

**Градусная и
радианная меры
угла. Вращательное
движение.**

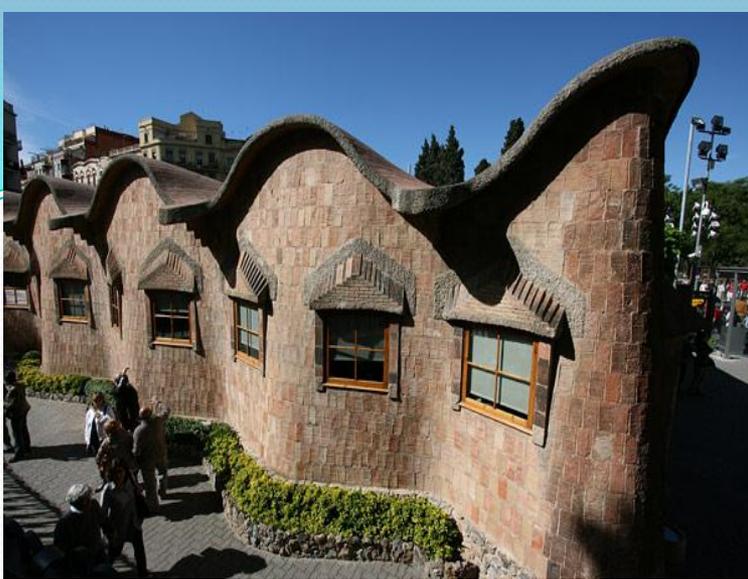
**Синус, косинус,
тангенс и**

Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?

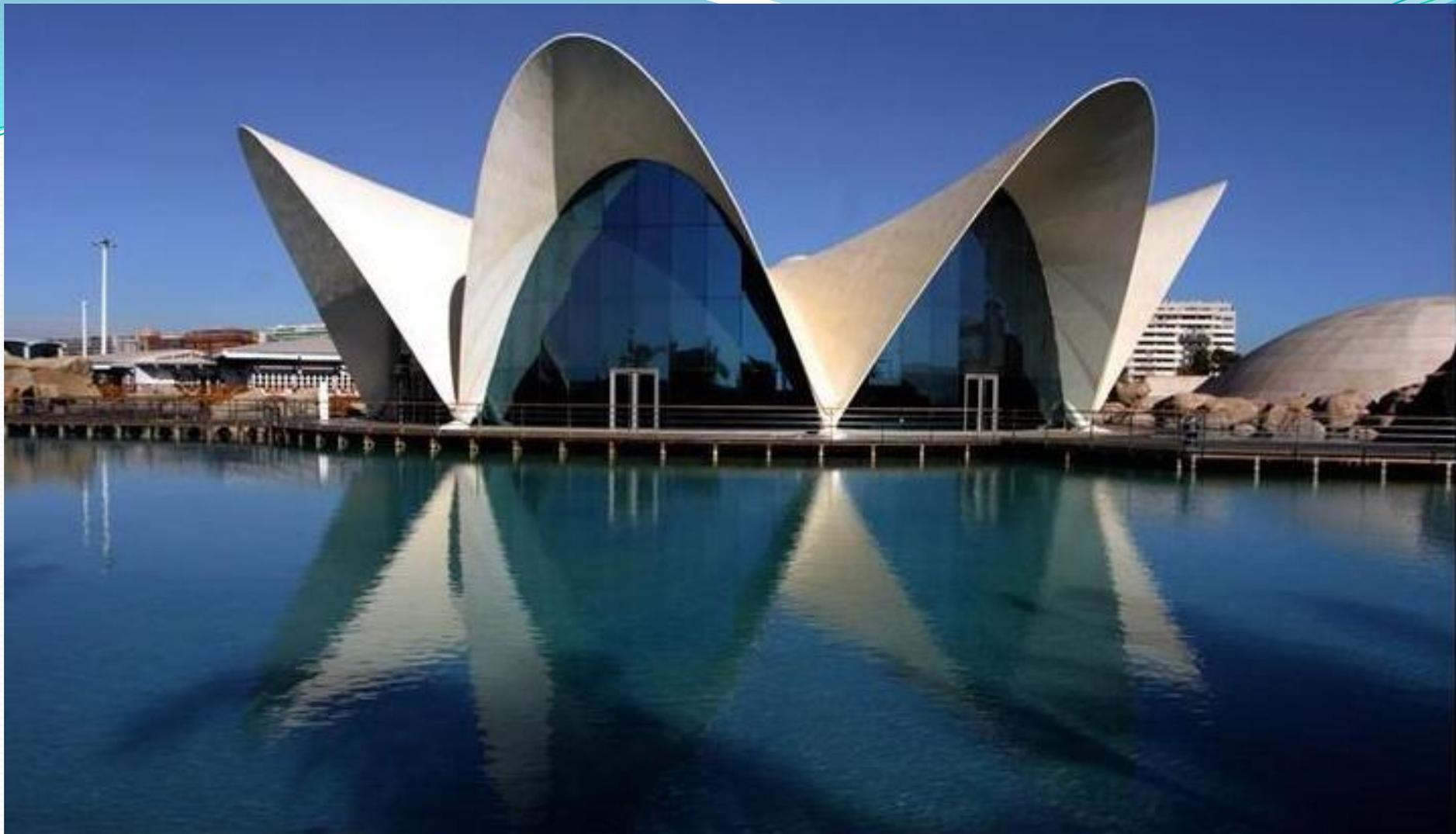
На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.

