Глава 3
Работа и энергия

§11. Энергия, работа, мощность

- **Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия материи.**
- С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др.
- В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других—переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое).
- Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

- Чтобы количественно характеризовать обмен энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.
- Если тело движется ***прямолинейно*** и на него действует ***постоянная сила***, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции этой силы на направление перемещения, умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = FS\cos\boldsymbol{\alpha} = F_S S \qquad (11.1)$$

- В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (11.1) пользоваться нельзя.
- Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу $\vec{F}$ можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным.
- **Элементарной работой**
- силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется ***скалярная*** величина

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha \, dS = F_S \, dS,$$

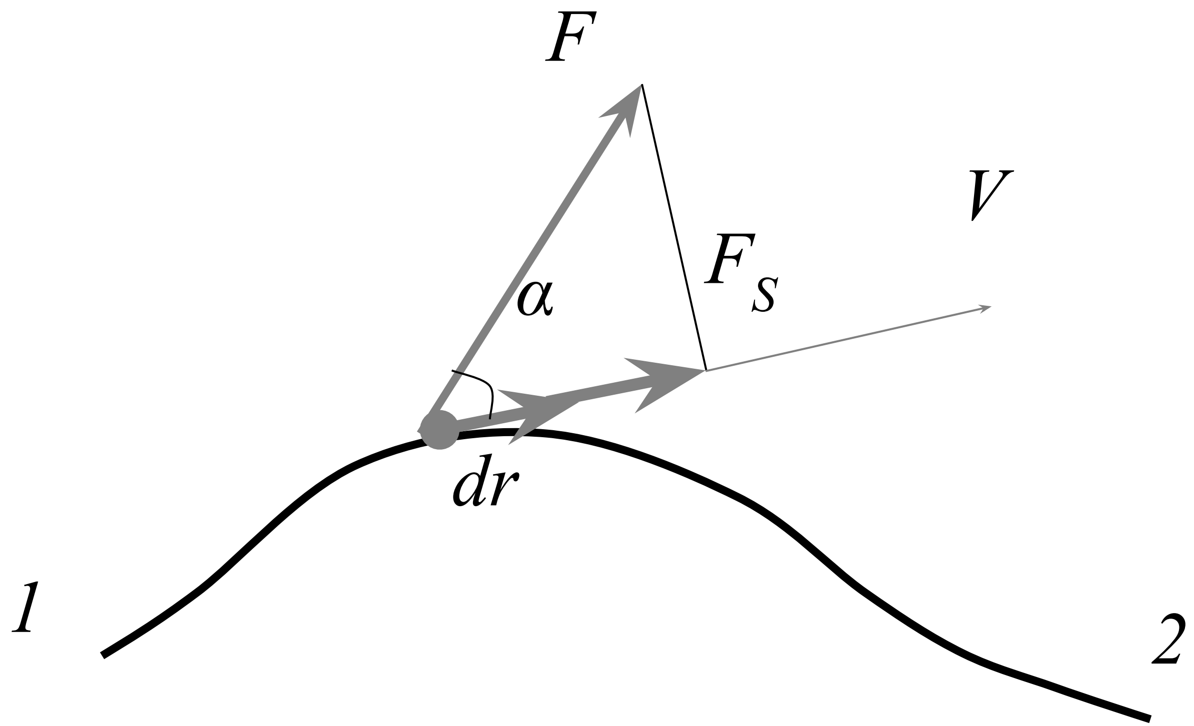

Рис. 13

- Работа силы на участке траектории от точки *1* до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути.

- Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F \cos \boldsymbol{\alpha}\, dS = \int_1^2 F_S dS. \qquad (11.2)$$

- Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_S от пути *S* вдоль траектории *1—2.* Пусть эта
- зависимость
- представлена
- графически (рис. 14),
- тогда искомая работа
- А определяется на
- графике площадью.

