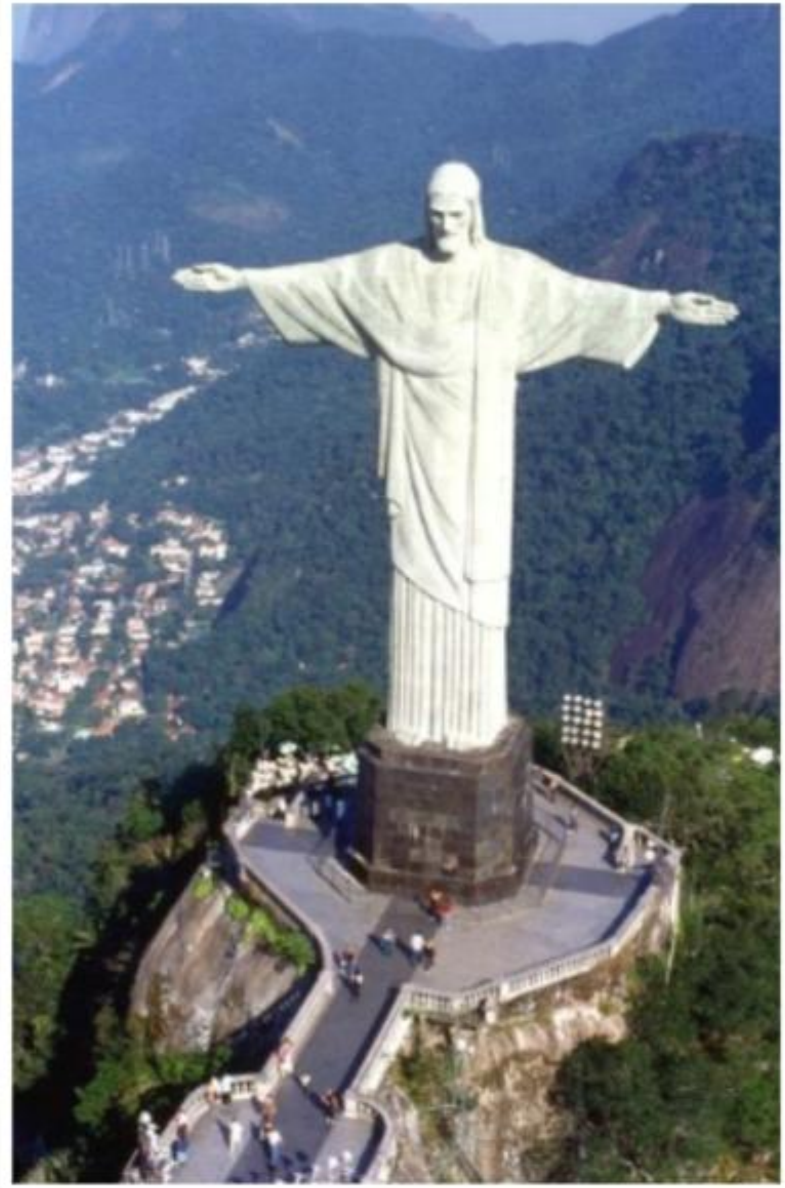
Градусная и радианная меры угла. Вращательное движение.

Синус, косинус, тангенс и

Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?

На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.