Тригонометрия в искусстве





Детская
школа
Гауди в
Барселоне

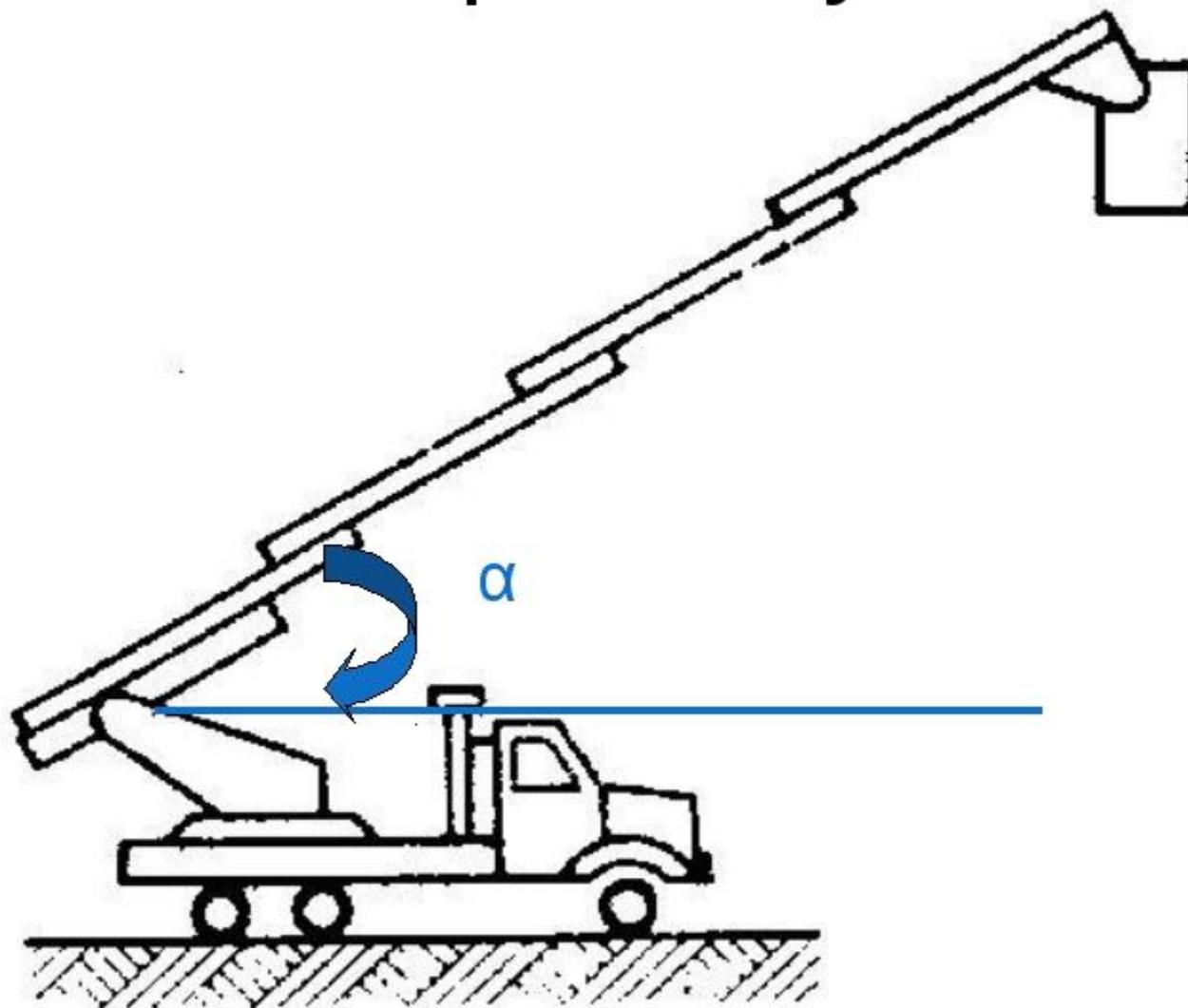


Ресторан в Лос-Манантиалесе в Аргентине

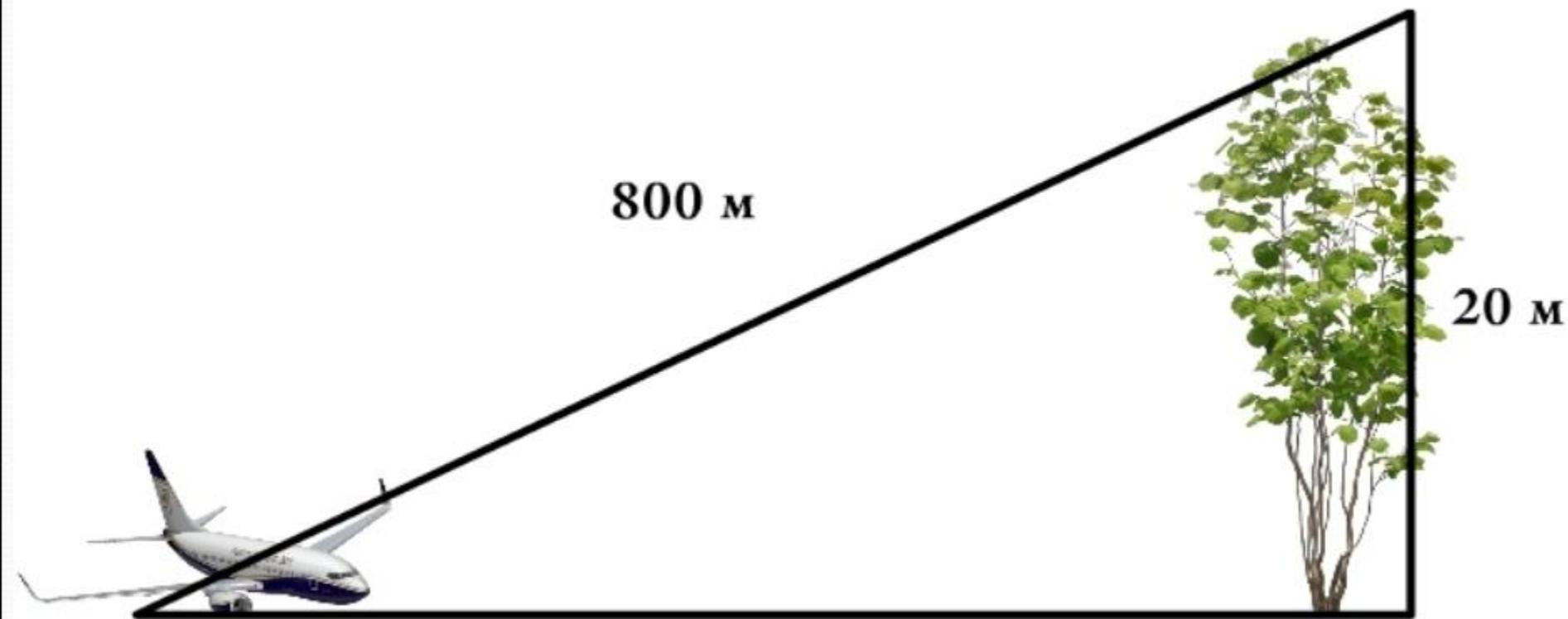


Мост в Сингапуре

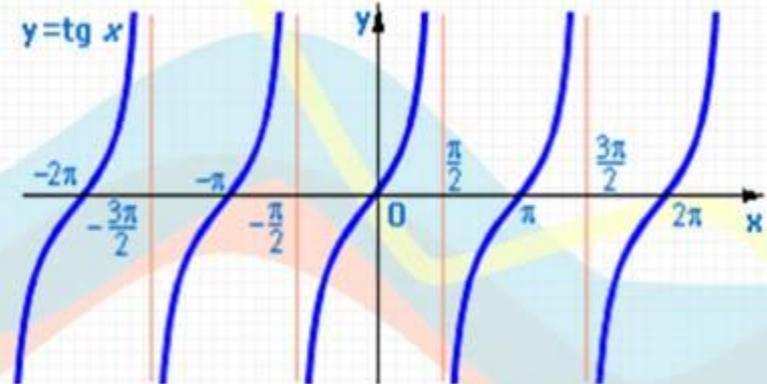
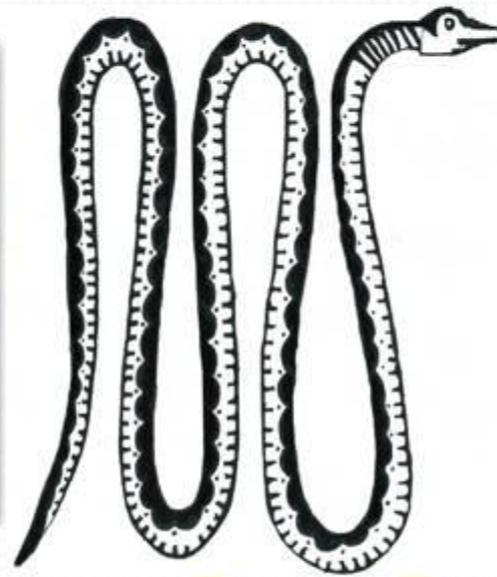
Тригонометрия в пожарной службе



Тригонометрия в авиации



Тригонометрия в биологии



Немного из истории...

- 1. Древние вавилоняне и египтяне изучали тригонометрию как часть астрономии; разделили окружность на 360°**
- 2. Древние индийцы: ввели названия «синус», «косинус», составили таблицы синусов, косинусов**
- 3. IX-XV вв – Средний и Ближний восток: составляли таблицы котангенса, тангенса, косеканса; ввели понятие единичной окружности**

Немного из истории...

4. Насир ад-Дин Мухаммад ат-Туси (1201-1274) выделил раздел тригонометрии из астрономии.

5. Лев Герсонид (1288-1344) – открыл теорему синусов.

6. XVII-XIX вв: применение тригонометрии в механике, физике, технике, как часть математического анализа (Виетт, Бернулли) – тригонометрические символы, графики – синусоиды.

7. Л.Эйлер: придал тригонометрии современный вид.

Тригонометрия

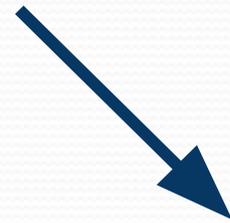
*(«три» - три, «гониа» - угол,
«метрия» - измеряю)*