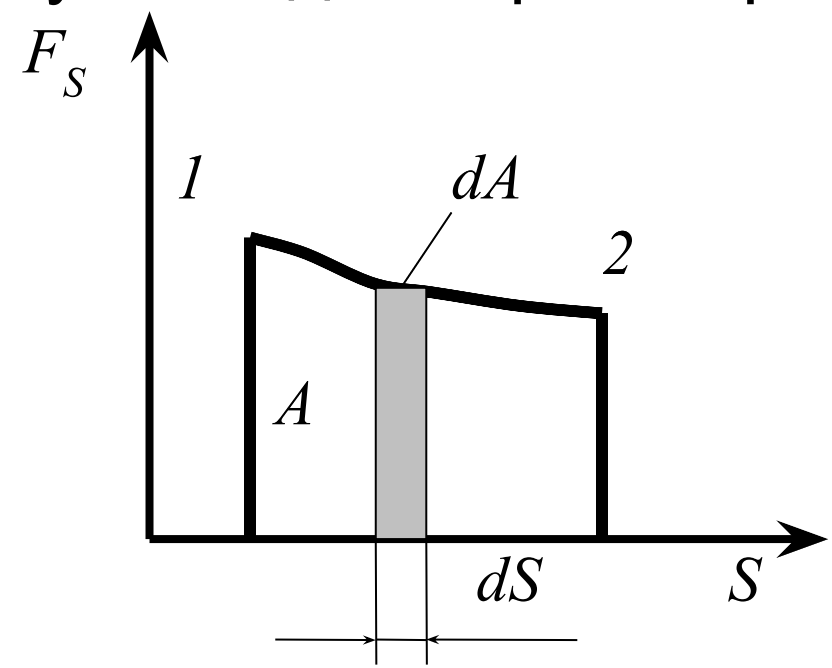

Рис. 14

- Если, например, тело движется прямолинейно, сила F = const и α =const, то получим

$$A = \int_1^2 F\cos\alpha\, dS = F\cos\alpha \int_1^2 dS = FS\cos\alpha,$$

- где S — пройденный телом путь (см. также формулу (11.1)).

- Из этой формулы следует, что при $\alpha \langle \pi/2$ работа силы положительна.
- Если , $\alpha \rangle \pi/2$ то работа силы отрицательна.
- При $\alpha = \pi/2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.
- Единица работы—**джоуль** (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м
- (1 Дж=1 Н•м).

- Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**:

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (11.3)$$

- За время *dt* сила $\vec{F}$ совершает работу $\vec{F}d\vec{r}$, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

- т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; *N* — величина *скалярная.*
- Единица мощности—ватт (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

§ 12. Кинетическая и потенциальная энергии

- **Кинетическая энергия** механической системы — это энергия механического движения этой системы.
- Сила, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы.
- Таким образом, работа dA силы на пути, который тело прошло за время возрастания скорости, идет на увеличение кинетической энергии dT тела, т. е.

$$dA = dT.$$

- Используя второй закон Ньютона $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

и умножая обе части равенства на перемещение $d\vec{r}$, получим

$$\vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = dA.$$

Так как $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$,

То

$$dA = m\vec{v}\,d\vec{v} = mv\,dv = dT$$

откуда

$$T = \int_0^v mv\,dv = mv^2/2.$$

- Таким образом, тело массой *m*, движущееся со скоростью, обладает кинетической энергией

$$T = mv^2/2. \qquad (12.1)$$

- Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.
- В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы.
- **Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета**.

- **Потенциальная энергия** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.
- Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.
- Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них,— **консервативными**.
- Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

- Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией П.
- Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi. \qquad (12.2)$$

- Или

$$\vec{F}d\vec{r} = -d\Pi. \qquad (12.3)$$

- Исходя из (12.3):

$$\Pi = -\int \vec{F}\,d\vec{r} + C,$$

- Для консервативных сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

- или в векторном виде

$$\vec{F} = -grad\,\Pi, \qquad (12.4)$$

$$grad\,\Pi = \vec{i}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \Pi}{\partial z} \qquad (12.5)$$

- Вектор, определяемый выражением (12.5), называется **градиентом скаляра *П*.**

- Наряду с обозначением grad *П* применяется также обозначение с помощью символического вектора, называемого **операторoм Гамильтона** (У. Гамильтон, - ирландский математик и физик) или **набла-оператором**:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (12.6)$$