Тригонометрия в искусстве

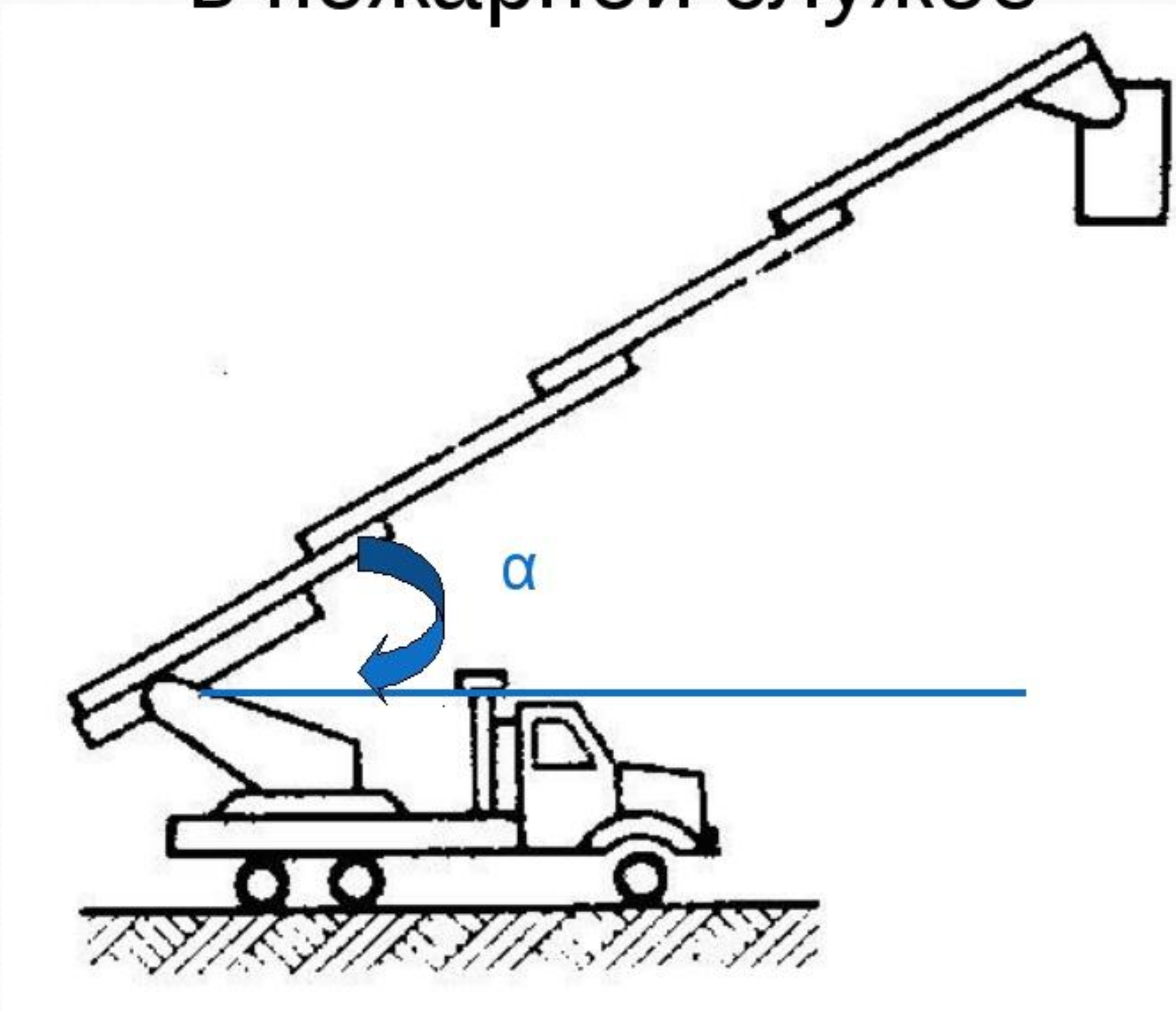


Детская школа Гауди в Барселоне

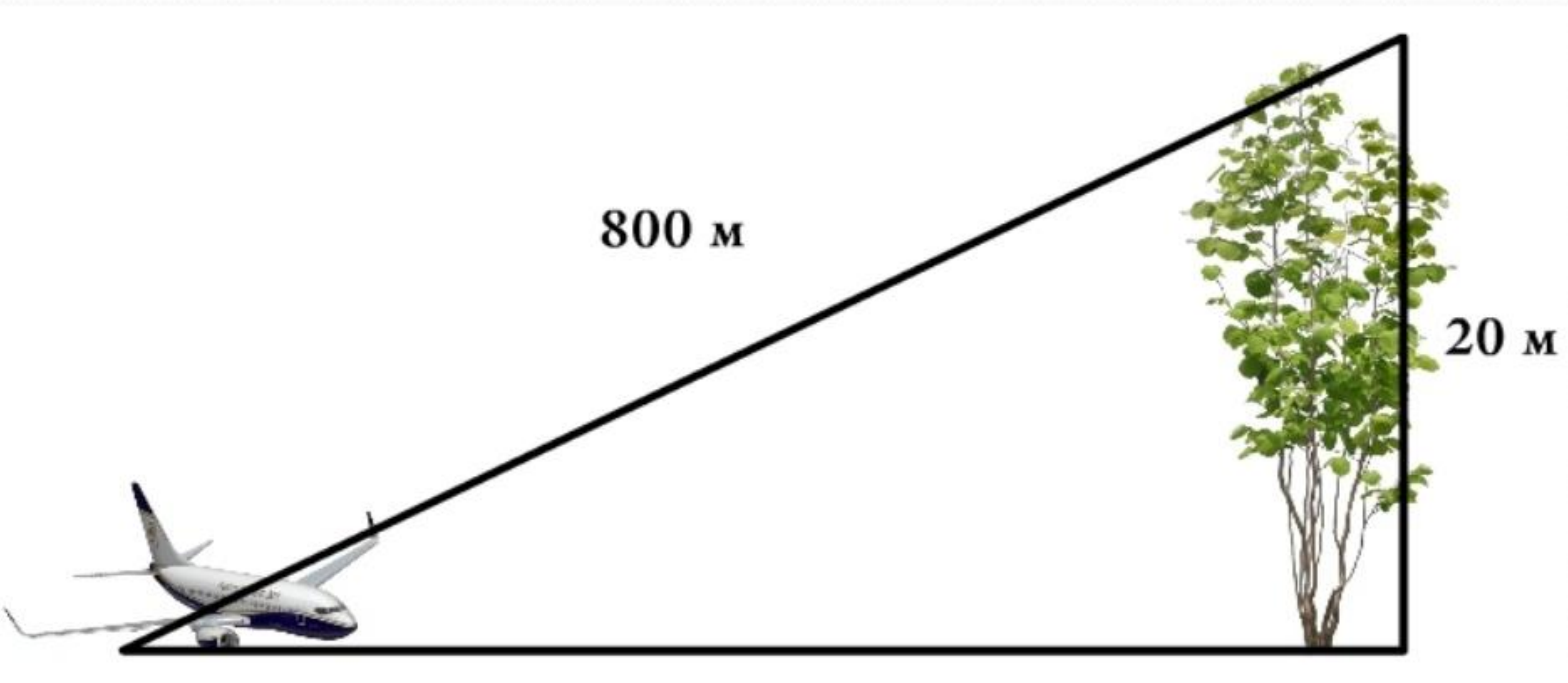
Ресторан в Лос-Манантиалесе в Аргентине

Мост в Сингапуре

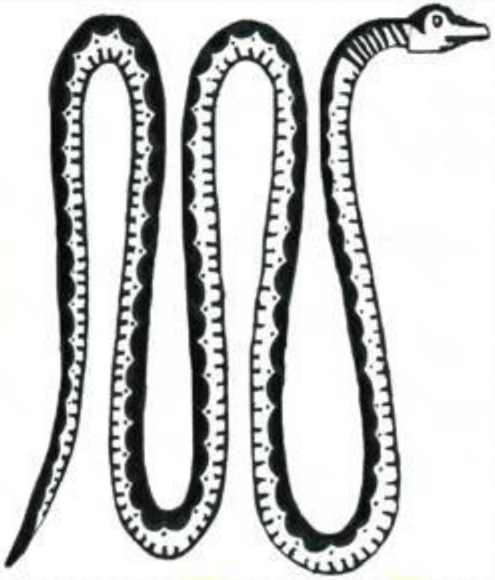
Тригонометрия в пожарной службе

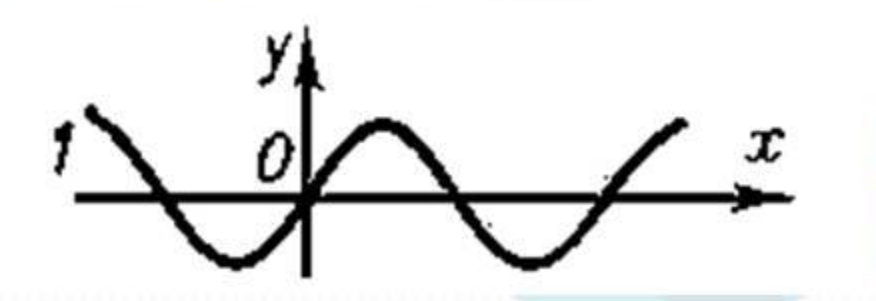


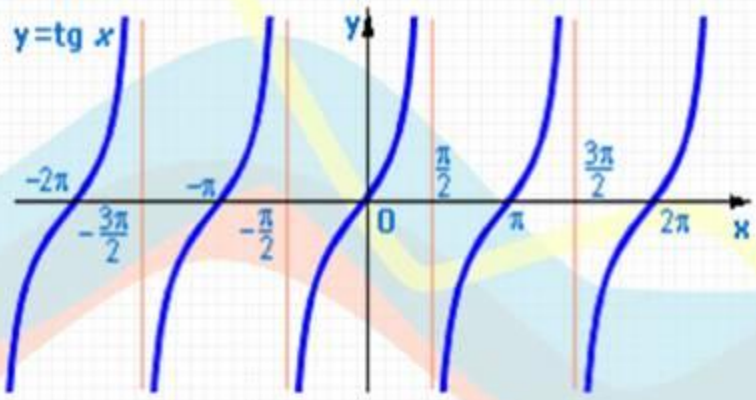
Тригонометрия в авиации



Тригонометрия в биологии







Немного из истории…

1. Древние вавилоняне и египтяне изучали тригонометрию как часть астрономии; разделили окружность на 360°

2. Древние индийцы: ввели названия «синус», «косинус», составили таблицы синусов, косинусов

3. IX-XVвв – Средний и Ближний восток: составляли таблицы котангенса, тангенса, косеканса; ввели понятие единичной окружности

Немного из истории…

4. Насир ад-Дин Мухаммад ат-Туси (1201-1274) выделил раздел тригонометрии из астрономии.

5. Лев Герсонид (1288-1344) – открыл теорему синусов.

6. XVII-XIXвв: применение тригонометрии в механике, физике, технике, как часть математического анализа (Виетт, Бернулли) – тригонометрические символы, графики – синусоиды.

7. Л.Эйлер: придал тригонометрии современный вид.

Тригонометрия

(«три» - три, «гониа» - угол, «метриа» - измеряю)

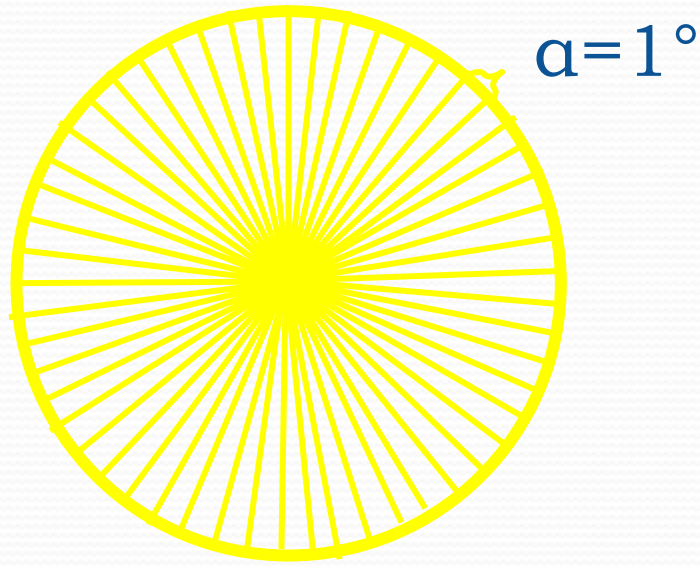
раздел математики, изучающий соотношение сторон и углов в треугольнике

Единицы измерения углов

Градусы

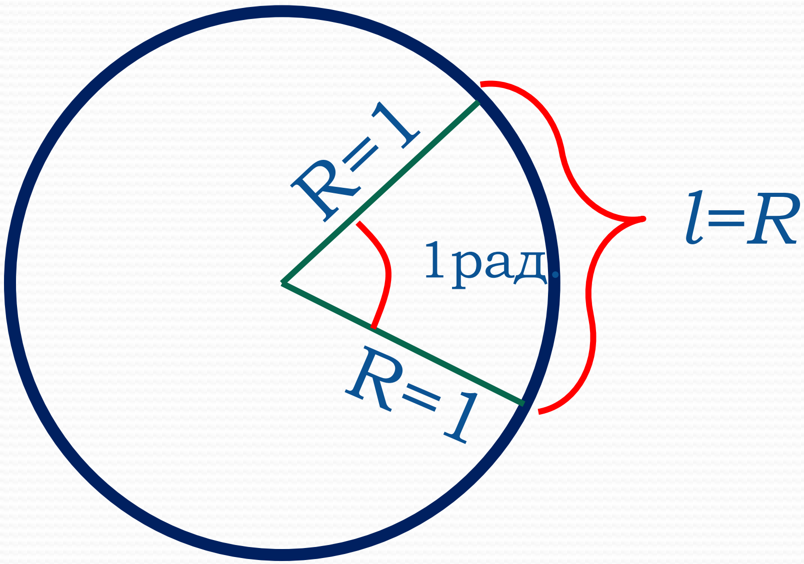
Радианы

Градусная мера угла



1° – цена одного деления окружности, разделенной на 360 частей

Радианная мера угла



1 радиан – это величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу

Единицы измерения углов

Радианы

Градусы

$$\pi \text{ радиан} = 180^\circ$$

Перевод из градусной меры в радианную:

$$\pi \text{ радиан} = 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ} \text{ рад.}$$