**раздел математики,
изучающий
соотношение сторон и
углов в треугольнике**

Единицы измерения углов

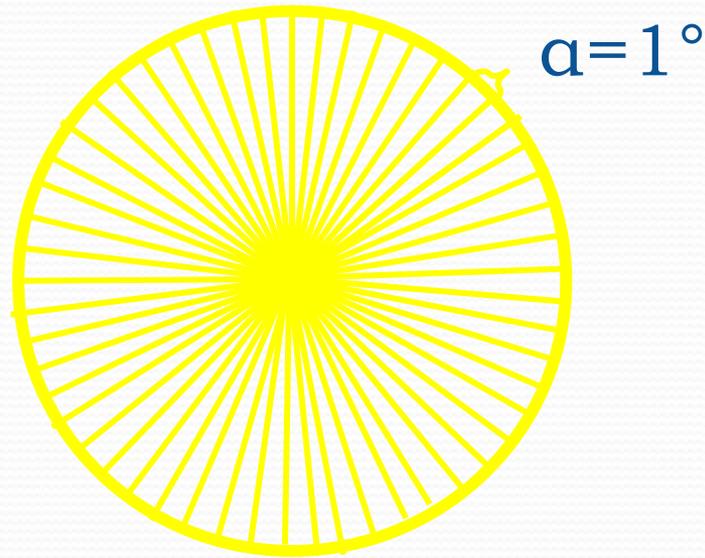


Градусы



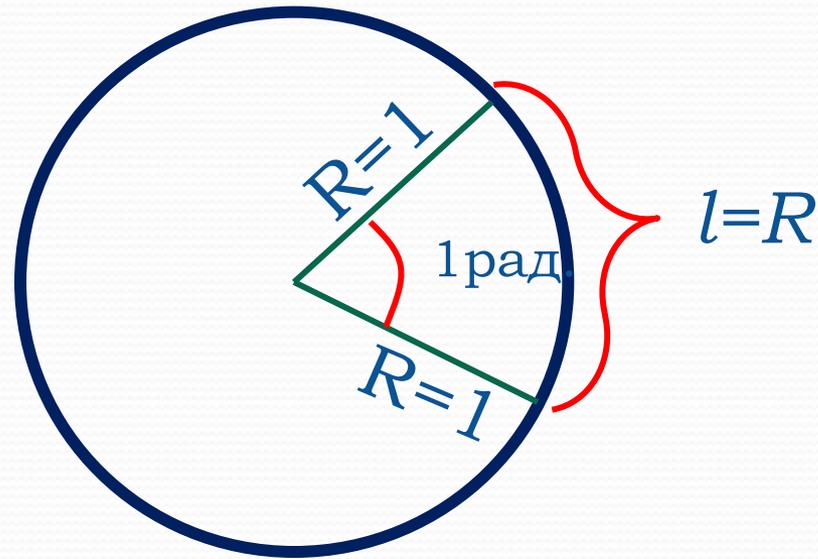
Радианы

Градусная мера угла



***1° – цена одного деления
окружности, разделенной
на 360 частей***

Радианная мера угла



1 радиан – это величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу

Единицы измерения

углов

Радианы

Градусы

π

$$\text{радиан} = 180^\circ$$

Перевод из градусной меры в радианную:

π

радиан $\leftrightarrow 180^\circ$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

Пример:

$$1. 30^{\boxtimes} =$$

$$2. 90^{\boxtimes} =$$

$$3. 135^{\boxtimes} =$$

Пример:

$$4. 36^{\boxtimes} =$$

$$5. 45^{\boxtimes} =$$

$$6. 720^{\boxtimes} =$$

Пример:

$$1. 30^\circ = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = \frac{\pi}{6} \text{ рад.}$$

$$2. 90^\circ = \frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

$$3. 135^\circ = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад.}$$

Пример:

$$4. 36^\circ = \frac{\pi \cdot 36^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = \frac{\pi}{5} \text{ рад.}$$

$$5. 45^\circ = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = \frac{\pi}{4} \text{ рад.}$$

$$6. 720^\circ = \frac{\pi \cdot 720^\circ}{180^\circ} \text{ рад.} = 4\pi \text{ рад.}$$

Перевод из радианной меры в градусную:

π

радиан \Downarrow 180°

Пример:

$$1. \quad \frac{\pi}{3} \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$2. \quad \frac{\pi}{4} \text{ рад.}$$

$$3. \quad \frac{4\pi}{5} \text{ рад.}$$

Пример:

$$1. \quad \frac{\pi}{3} \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$2. \quad \frac{\pi}{4} \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$3. \quad \frac{4\pi}{5} \text{ рад.} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{5} = 144^\circ$$

№1: Переведите в радианную меру углы:

1) 45°

4) 100°

7) 215°

2) 15°

5) 200°

8) 150°

3) 72°

6) 360°

9) 330°

№2: Переведите в градусную меру углы:

1) $\frac{\pi}{9} \text{ рад.}$

2) $\frac{\pi}{5} \text{ рад.}$

3) $\frac{5\pi}{12} \text{ рад.}$

4) $\frac{\pi}{4} \text{ рад.}$

5) $\frac{4\pi}{3} \text{ рад.}$

6) $\frac{3\pi}{4} \text{ рад.}$

Перевод из градусной меры в радианную:

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180} \text{ рад.}$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\text{рад.}} = n \cdot 180^\circ$$

Самостоятельная работа

I вариант

1. Переведите в радианную меру углы:

- 1) 60°
- 2) 145°
- 3) 240°

II вариант

- 1) 320°
- 2) 105°
- 3) 40°

2. Переведите в градусную меру углы:

- 1) $\frac{2\pi}{5}$ рад.
- 2) $\frac{8\pi}{3}$ рад.

- 1) $\frac{9\pi}{4}$ рад.
- 2) $\frac{5\pi}{6}$ рад.

Ответы

I вариант

1.

1) $\frac{\pi}{3}$ рад.

2) $\frac{29\pi}{36}$ рад.

3) $\frac{4\pi}{3}$ рад.

II вариант

1) $\frac{16\pi}{9}$ рад.

2) $\frac{7\pi}{12}$ рад.

3) $\frac{2\pi}{9}$ рад.

2.

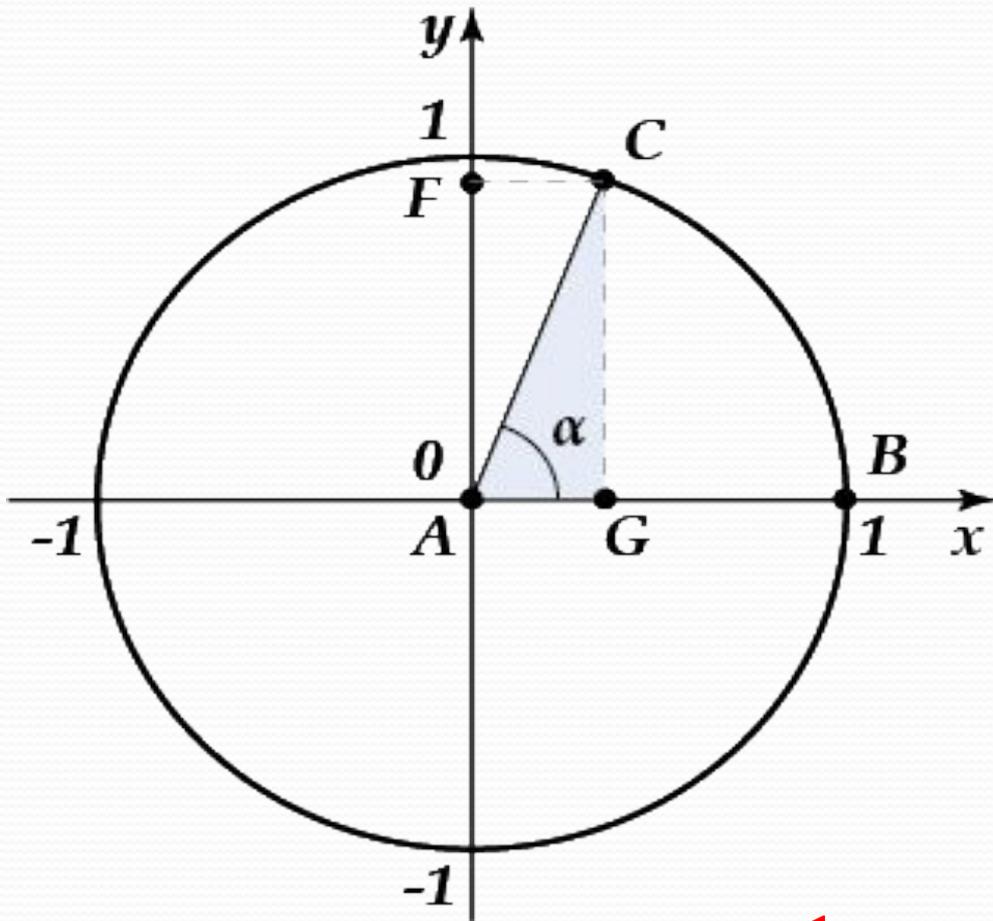
1) 72°

2) 480°

1) 405°

2) 150°

Окружность с радиусом,
равным 1 называется **единичной**.