- Конкретный вид функции *П* зависит от характера силового поля.
- Например, потенциальная энергия тела массой *m*, поднятого на высоту *h* над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh, \qquad (12.7)$$

- Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение *(кинетическая энергия всегда положительна).*
- Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина *h'*), ***П = —mgh'.***

- Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x\,упр} = -kx\,,$$

- $F_{x\,упр}$ — проекция силы упругости на ось *x;*
- ***k*** — **коэффициент упругости** (для пружины — **жесткость**), а знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную деформации *x.*
- По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена, т. е.

$$F_x = -F_{x\,упр} = kx.$$

- Элементарная работа ***dA***, совершаемая силой $\boldsymbol{F_x}$ при бесконечно малой деформации ***dx***, равна

$$dA = F_x dx = kx\,dx,$$

- а полная работа

$$A = \int_0^x kx\,dx = kx^2/2$$

- идет на увеличение потенциальной энергии пружины.
- Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$П = kx^2/2.$$

- Потенциальная энергия системы, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

- **Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий :

$$E = T + \Pi$$

§ 13. Закон сохранения энергии

- Рассмотрим систему материальных точек
- массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Пусть — $\vec{F}_1^{\,\prime}, \vec{F}_2^{\,\prime}, \ldots, \vec{F}_n^{\,\prime}$ равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек,
- а $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными.
- Кроме того, на материальные точки действуют и внешние неконсервативные силы; $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ - равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек.

- При массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^{/} + \vec{F}_1 + \vec{f}_1,$$

- ....

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^{/} + \vec{F}_n + \vec{f}_n.$$

- Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени *dt* совершают перемещения, соответственно равные $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, ..., d\vec{r}_n$.

- Умножим каждое из выше представленных уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i\, dt$, получим:

- $$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}_1^{/} + \vec{F}_1)\, d\vec{r}_1 = \vec{f}_1 d\vec{r}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}_n^{/} + \vec{F}_n)\, d\vec{r}_n = \vec{f}_n d\vec{r}_n.$$

- Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i\, d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{/} + \vec{F}_i)\, d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i\, d\vec{r}_i. \qquad (13.1)$$

- Первый член левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i\, d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} d\,(m_i \vec{v}_i^{\,2}/2) = dT\,,$$

- где *dT* есть приращение кинетической энергии системы.
- Второй член (13.1) равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии *dП* системы (см. (12.2)).
- Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему.

- Таким образом, имеем

$$d\,(T + \Pi) = dA. \qquad (13.2)$$

- При переходе системы из состояния *1* в какое-либо состояние *2*

$$\int_{1}^{2} d\,(T + \Pi) = A_{12}\,,$$

- т. е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами.

- Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T+\Pi)=\mathbf{0}.$$

- Откуда

$$T+\Pi=E=const, \qquad (13.3)$$

- т. е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной.
- Выражение (13.3) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, <u>между которыми действуют только консервативные силы</u>, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

- Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**.
- Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так:
- **в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.**
- Закон сохранения механической энергии связан с ***однородностью времени***, т. е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

- Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии.
- Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) **энергии**.
- Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.
- В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остается неизменной.

- Закон сохранения и превращения энергии — ***фундаментальный закон природы***, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микроскопических тел.
- В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется.
- В этих случаях закон сохранения механической энергии не выполняется.
- Но при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида.
- Таким образом, ***энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.***

§ 14. Графическое представление энергии

- Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты *x*), т.е. $П=П(x)$.
- График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**.
- Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

- Потенциальная энергия тела массой *m*, поднятого на высоту *h* над поверхностью Земли, согласно (12.7), *П(h) = mgh.* График данной зависимости *П = П(h)* — прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 15),
- угол наклона которой
- к оси *h* тем больше,
- чем больше масса
- тела (так как
- tgα = *mg*).