Пример:

1. $30^{\circ} =$

2. $90^{\circ} =$

3. $135^{\circ} =$

Пример:

4. $36^{\boxtimes} =$

5. $45^{\boxtimes} =$

6. $720^{\boxtimes} =$

Пример:

$$\mathbf{1.}\ 30^{\circ} = \frac{\pi \cdot 30^{\circ}}{180^{\circ}}\,\textit{рад.} = \frac{\pi}{6}\,\textit{рад.}$$

$$\mathbf{2.}\ 90^{\circ} = \frac{\pi \cdot 90^{\circ}}{180^{\circ}}\,\textit{рад.} = \frac{\pi}{2}\,\textit{рад.}$$

$$\mathbf{3.}\ 135^{\circ} = \frac{\pi \cdot 135^{\circ}}{180^{\circ}}\,\textit{рад.} = \frac{3\pi}{4}\,\textit{рад.}$$

Пример:

4. $$36^{\circ} = \frac{\pi \cdot 36^{\circ}}{180^{\circ}} \textit{рад.} = \frac{\pi}{5} \textit{рад.}$$

5. $$45^{\circ} = \frac{\pi \cdot 45^{\circ}}{180^{\circ}} \textit{рад.} = \frac{\pi}{4} \textit{рад.}$$

6. $$720^{\circ} = \frac{\pi \cdot 720^{\circ}}{180^{\circ}} \textit{рад.} = 4\pi \ \textit{рад.}$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$\pi$$

$$\textit{радиан} = 180^\circ$$

Пример:

1. $\frac{\pi}{3} рад. = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

2. $\frac{\pi}{4} рад.$

3. $\frac{4\pi}{5} рад.$

Пример:

1. $$\frac{\pi}{3}\,рад. = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

2. $$\frac{\pi}{4}\,рад. = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

3. $$\frac{4\pi}{5}\,рад. = \frac{4\cdot 180^\circ}{5} = 144^\circ$$

№1: Переведите в радианную меру углы:

1) 45°	4) 100°	7) 215°
2) 15°	5) 200°	8) 150°
3) 72°	6) 360°	9) 330°

№2: Переведите в градусную меру углы:

1) $\frac{\pi}{9}$ *рад.*

2) $\frac{\pi}{5}$ *рад.*

3) $\frac{5\pi}{12}$ *рад.*

4) $\frac{\pi}{4}$ *рад.*

5) $\frac{4\pi}{3}$ *рад.*

6) $\frac{3\pi}{4}$ *рад.*

Перевод из градусной меры в радианную:

$$n^{\circ} = \frac{\pi \cdot n^{\circ}}{180^{\circ}}\, рад.$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\,рад.} = n \cdot 180^{\circ}$$

Самостоятельная работа

I вариант	II вариант
1. Переведите в радианную меру углы:	
1) 60°	1) 320°
2) 145°	2) 105°
3) 240°	3) 40°
2. Переведите в градусную меру углы:	
1) $\frac{2\pi}{5}$ *рад.*	1) $\frac{9\pi}{4}$ *рад.*
2) $\frac{8\pi}{3}$ *рад.*	2) $\frac{5\pi}{6}$ *рад.*

Ответы

I вариант

1.

1) $\dfrac{\pi}{3}\,рад.$

2) $\dfrac{29\pi}{36}\,рад.$

3) $\dfrac{4\pi}{3}\,рад.$

2.

1) $72°$

2) $480°$

II вариант

1) $\dfrac{16\pi}{9}\,рад.$

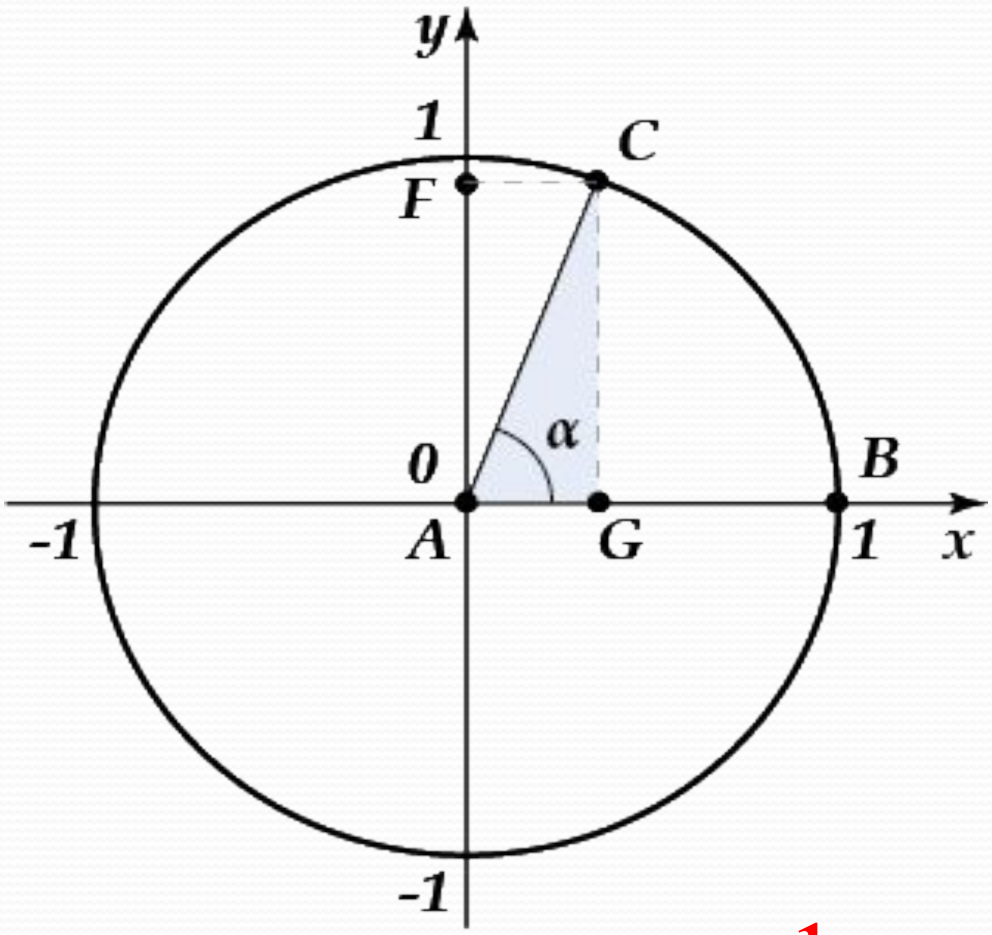
2) $\dfrac{7\pi}{12}\,рад.$

3) $\dfrac{2\pi}{9}\,рад.$

1) $405°$

2) $150°$

Окружность с радиусом, равным 1называется **единичной**.