Единичная окружность $r = 1$

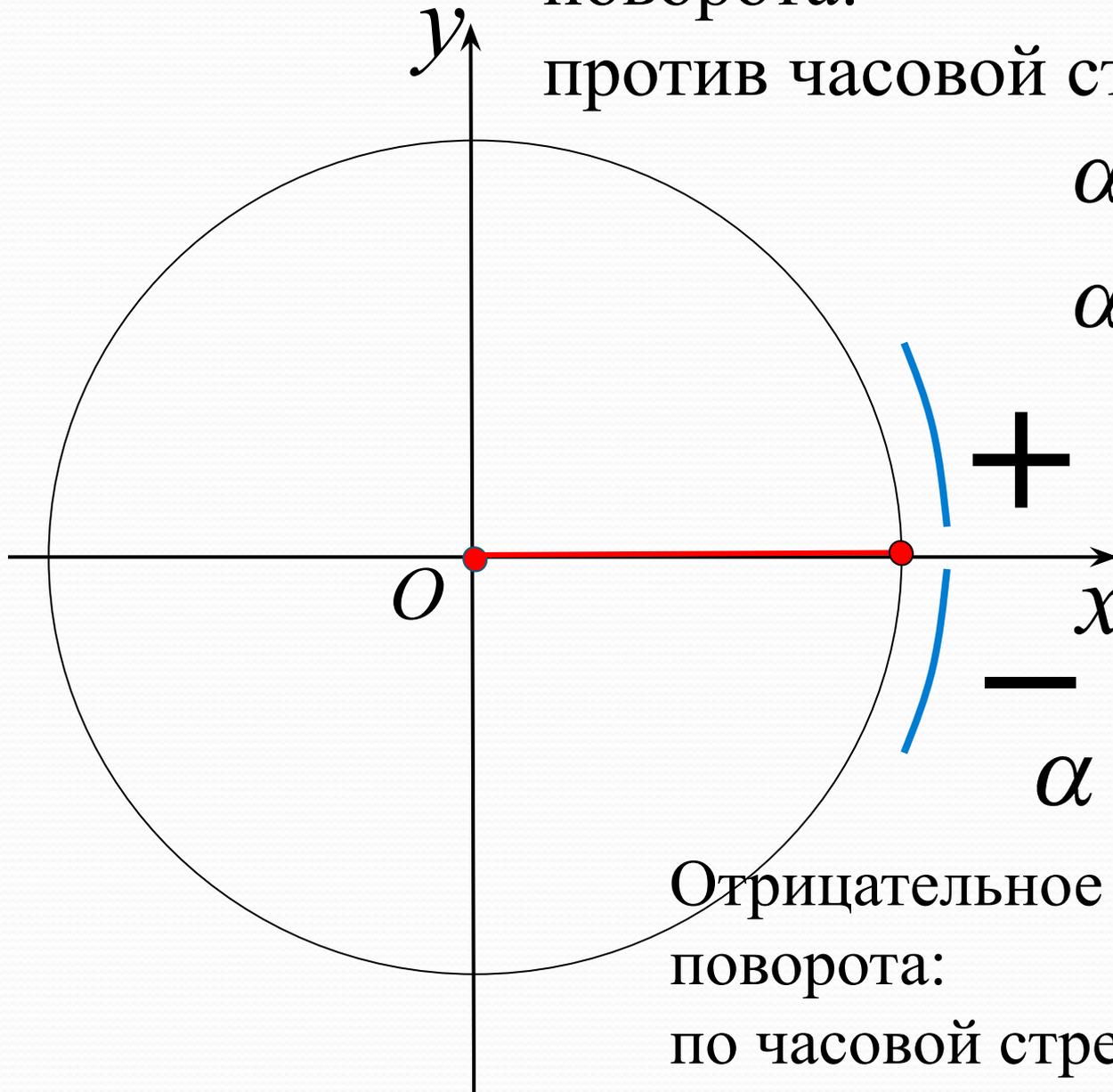
Данная окружность построена в декартовой системе координат. Радиус окружности равен единице, при этом центр окружности лежит в начале координат, начальное положение радиуса-вектора зафиксировано вдоль положительного направления оси x (в нашем примере, это радиус AB).

Положительное направление
поворота:

против часовой стрелки.

$$\alpha = 47^{\circ}$$

$$\alpha = 497^{\circ}$$



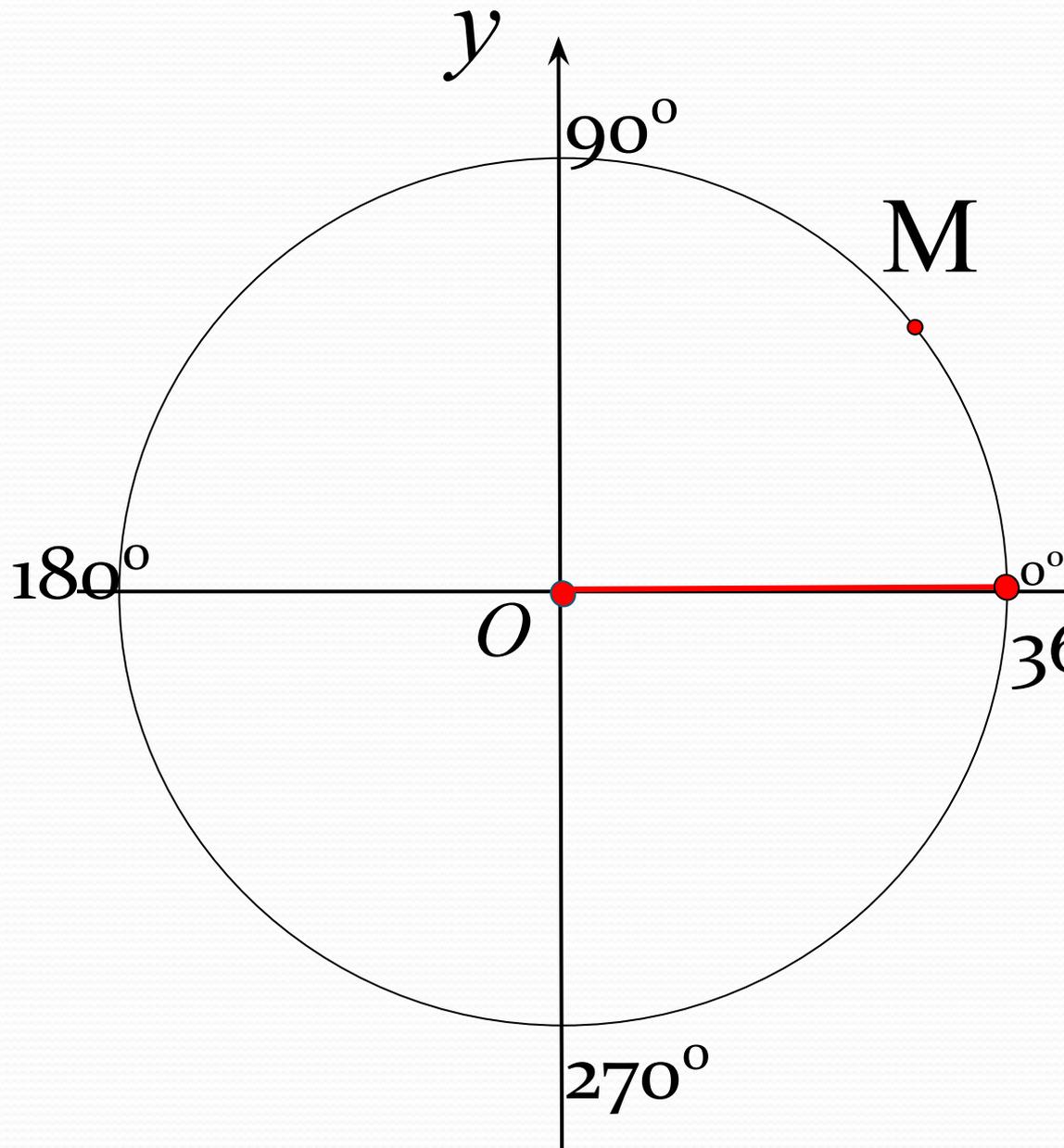
+

-

$$\alpha = -323^{\circ}$$

Отрицательное направление
поворота:
по часовой стрелке.