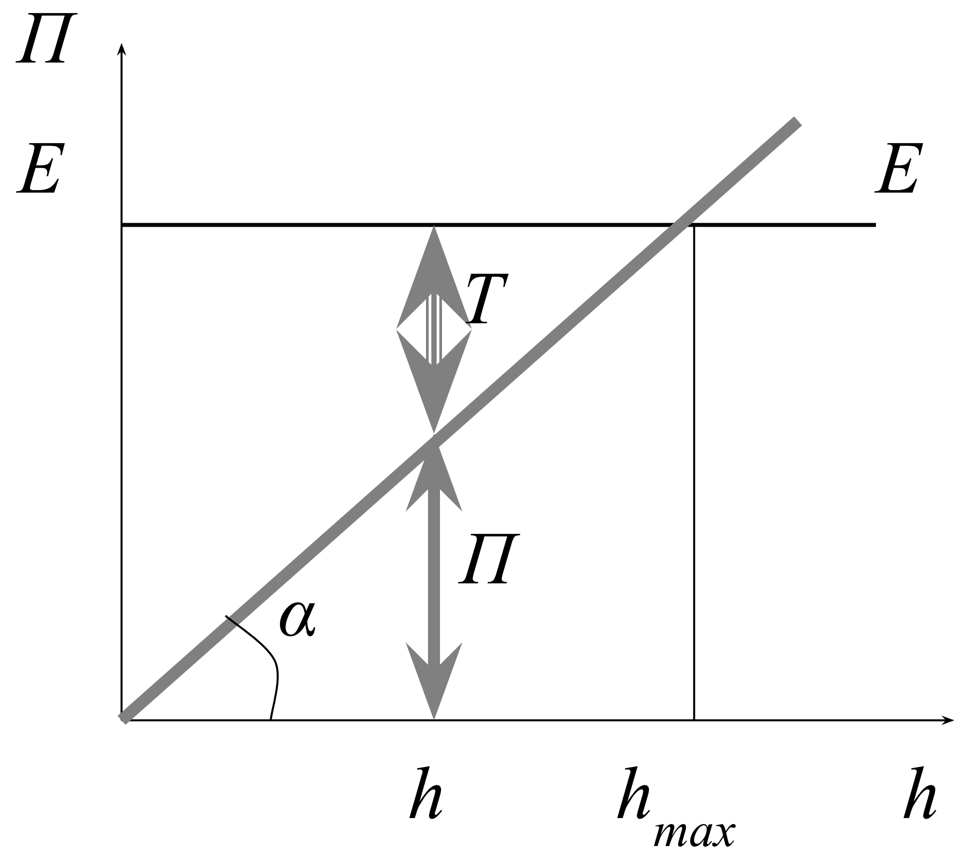

Рис. 15

- Из приведенного графика можно найти скорость тела на высоте *h:*

$$T = E - \Pi,$$

$$mv^2/\mathbf{2} = mgh_{\max} - mgh,$$

$$v = \sqrt{\mathbf{2}g(h_{\max} - h).}$$

- Зависимость потенциальной энергии упругой деформации $П = kx^2/2$ от деформации x имеет вид параболы (рис. 16), где график заданной полной энергии тела E — прямая, параллельная оси абсцисс x, *а* значения T и П определяются так же, как на рис. 15.

