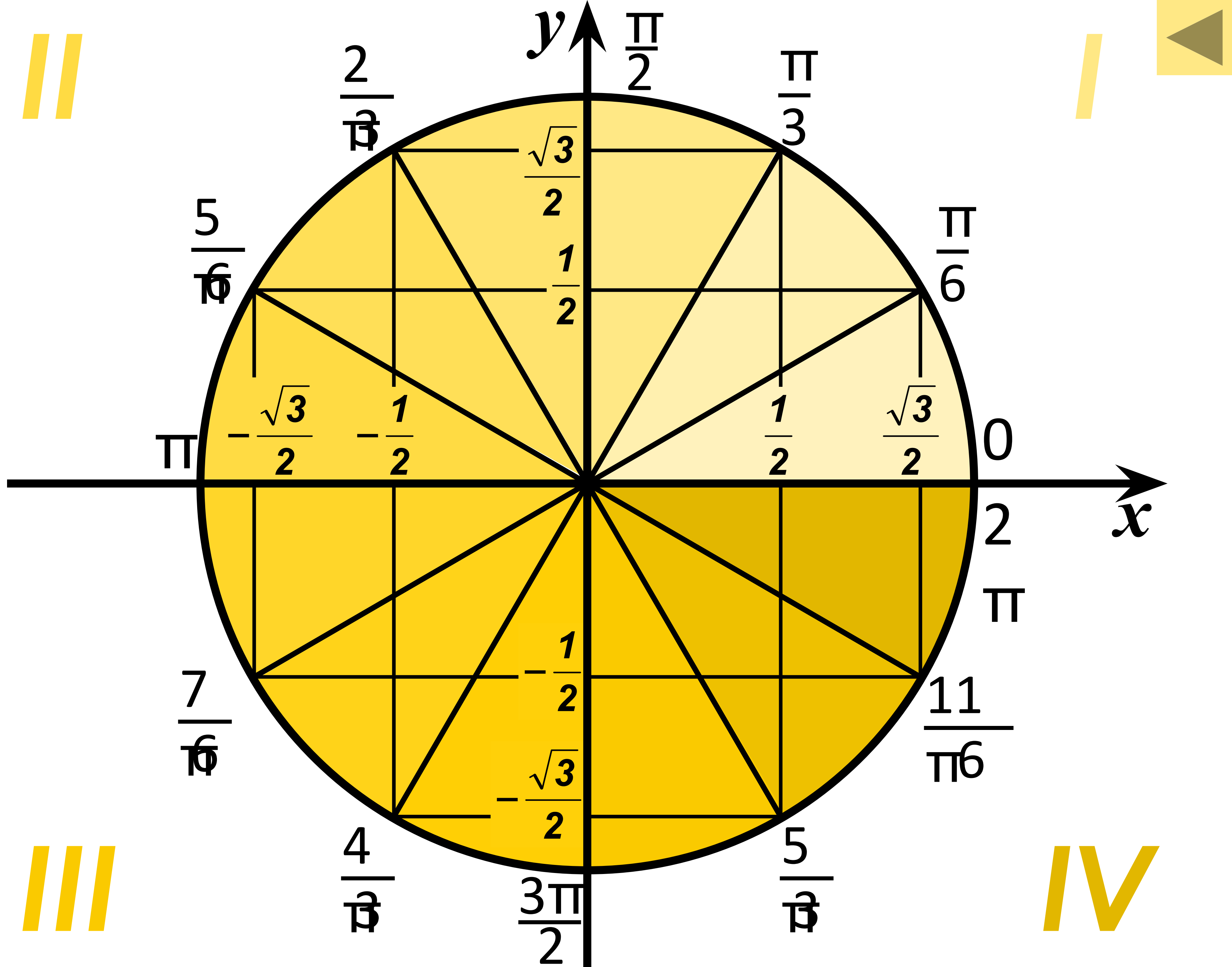
## № 1011 — 1017



Тригонометрический круг
Y (sin)
X (cos)
90°
π/2
60°
π/3
45°
π/4
30°
π/6
0°
0
360°
2π
120°
2π/3
135°
3π/4
150°
5π/6
180°
π
210°
7π/6
225°
5π/4
240°
4π/3
270°
3π/2
300°
5π/3
315°
7π/4
330°
11π/6
1
√3/2
√2/2
1/2
0
−1/2
−√2/2
−√3/2
−1
−√3/2
−√2/2
−1/2
1/2
√2/2
√3/2