Поворот



В т. М можем
попасть,
выполнив
множество
разных
поворотов.

$$\alpha = 37^{\circ}$$

$$\alpha = -323^{\circ}$$

$$\alpha = 397^{\circ}$$

Вспомни

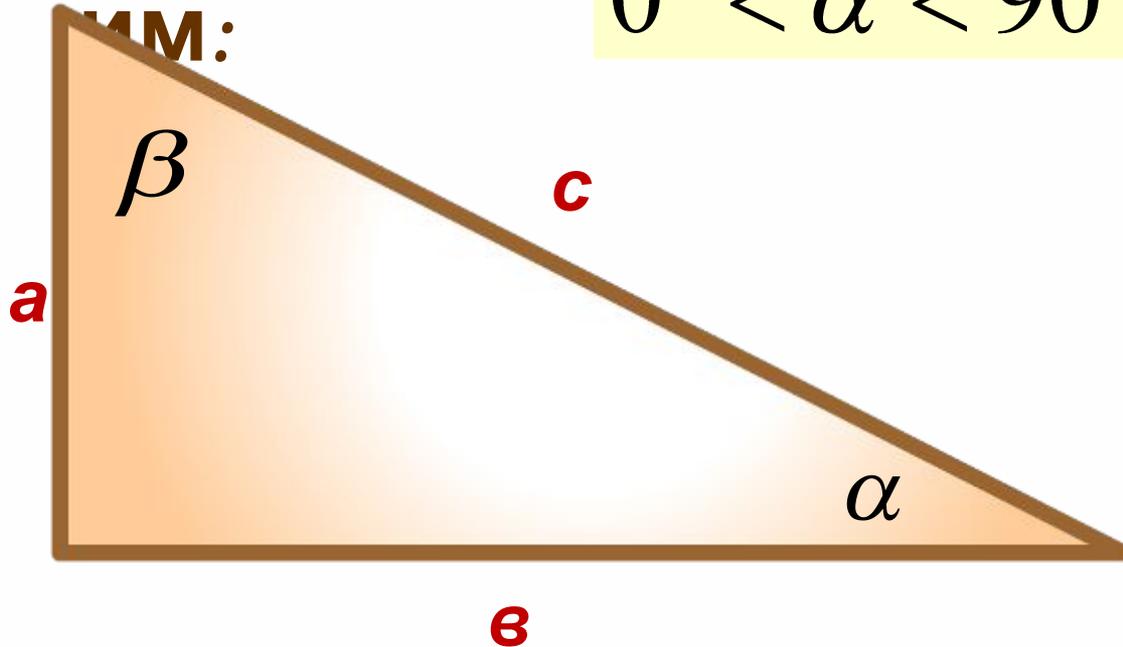
Напомни:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

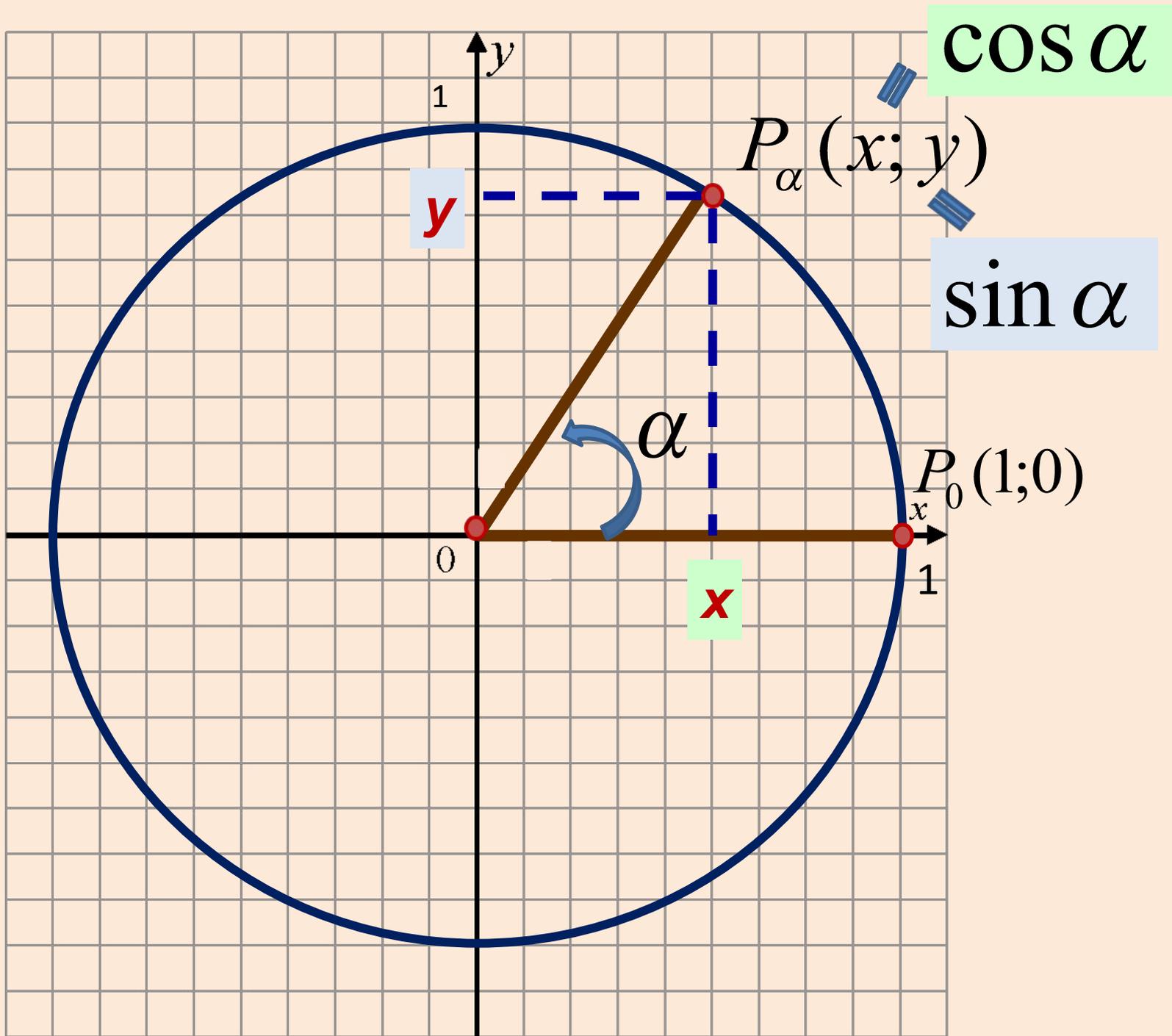
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

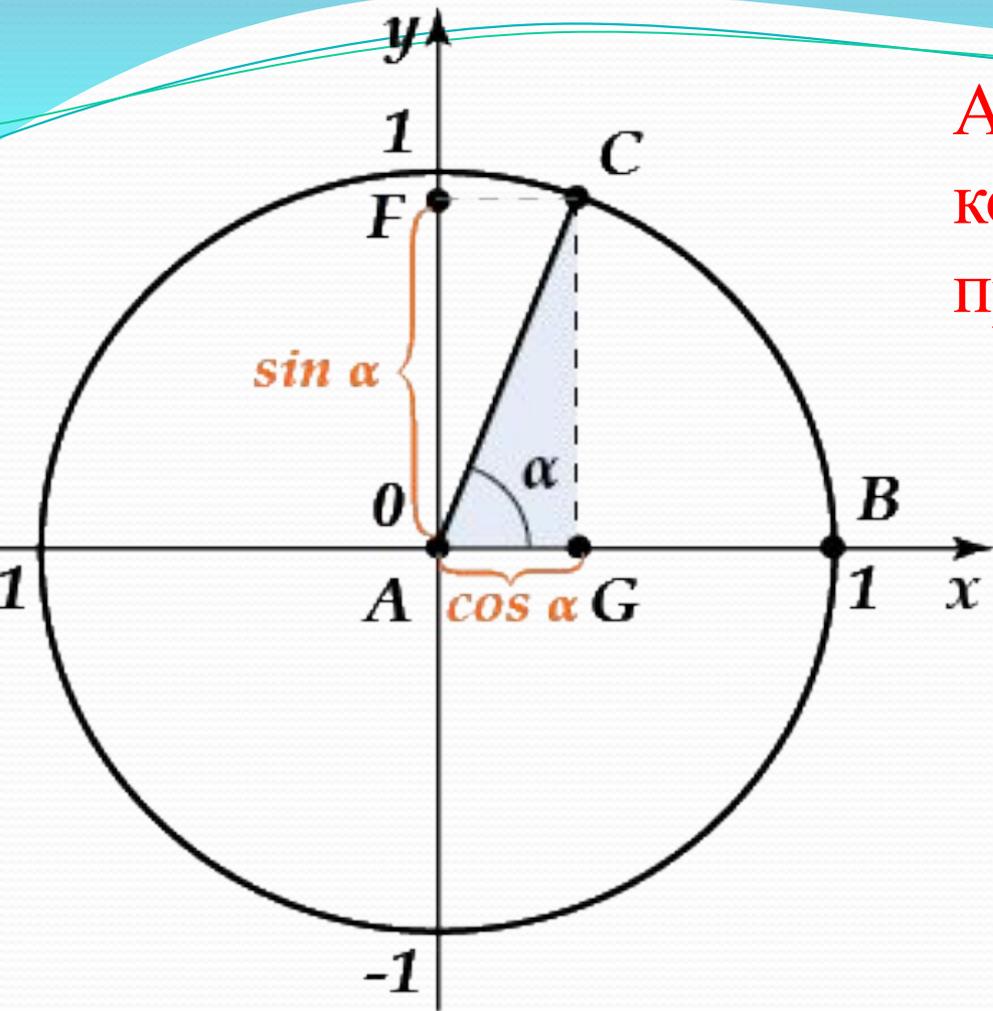


Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс — отношение противолежащего





А можно сказать, какие координаты имеет точка C , принадлежащая окружности?