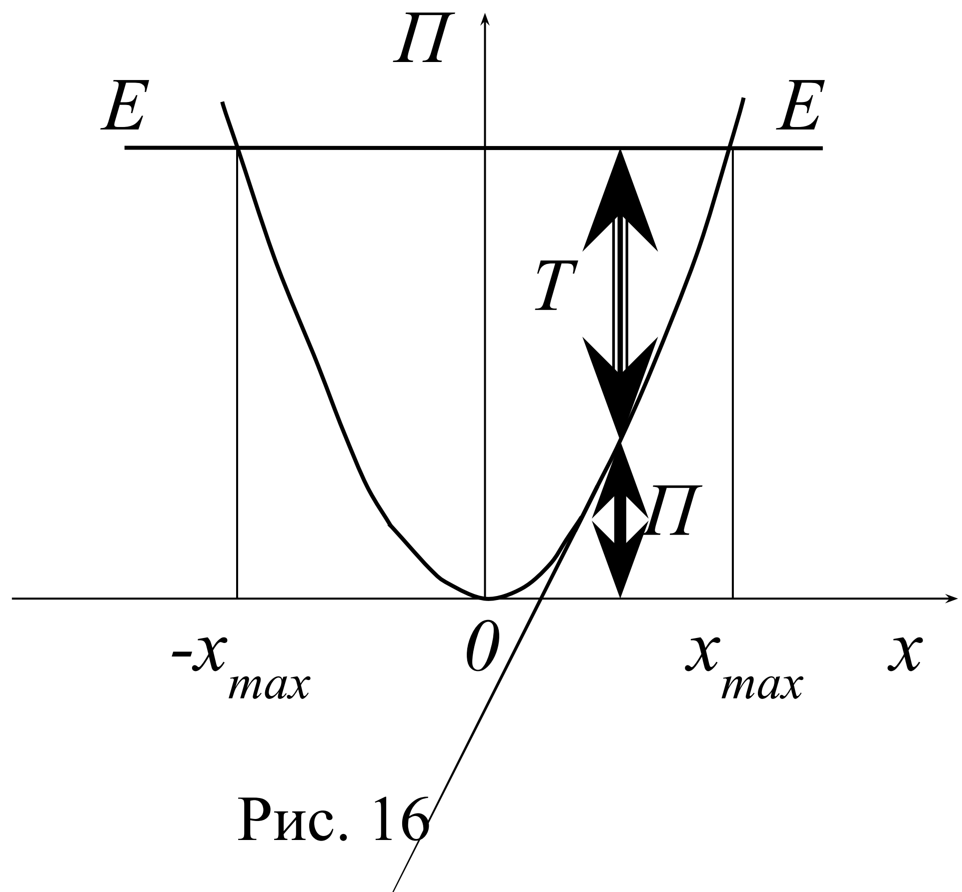

Рис. 16

- В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 17).