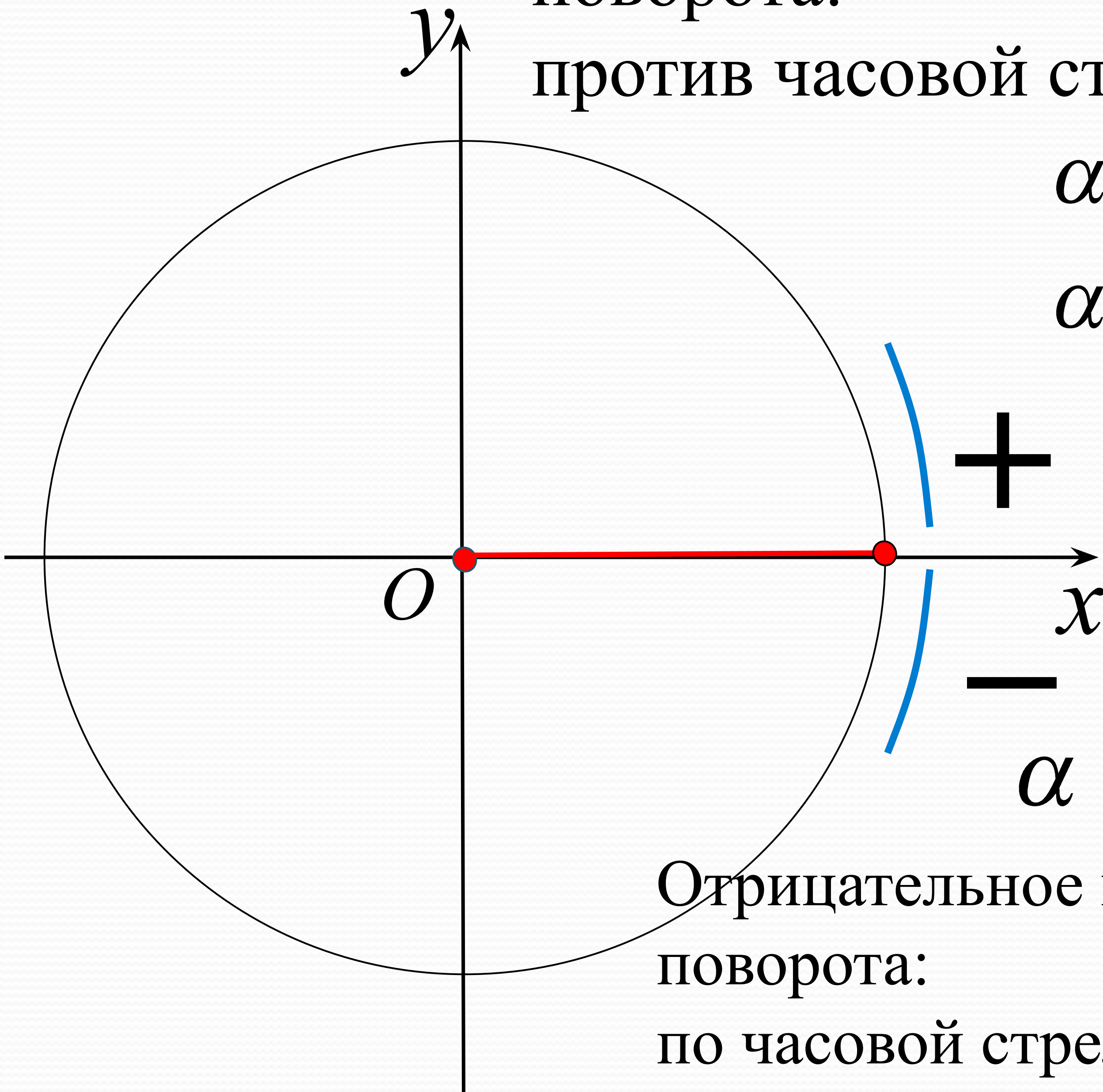
Единичная окружность $r = 1$

Данная окружность построена в декартовой системе координат. Радиус окружности равен единице, при этом центр окружности лежит в начале координат, начальное положение радиуса-вектора зафиксировано вдоль положительного направления оси x (в нашем примере, это радиус AB).

Положительное направление поворота:
против часовой стрелки.

$$\alpha = 47^0$$

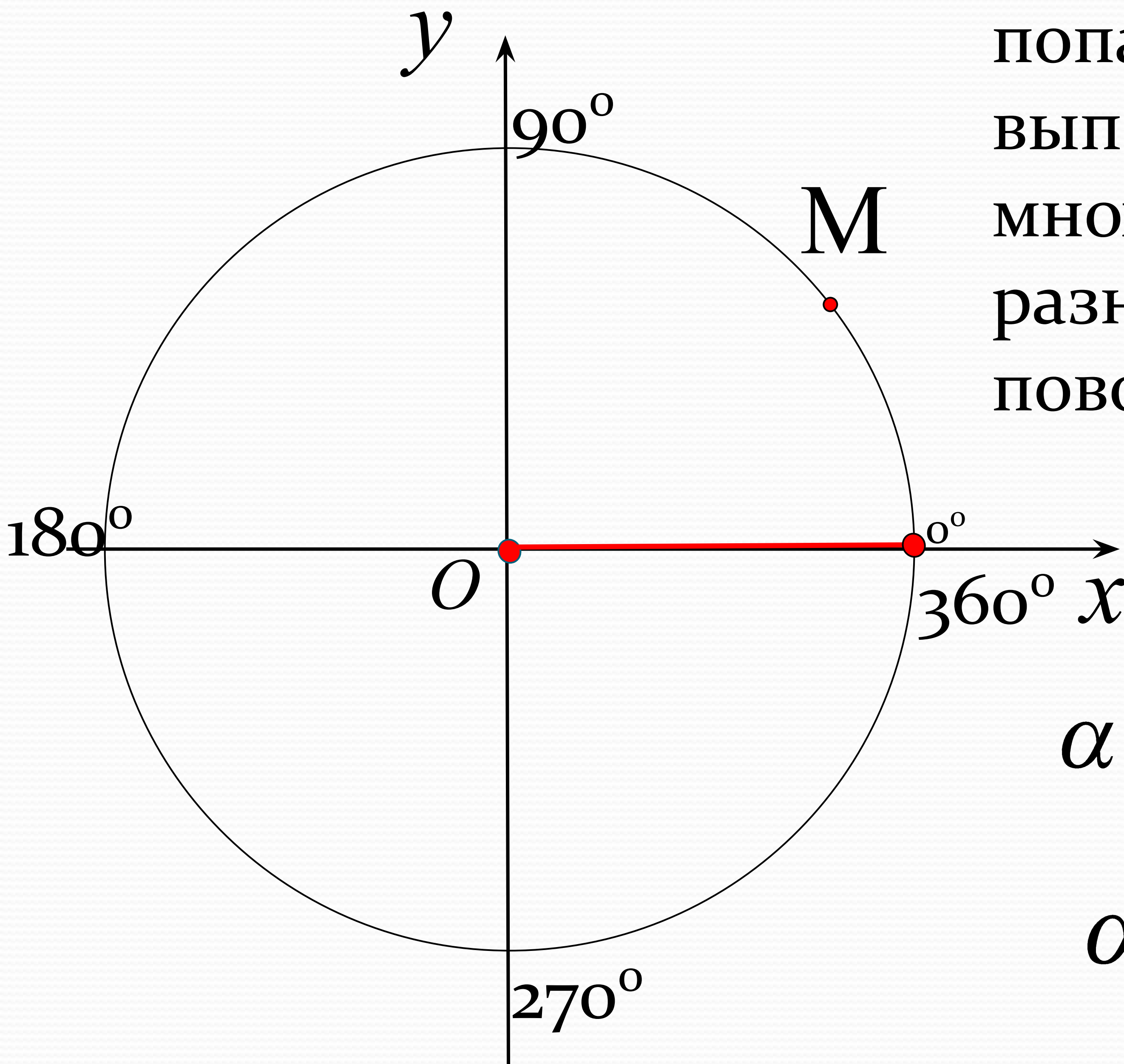
$$\alpha = 497^0$$



$$\alpha = -323^0$$

Отрицательное направление поворота:
по часовой стрелке.

Поворот



В т. М можем попасть, выполнив множество разных поворотов.

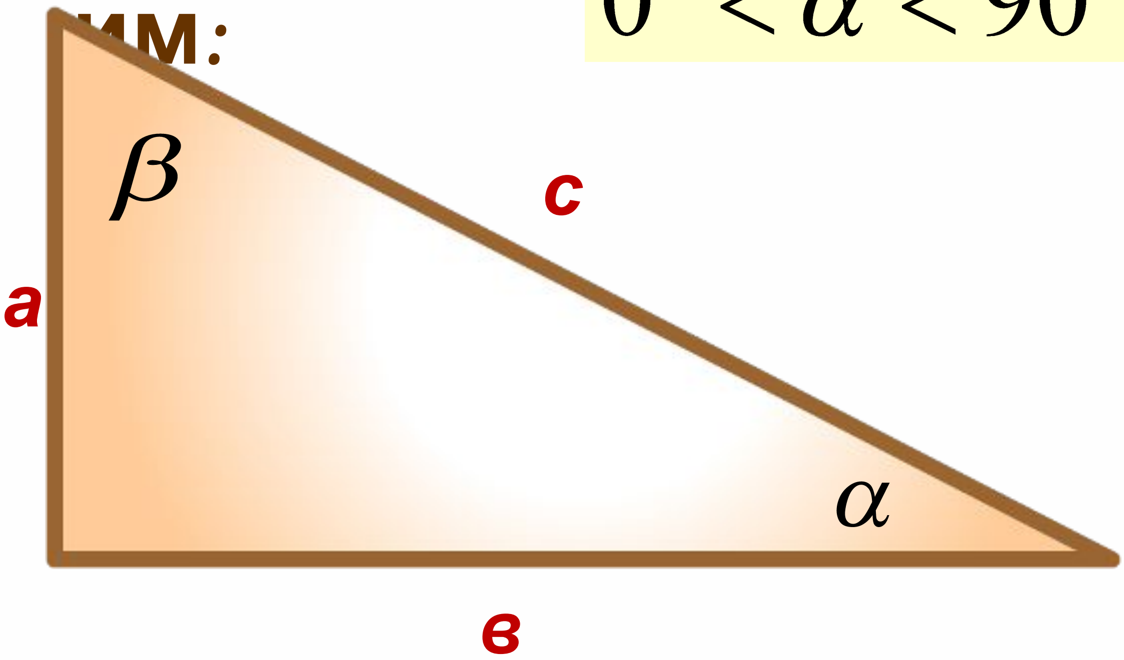
$$\alpha = 37^0$$

$$\alpha = -323^0$$

$$\alpha = 397^0$$

Вспомним:

$$0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

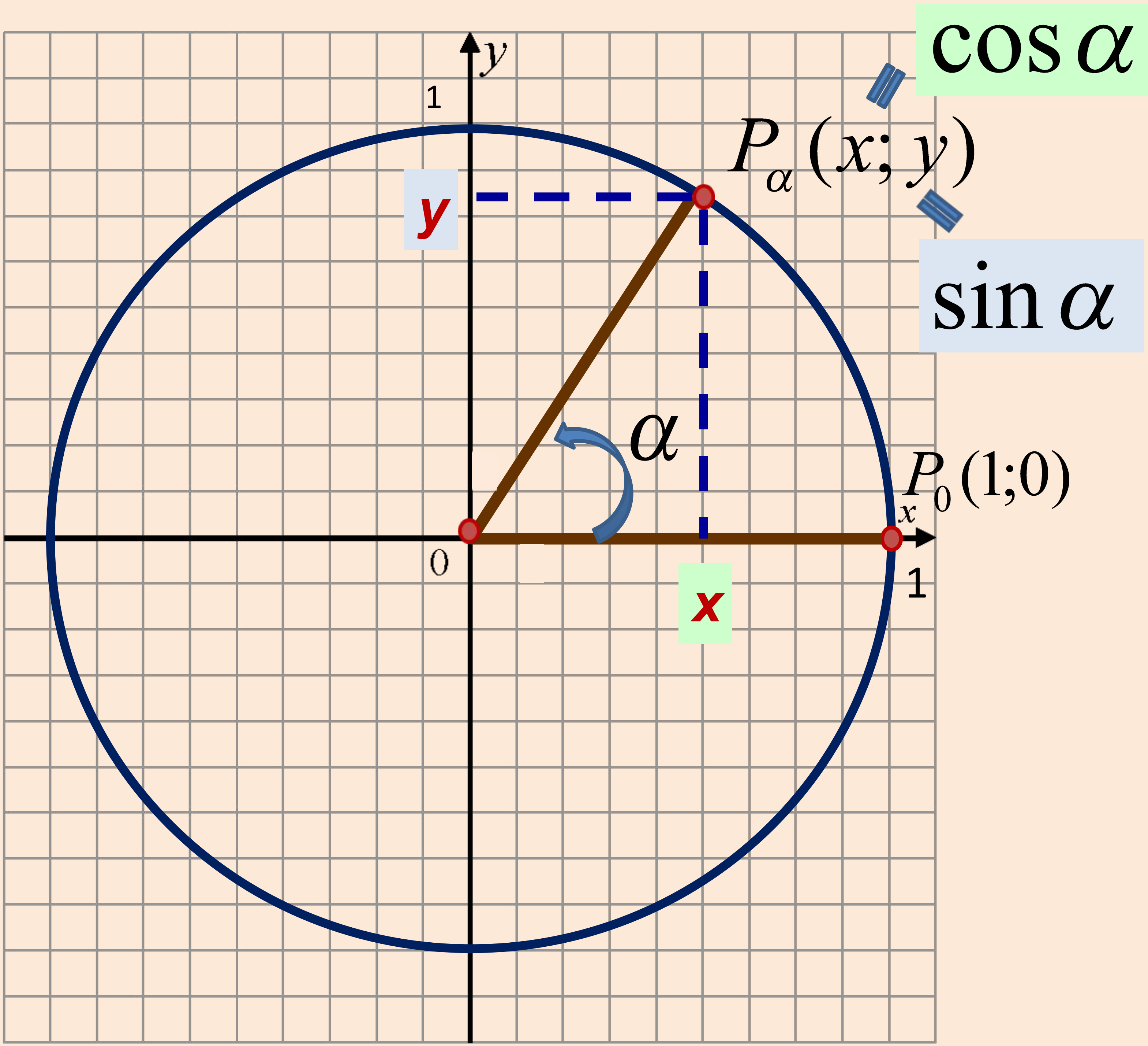
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

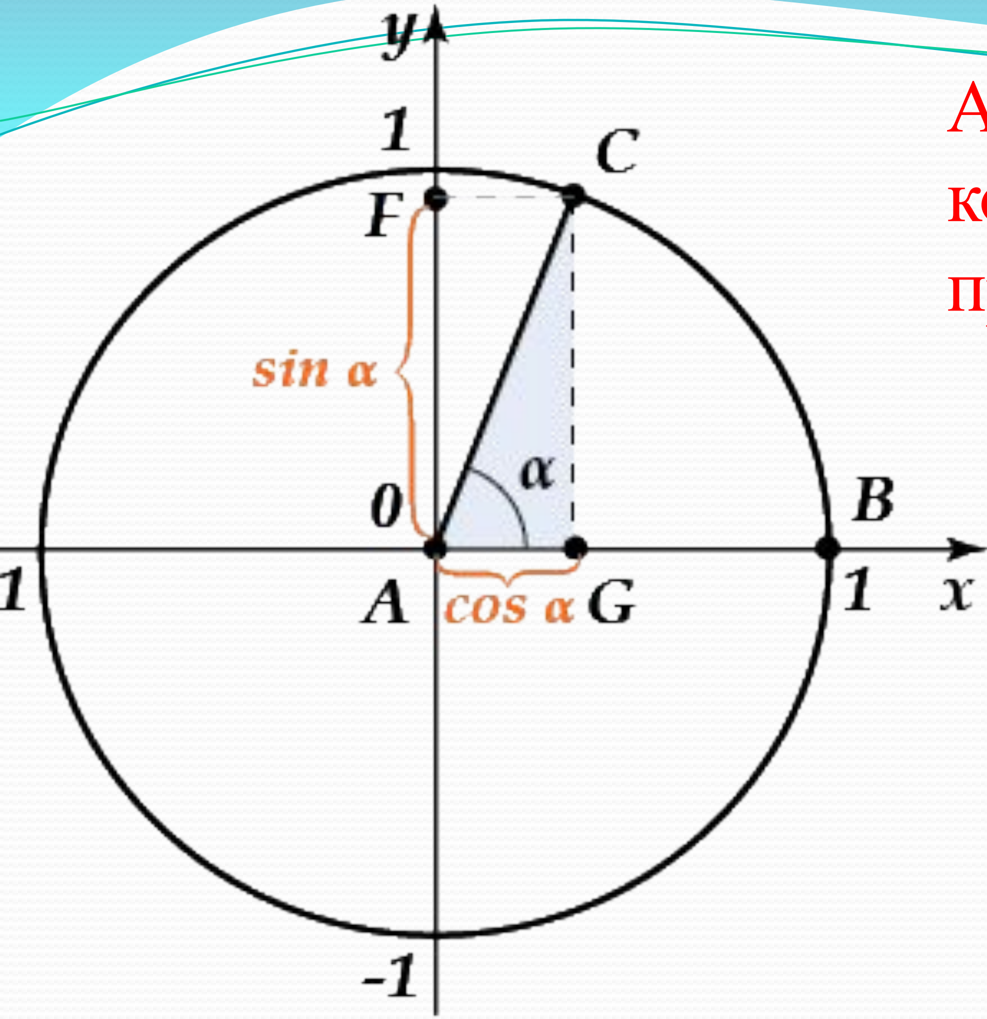
Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс — отношение противолежащего



$\cos\alpha$
$\sin\alpha$
$P_\alpha(x;y)$
$P_0(1;0)$
α
y
x
1
0
1
y
x



А можно сказать, какие координаты имеет точка С, принадлежащая окружности?

А если сообразить, что cos α и sinα - это просто числа?

Какой координате соответствует **sinα**?

Ну, конечно, **координате x**!

А какой координате соответствует **cos α**?

Все верно, координате у!