А если сообразить, что $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ - это просто числа?

Какой координате соответствует $\sin \alpha$?

Ну, конечно, **координате x** !

А какой координате соответствует **$\cos \alpha$** ?

Все верно, **координате y** !

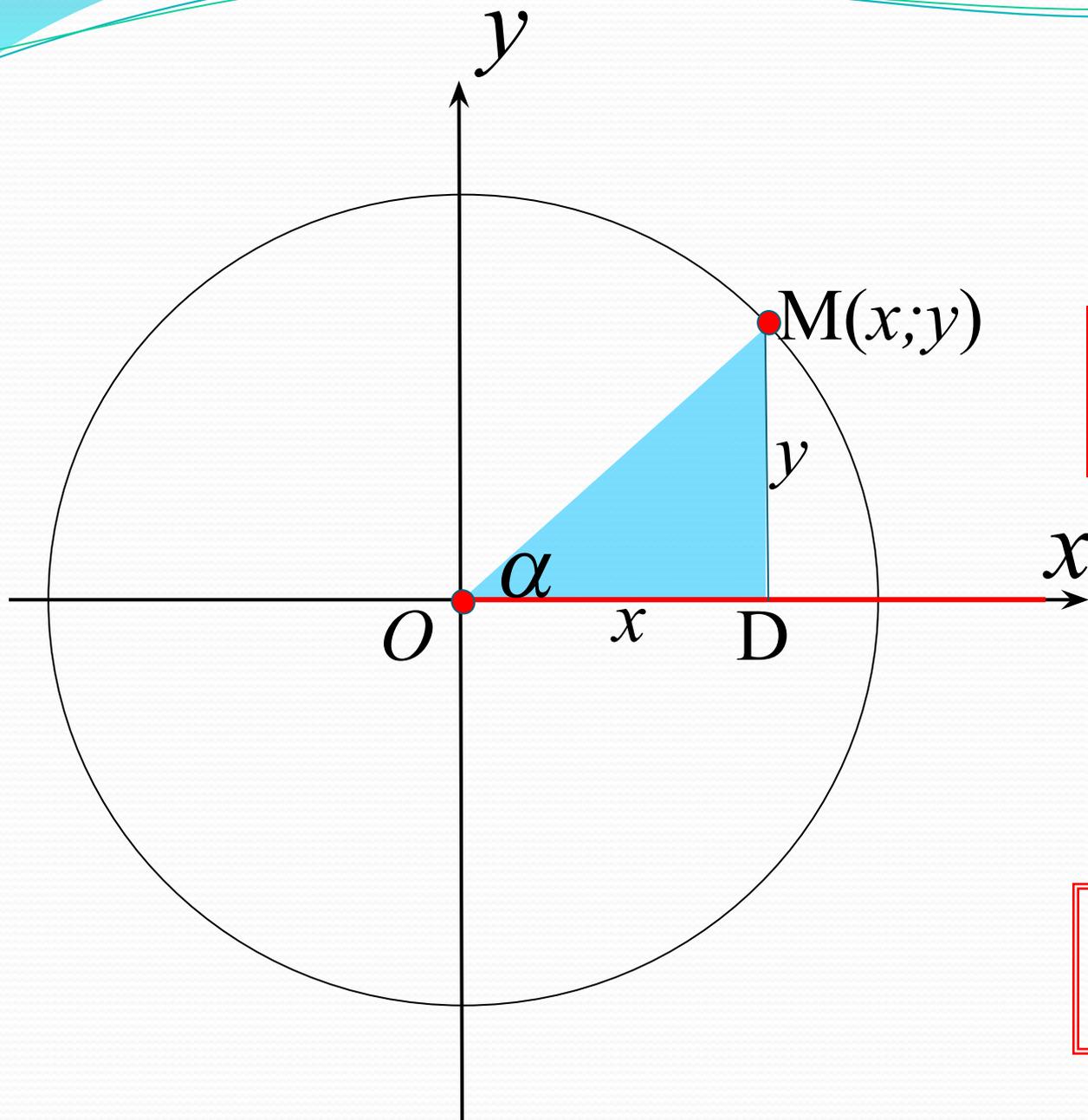
Таким образом,

точка $C(x;y)=C(\cos \alpha; \sin \alpha)$.

$$\cos \alpha = x$$

$$\sin \alpha = y$$

Единичная окружность $r = 1$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MD}{OD}$$

$$\operatorname{tg} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} *$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OD}{DM}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} *$$

Синусом угла α называется ордината y точки M , а **косинусом** угла α – абсцисса x точки M .

$$\sin \alpha = y; \quad \cos \alpha = x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

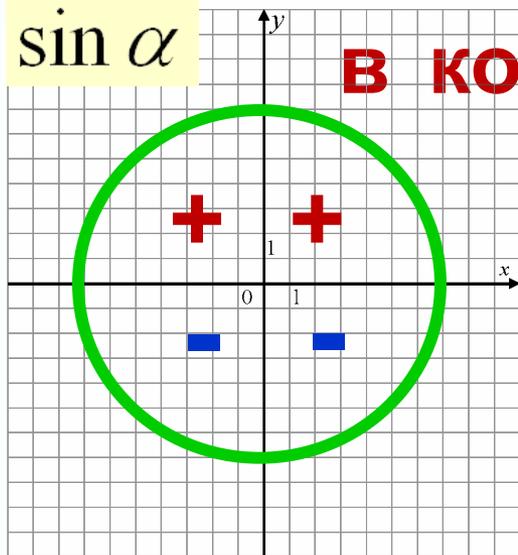
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

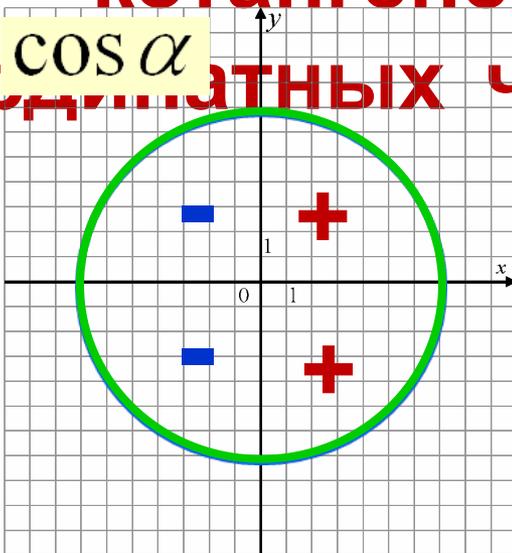
Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса



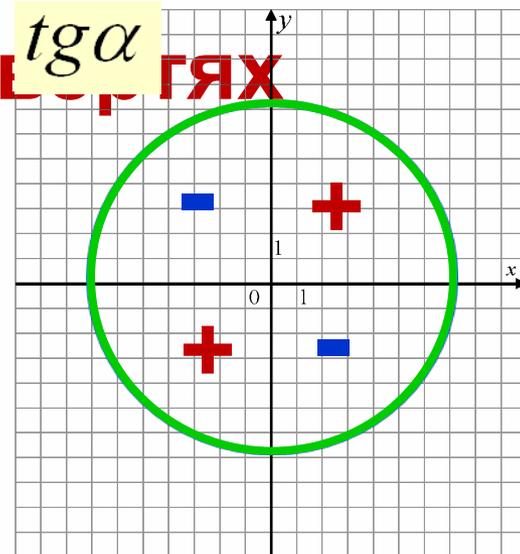
$\sin \alpha$



$\cos \alpha$

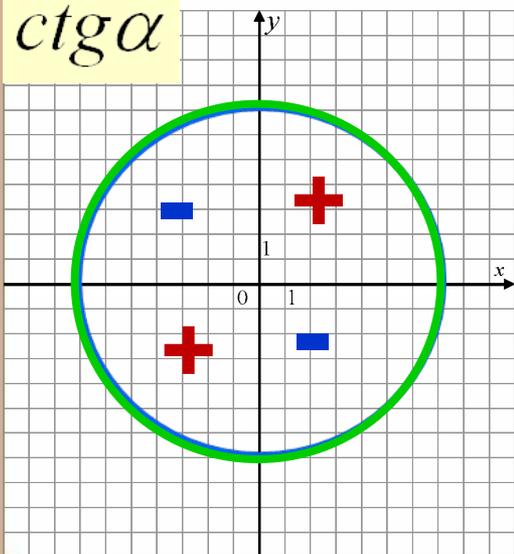


$\operatorname{tg} \alpha$



В КООРДИНАТНЫХ ЧЕТВЕРТЯХ

$\operatorname{ctg} \alpha$



$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$\operatorname{tg} 127^\circ < 0$$