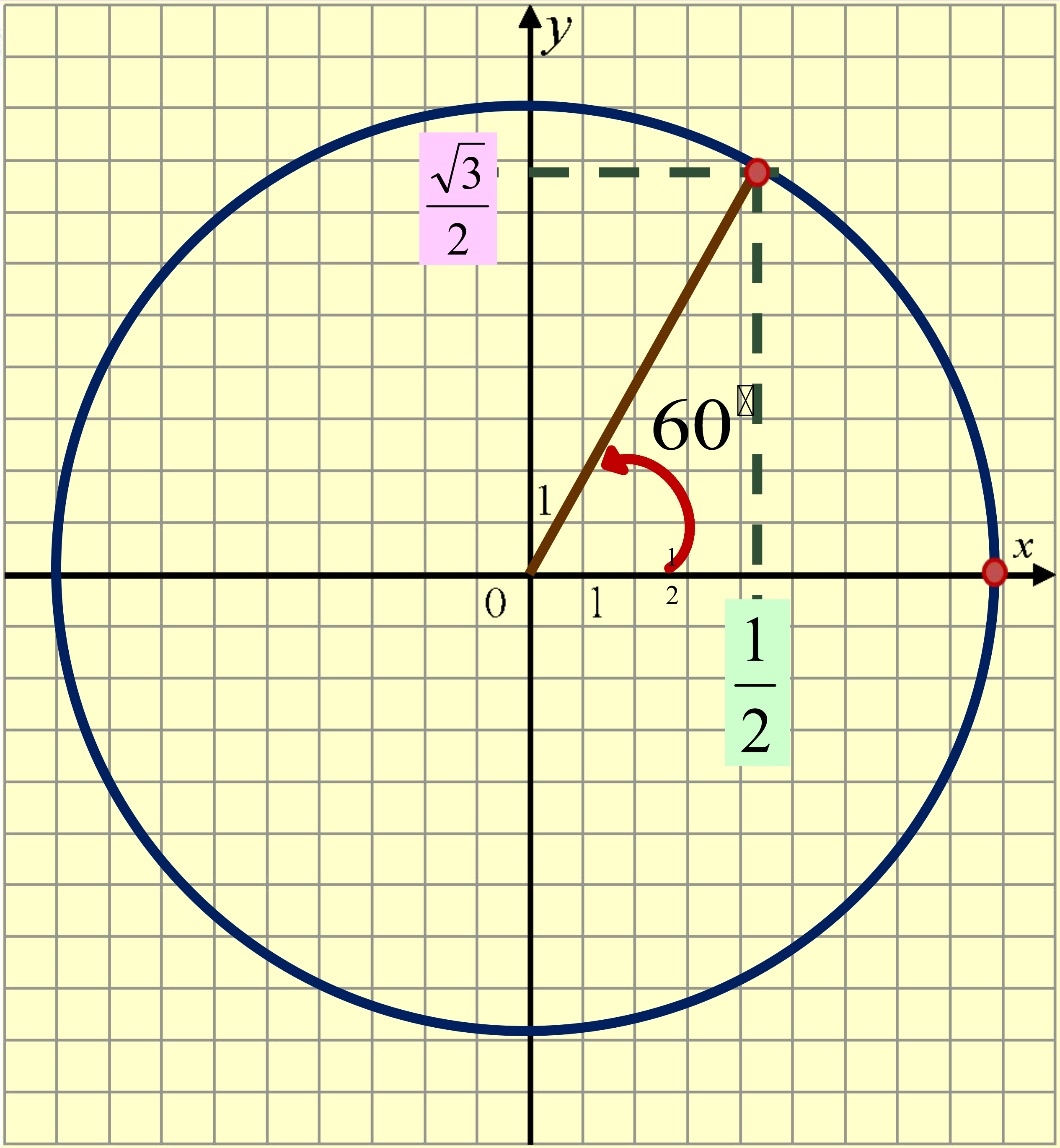
II
I
III
IV
y
x
π/2
π/4
3π/4
π
0
2π
5π/4
3π/2
7π/4
√2/2
−√2/2



y
x
II
I
III
IV
π/2
π/3
2π/3
π/6
5π/6
0
2π
π
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2
√3/2
1/2
−√3/2
−1/2

# ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

| $\alpha^0$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $Sin\,\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| $Cos\,\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $tg\,\alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | -1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | -1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| $ctg\,\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |




$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\sin 780^\circ$ – ?

$\cos 780^\circ$ – ?

$$\sin 780^\circ = \\ = \sin(60^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \\ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 780^\circ = \\ = \cos(60^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \\ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 765^\circ =$$
$$= \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ =$$
$$= \cos(30^\circ + 3\cdot 360^\circ) =$$
$$= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4\cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2\cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2{,}5\pi = \sin(0{,}5\pi + 2\pi) = \sin 0{,}5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos(-\frac{9\pi}{4}) = \cos(2\frac{1}{4}\pi) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{13\pi}{6} = tg(2\frac{1}{6}\pi) = tg(\frac{\pi}{6} + 2\pi) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg(-\frac{7\pi}{3}) = -ctg(2\frac{1}{3}\pi) = -ctg(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

# Домашнее задание

1) Выучить формулы перевода из градусной меры угла в радианную и обратно.
2) Выучить определения sin, cos, tg, ctg

3) Переведите в радианную меру углы:
$75°$, $15°$, $130°$, $220°$, $340°$

4) Переведите в градусную меру углы:

$$\frac{\pi}{2}\,\text{рад.},\quad \frac{\pi}{8}\,\text{рад.},\quad \frac{3\pi}{5}\,\text{рад.},\quad \frac{7\pi}{36}\,\text{рад.},\quad \frac{12\pi}{5}\,\text{рад.}$$

# Ответьте на вопросы:

1) Что означает «тригонометрия»?

2) Разделом какой науки являлась тригонометрия в начале развития?

3)Какие единицы измерения углов Вы знаете?

4) Чему равно π радиан?

5) Как перевести из градусной меры в радианную и обратно?

6) Было ли интересно на уроке?