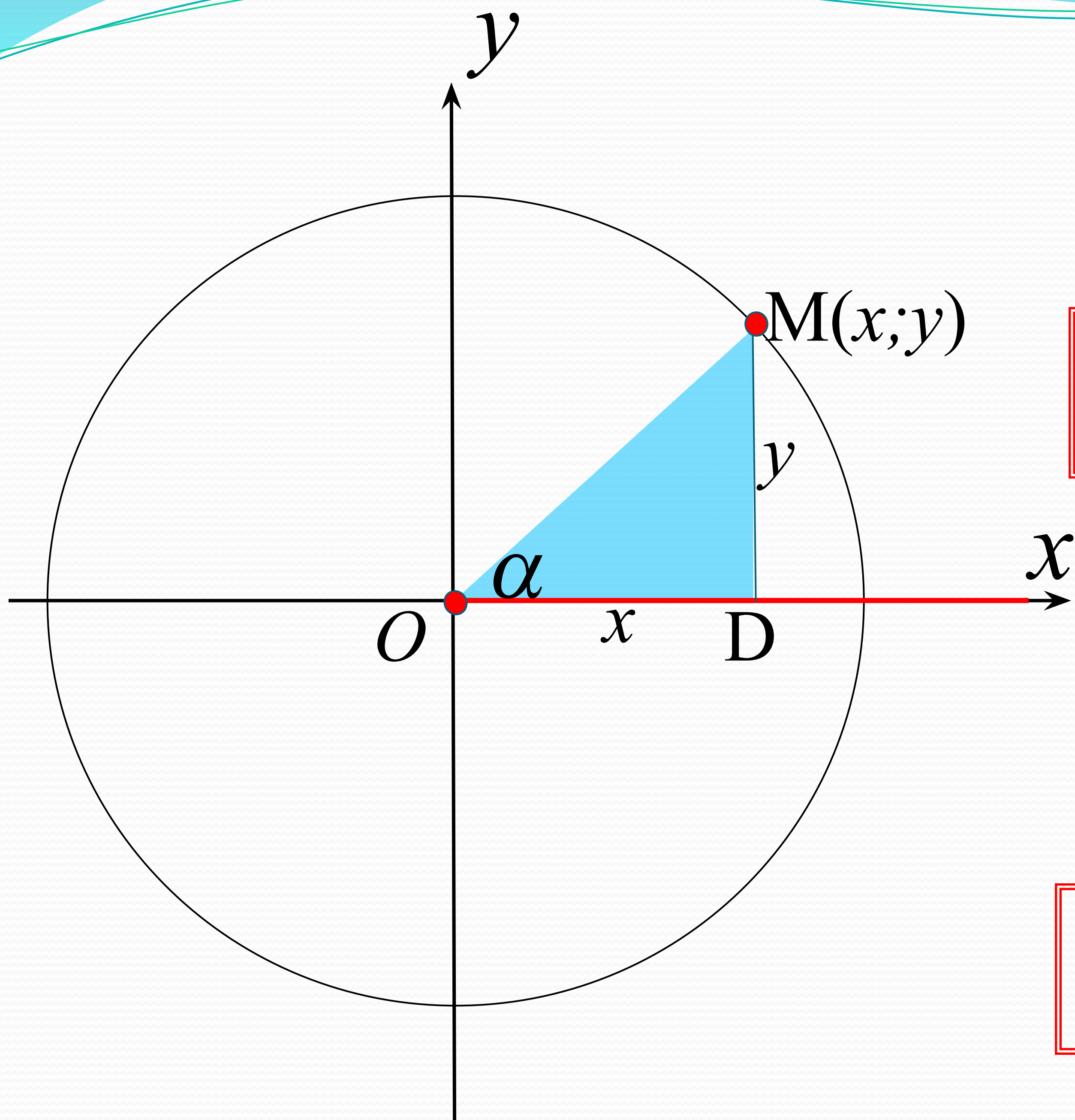
Таким образом,

точка **C(x;y)=C(cosα;sinα).**

$$\boxed{\cos\alpha = x}$$

$$\boxed{\sin\alpha = y}$$

Единичная окружность $r = 1$



$$tg\alpha = \frac{MD}{OD}$$

$$tg = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \; *$$

$$ctg\alpha = \frac{OD}{DM}$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \; *$$

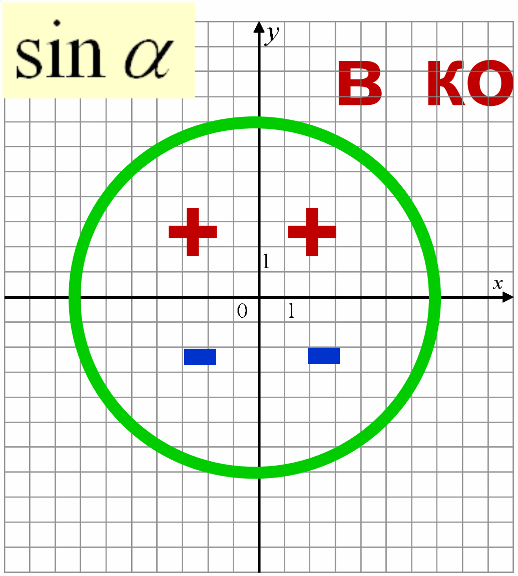
Синусом угла α называется ордината y точки М, а косинусом угла α – абсцисса x точки М.

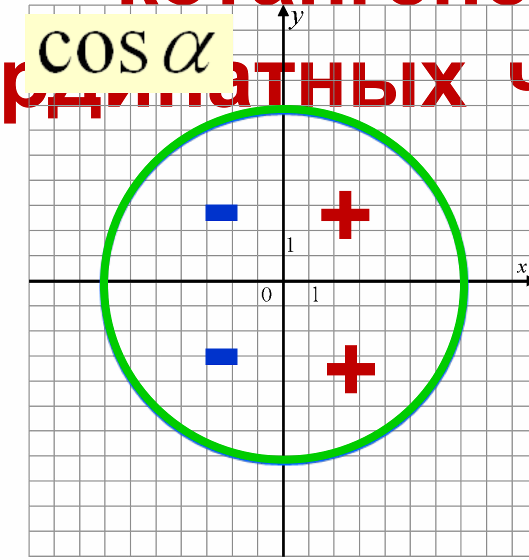
$$\sin a = y; \qquad \cos a = x$$

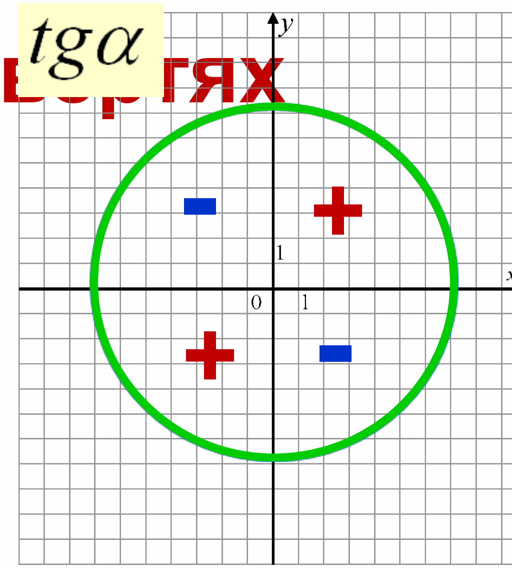
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

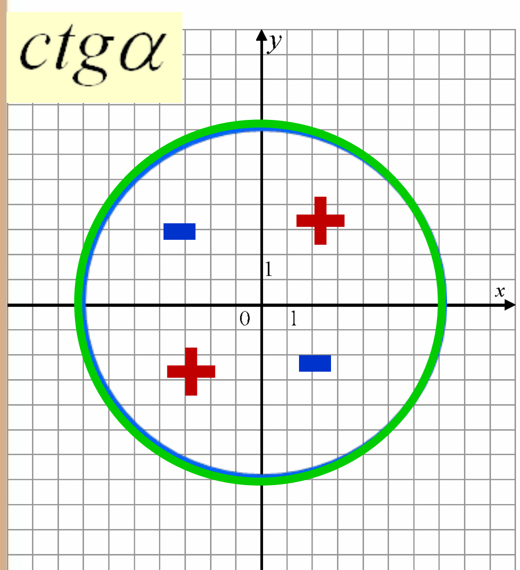
$$\mathrm{tg}\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в координатных четвертях