$$\operatorname{ctg} 195^\circ > 0$$



Четность, нечетность синуса, косинуса, тангенса, котангенса

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$



**Нечетные
функции**

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

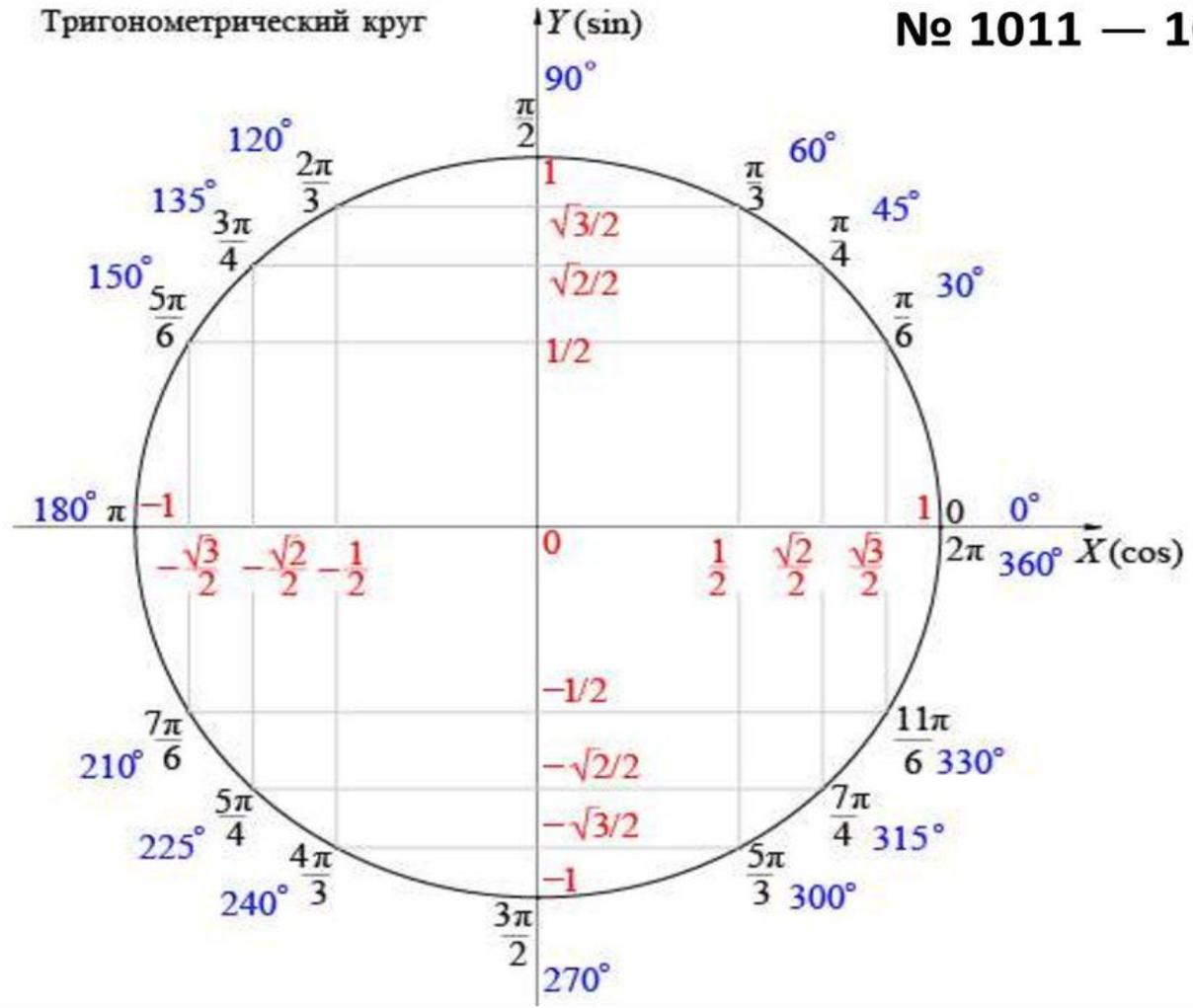


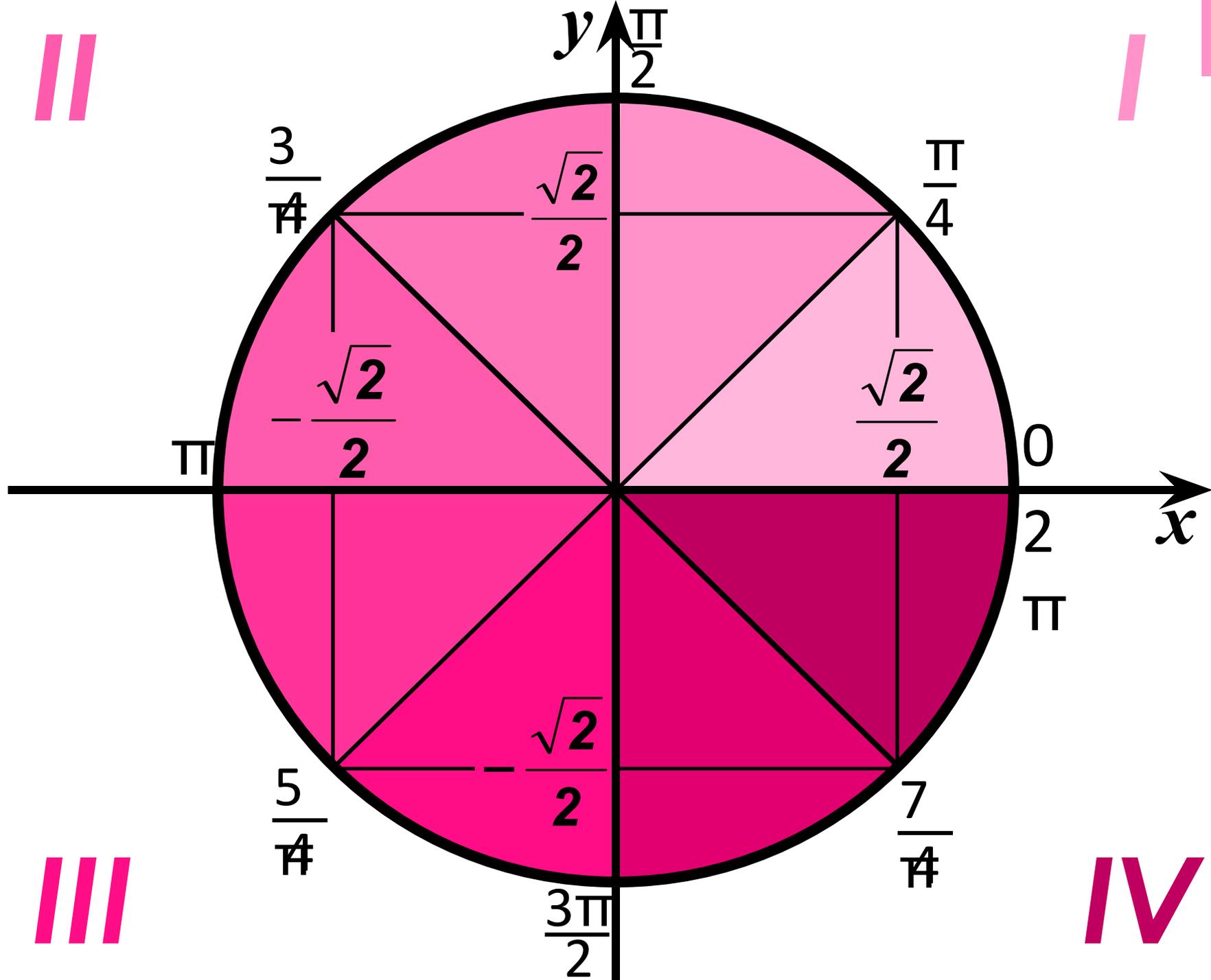
**Четная
функция**



Тригонометрический круг

№ 1011 — 1017





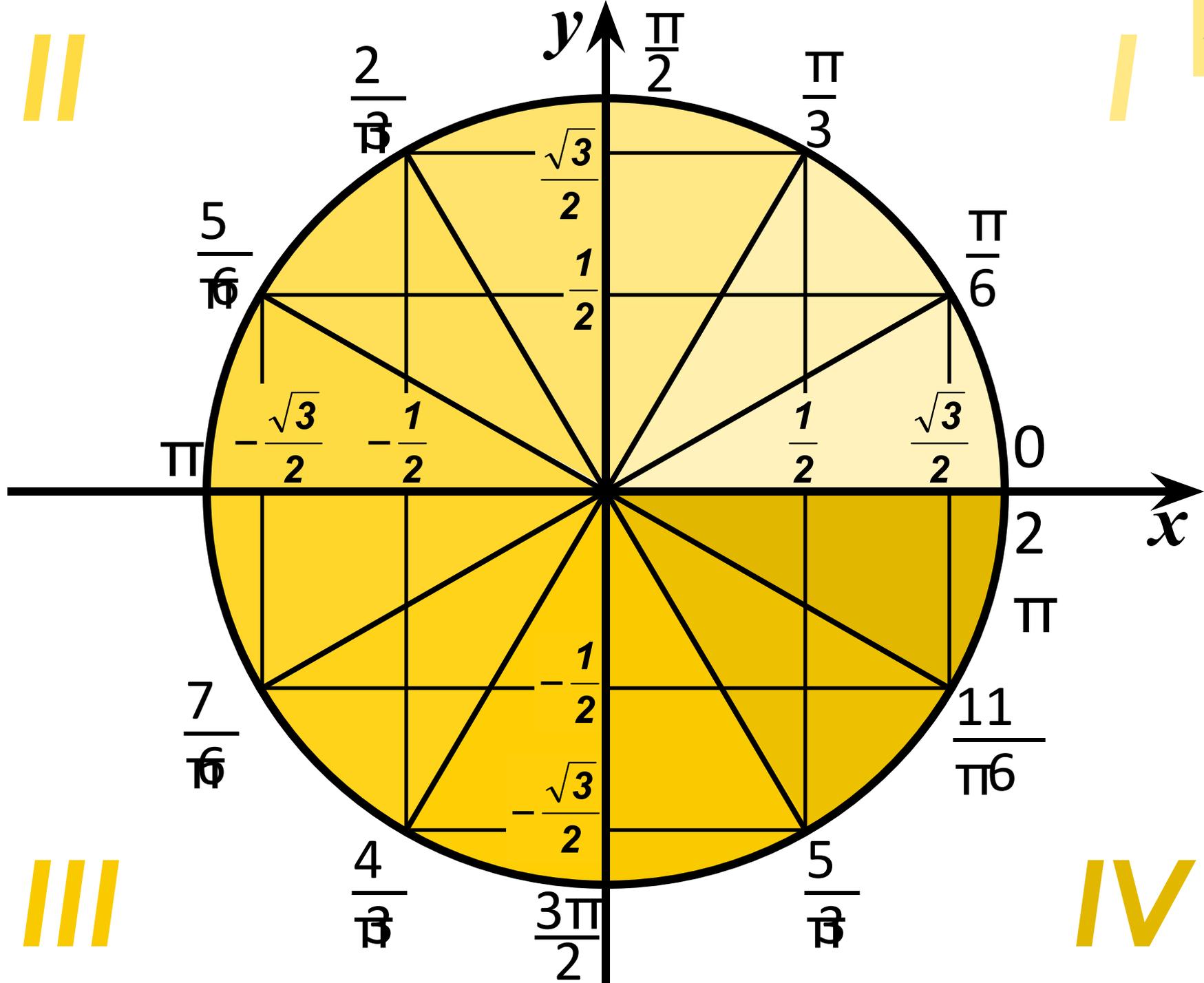
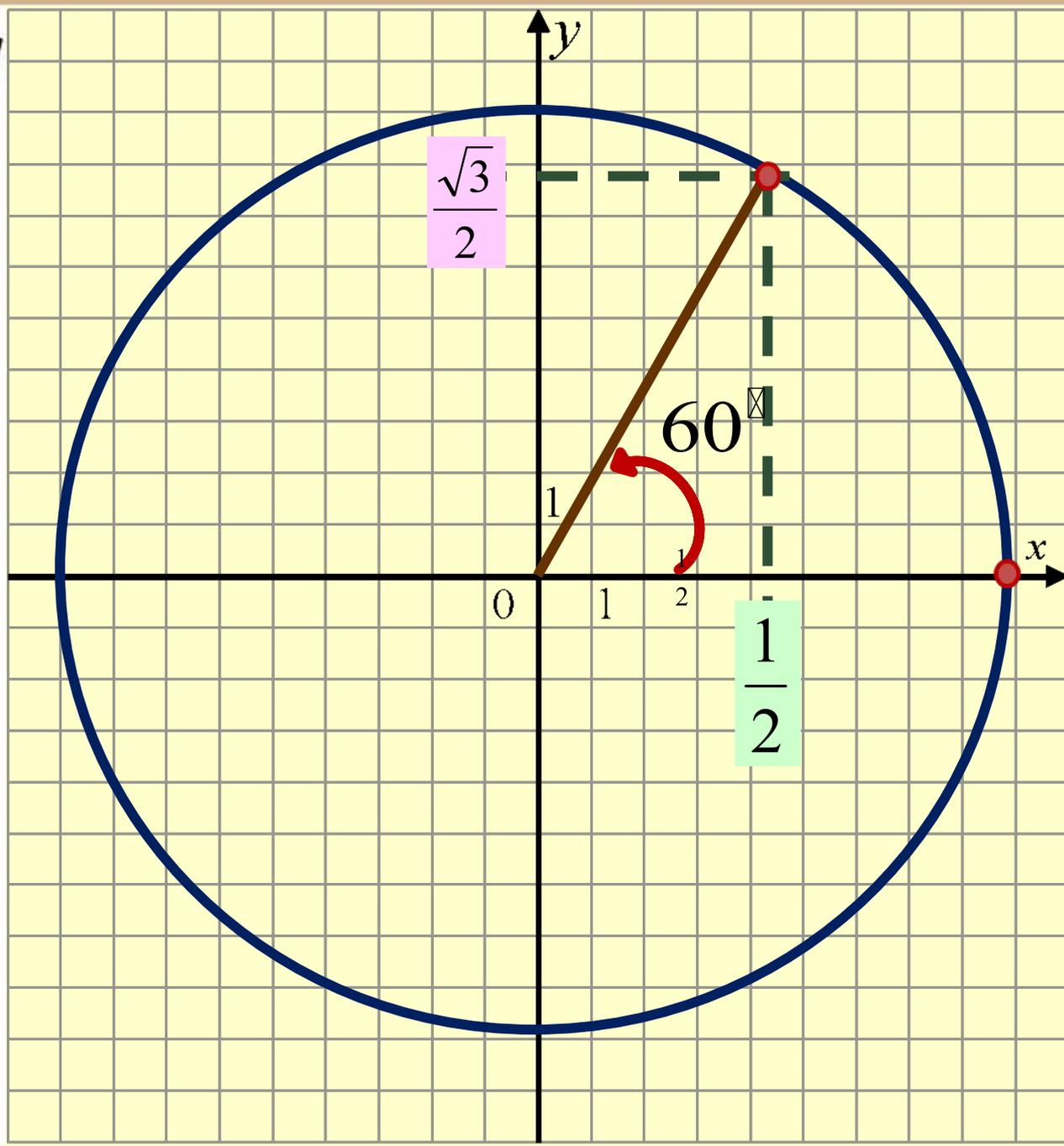


ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 780^\circ = ?$$
$$\cos 780^\circ = ?$$

$$\begin{aligned} \sin 780^\circ &= \\ &= \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 780^\circ &= \\ &= \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sin 765^\circ &= \\ &= \sin(45^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 1110^\circ &= \\ &= \cos(30^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4 \cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3 \cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$



$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2,5\pi = \sin(0,5\pi + 2\pi) = \sin 0,5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(2\frac{1}{6}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\left(2\frac{1}{3}\pi\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Домашнее задание

- 1) Выучить формулы перевода из градусной меры угла в радианную и обратно.
- 2) Выучить определения \sin , \cos , tg , ctg
- 3) Переведите в радианную меру углы:
 75° , 15° , 130° , 220° , 340°
- 4) Переведите в градусную меру углы:
 $\frac{\pi}{2} \text{ рад.}$, $\frac{\pi}{8} \text{ рад.}$, $\frac{3\pi}{5} \text{ рад.}$, $\frac{7\pi}{36} \text{ рад.}$, $\frac{12\pi}{5} \text{ рад.}$

Ответьте на вопросы:

- 1) Что означает «тригонометрия»?**
- 2) Разделом какой науки являлась тригонометрия в начале развития?**
- 3) Какие единицы измерения углов Вы знаете?**
- 4) Чему равно Π радиан?**
- 5) Как перевести из градусной меры в радианную и обратно?**
- 6) Было ли интересно на уроке?**