$$\sin 68^\circ > 0$$

$$\cos 76^\circ > 0$$

$$\sin 153^\circ > 0$$

$$\cos 236^\circ < 0$$

$$\sin 249^\circ < 0$$

$$tg 127^\circ < 0$$

$$\sin 315^\circ < 0$$

$$ctg 195^\circ > 0$$

Четность, нечетность синуса, косинуса, тангенса, котангенса

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

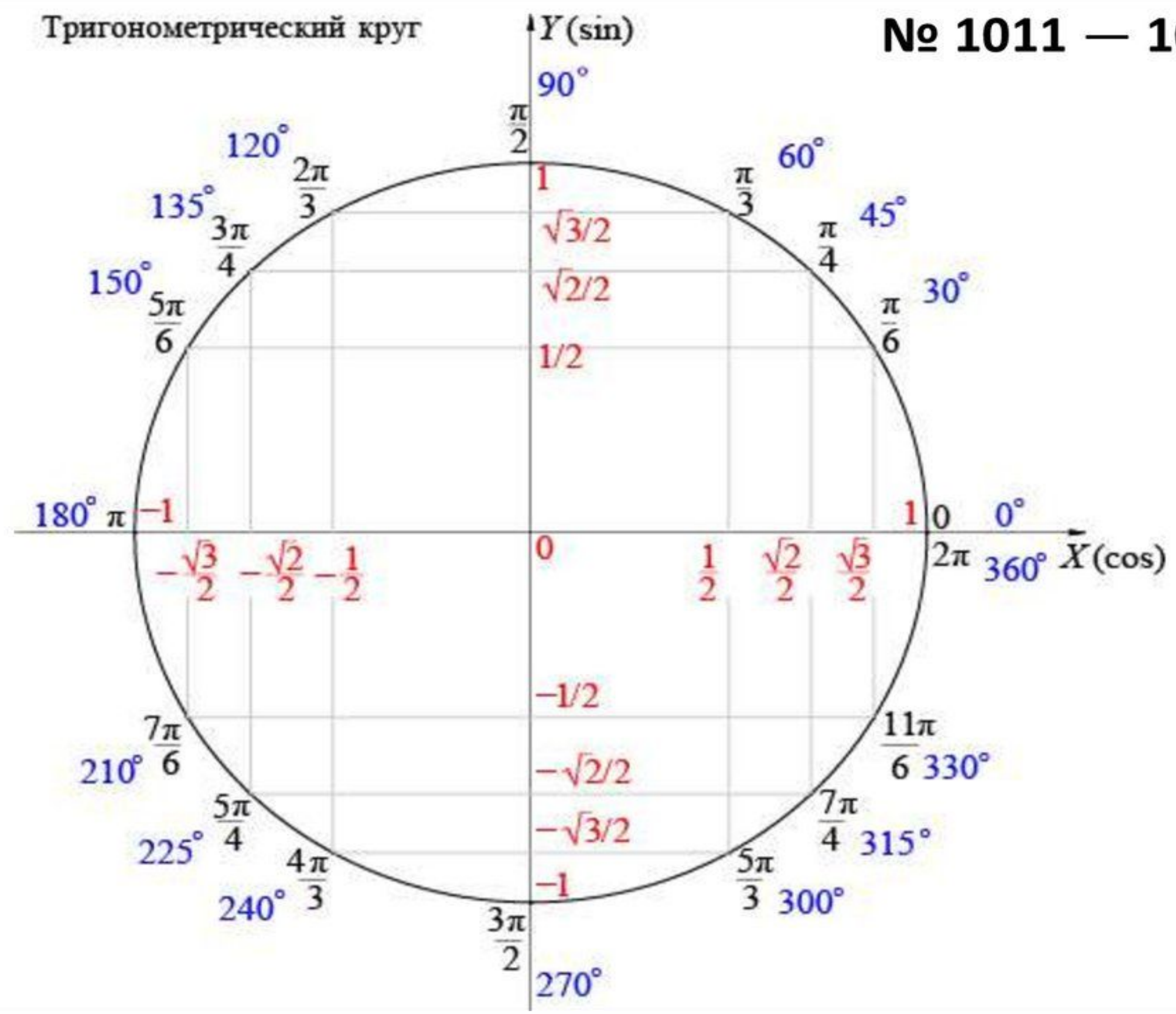
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

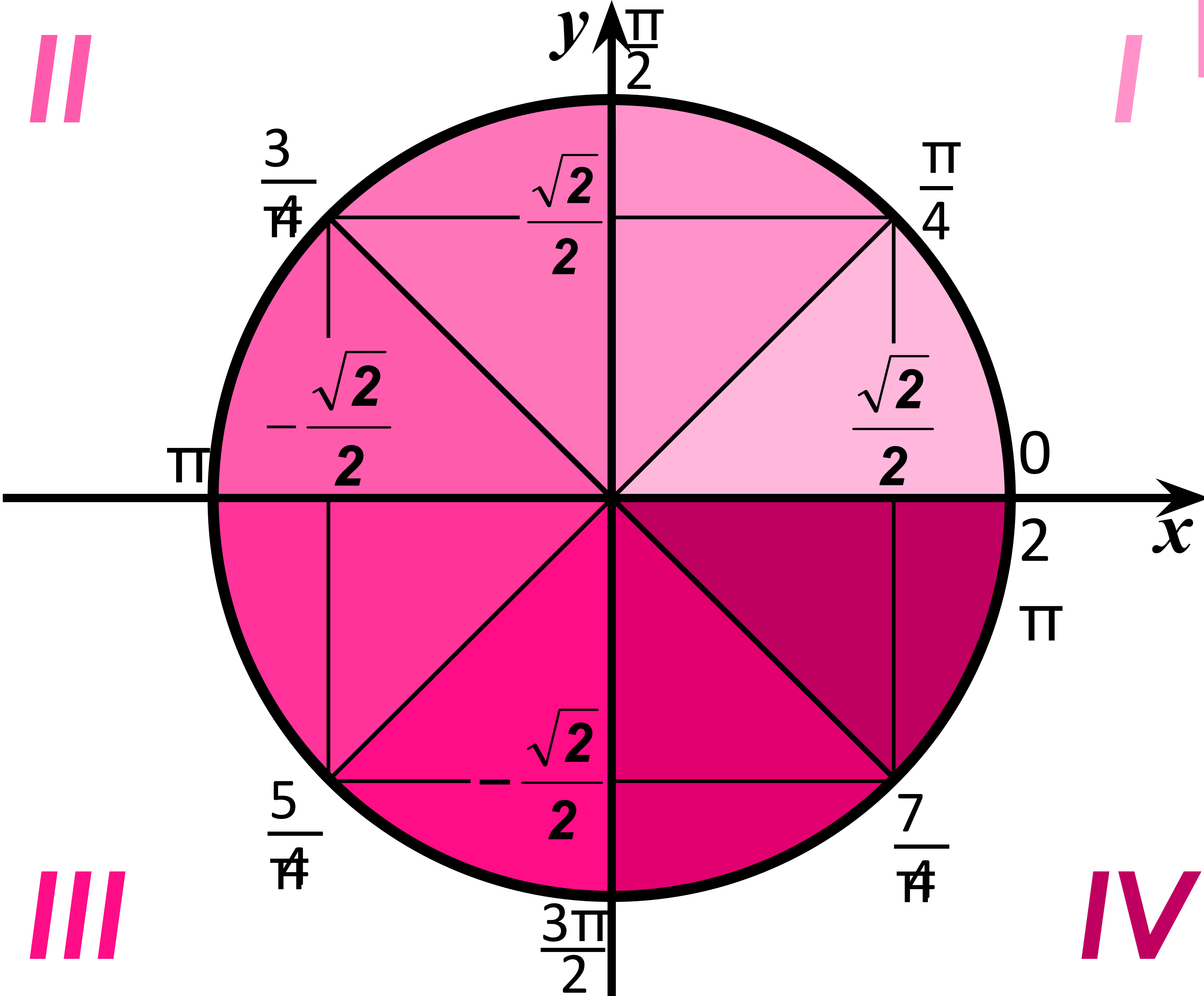
Нечетные функции

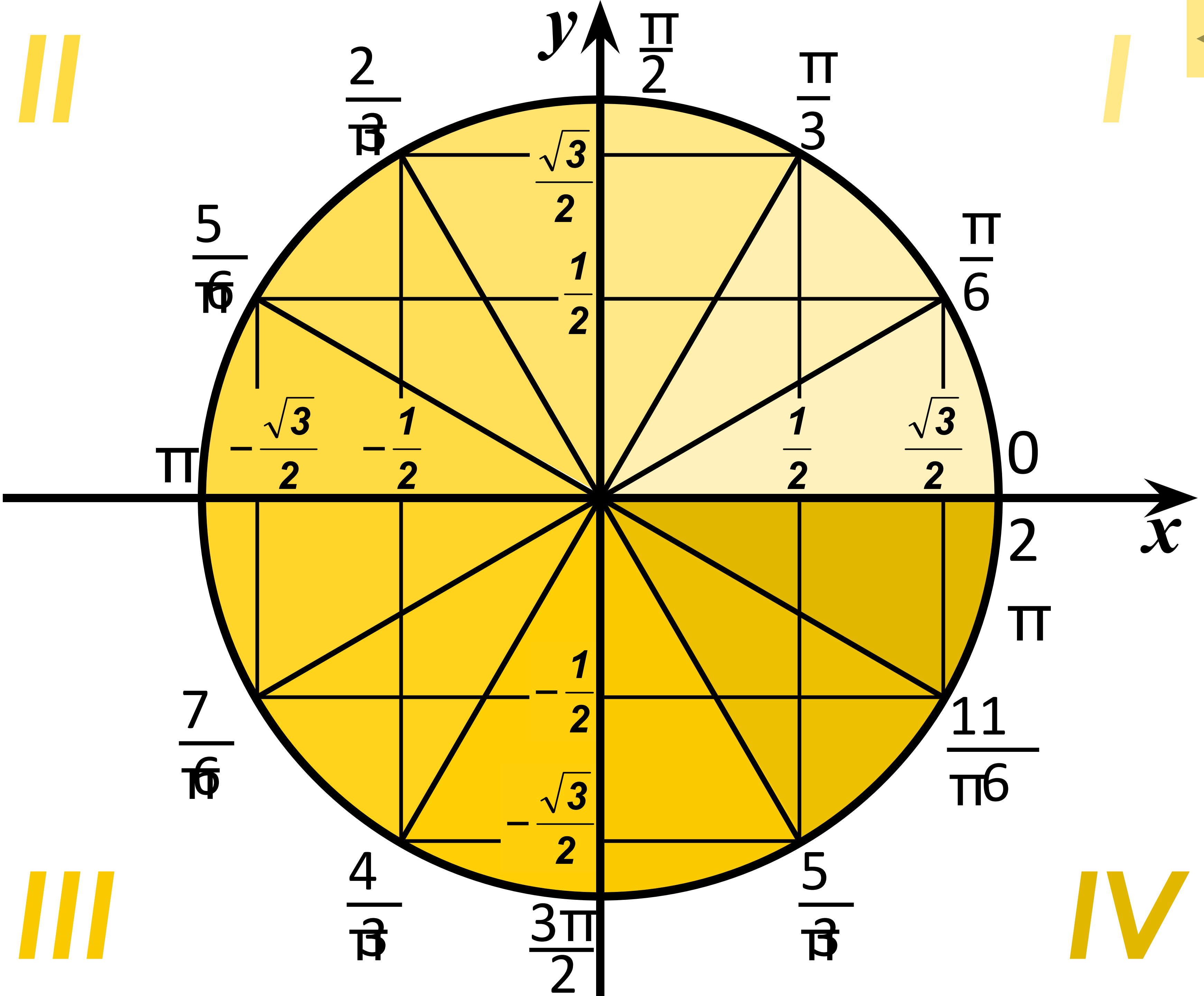
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Четная функция

№ 1011 — 1017


Тригонометрический круг
Y (sin)
X (cos)
90°
120°
135°
150°
180°
210°
225°
240°
270°
300°
315°
330°
360°
0°
30°
45°
60°
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$
2π
0
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
1
$\sqrt{3}/2$
$\sqrt{2}/2$
1/2
0
$-1/2$
$-\sqrt{2}/2$
$-\sqrt{3}/2$
-1
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1

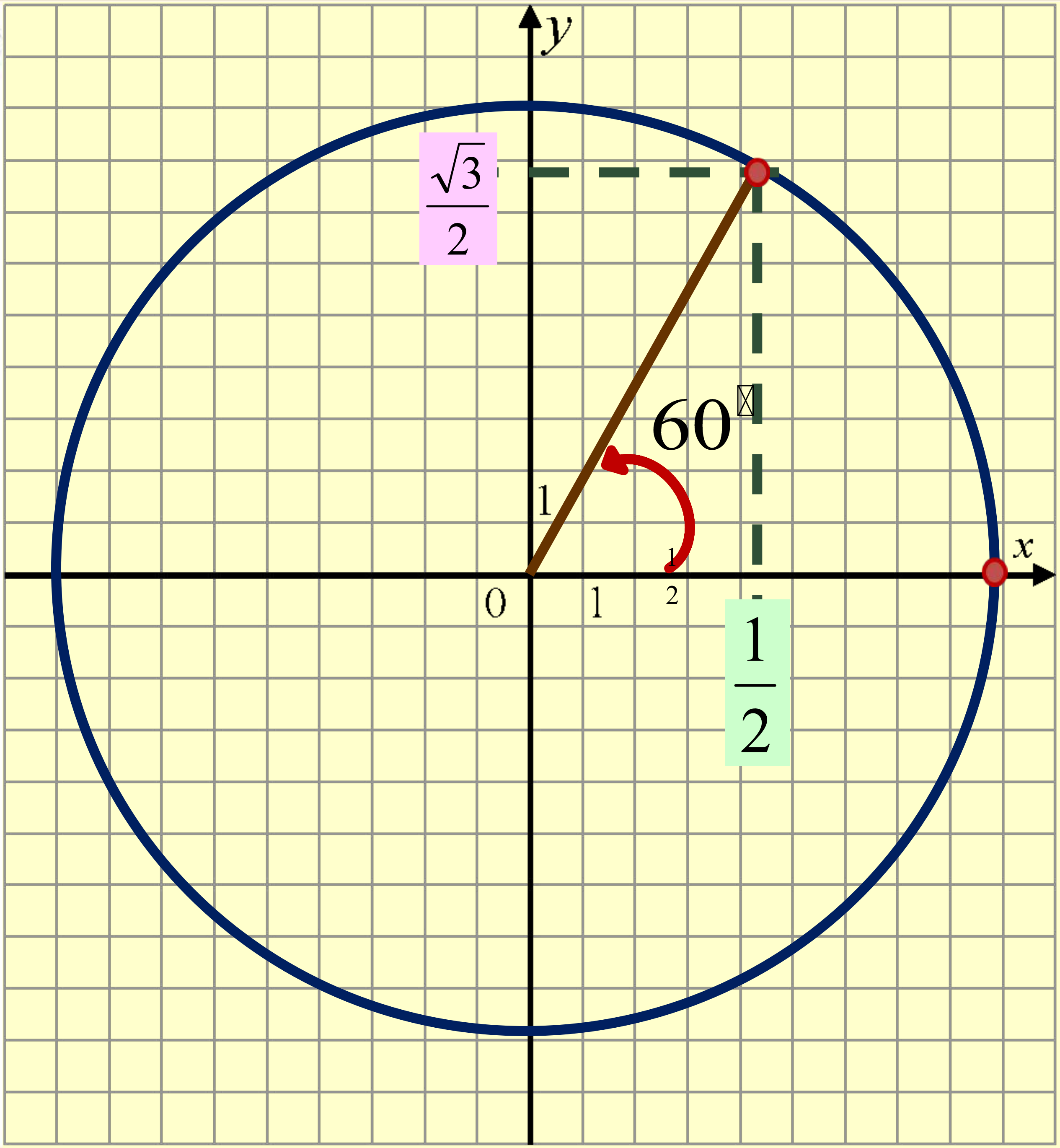

II
I
III
IV
y
x
π/2
π/4
3π/4
π
0
2π
5π/4
7π/4
3π/2
√2/2
−√2/2



II
I
III
IV
y
x
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{6}$
0
2π
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{6}$
π
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

α^0	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 780^\circ - ?$$

$$\cos 780^\circ - ?$$

$$\sin 780^\circ =$$
$$= \sin(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 780^\circ =$$
$$= \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$$
$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 765^\circ = \\ = \sin(45^\circ + 2\cdot 360^\circ) = \\ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 1110^\circ = \\ = \cos(30^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \\ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-1470^\circ) = -\sin 1470^\circ = -\sin(30^\circ + 4\cdot 360^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-1140^\circ) = \cos 1140^\circ = \cos(60^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-810^\circ) = -\sin 810^\circ = -\sin(90^\circ + 2\cdot 360^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(90^\circ + 3\cdot 360^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2{,}5\pi = \sin(0{,}5\pi + 2\pi) = \sin 0{,}5\pi = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos(-\frac{9\pi}{4}) = \cos(2\frac{1}{4}\pi) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{13\pi}{6} = tg(2\frac{1}{6}\pi) = tg(\frac{\pi}{6} + 2\pi) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ctg(-\frac{7\pi}{3}) = -ctg(2\frac{1}{3}\pi) = -ctg(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = -ctg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Домашнее задание

1) Выучить формулы перевода из градусной меры угла в радианную и обратно.
2) Выучить определения sin, cos, tg, ctg

3) Переведите в радианную меру углы:
$75°$, $15°$, $130°$, $220°$, $340°$

4) Переведите в градусную меру углы:

$\frac{\pi}{2}$ *рад.* , $\frac{\pi}{8}$ *рад.* , $\frac{3\pi}{5}$ *рад.* , $\frac{7\pi}{36}$ *рад.* , $\frac{12\pi}{5}$ *рад.*

Ответьте на вопросы:

1) Что означает «тригонометрия»?

2) Разделом какой науки являлась тригонометрия в начале развития?

3)Какие единицы измерения углов Вы знаете?

4) Чему равно π радиан?

5) Как перевести из градусной меры в радианную и обратно?

6) Было ли интересно на уроке?