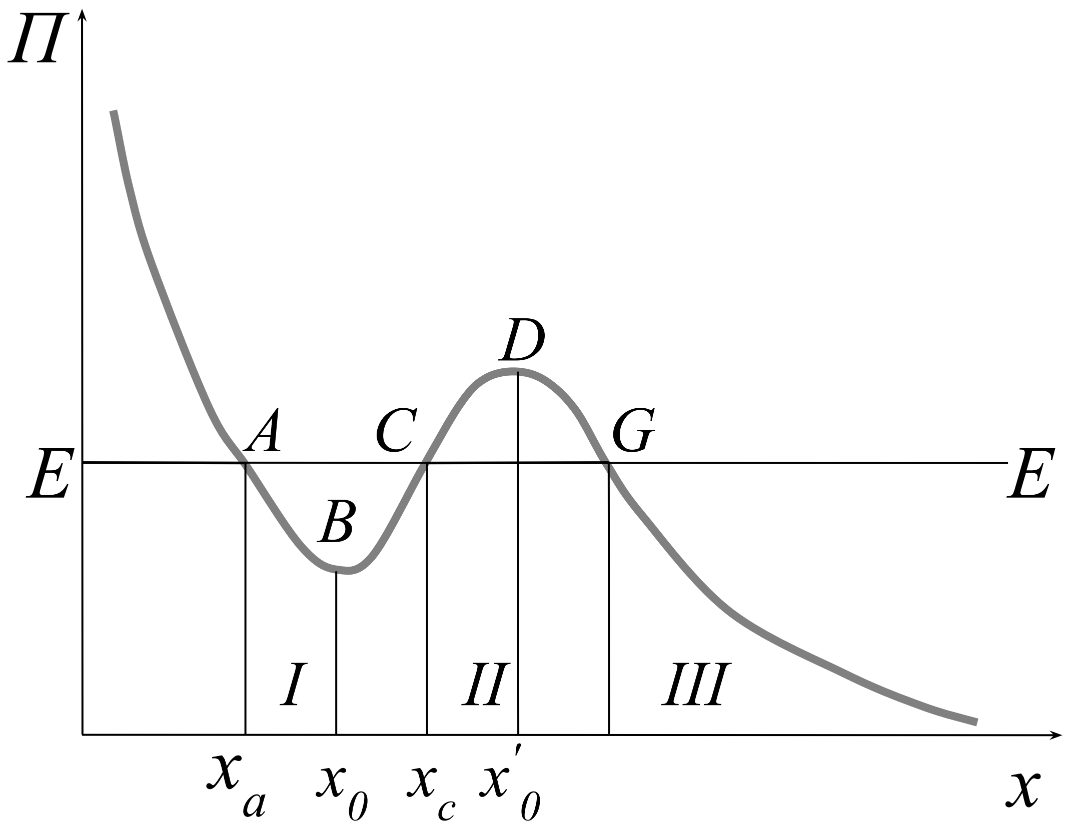

Рис. 17

§ 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

- **Удар** (или **соударение**) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.
- К ударам, кроме столкновения атомов или биллиардных шаров, можно отнести удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. п.
- При ударе в телах возникают столь значительные внутренние силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь.
- Это позволяет рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

- Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации.
- Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами.
- Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления** ε :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = v_n^{/} / v_n .$$

- Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 0$, то такие тела называются **абсолютно неупругими**,
- если $\varepsilon = 1$—**абсолютно упругими**.

- На практике для всех тел $0 < \varepsilon < 1$ (например, для стальных шаров $\varepsilon \approx 0{,}56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon \approx 0{,}89$, для свинца $\varepsilon \approx 0$).

- Однако в некоторых случаях тела можно с большой точностью рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

- Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**.
- Удар называется **центральным**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.
- Мы рассмотрим только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.
- **Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

- Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.
- Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара — через $\vec{v}_1^{\,/}$ и $\vec{v}_2^{\,/}$ (рис. 18).

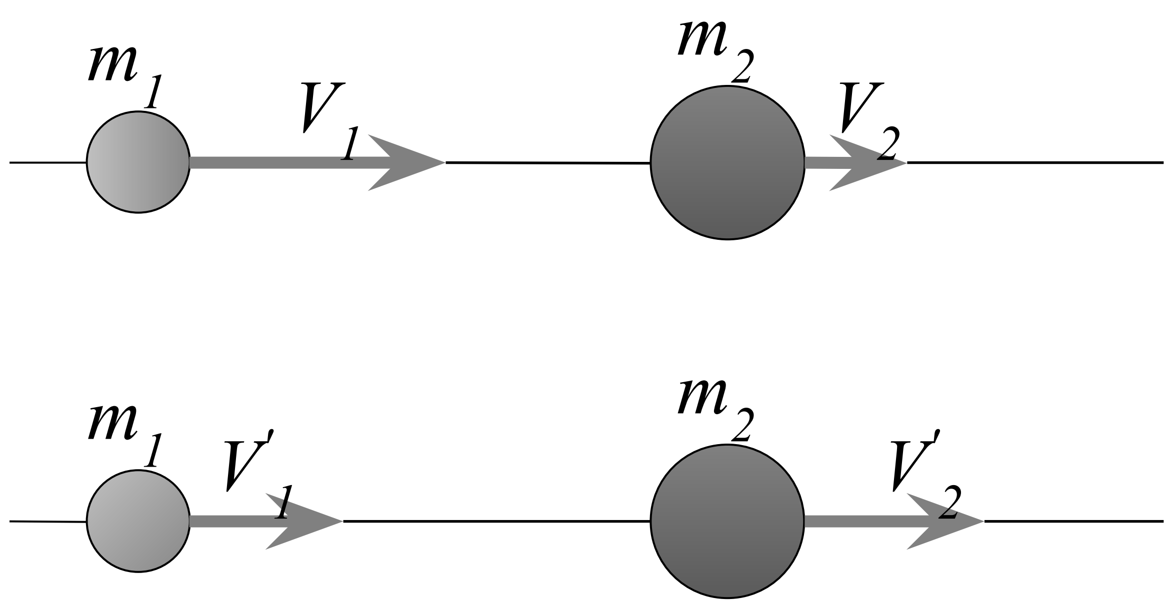

Рис. 18

- Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.
- В этом случае законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \qquad (15.2)$$

- Произведя соответствующие преобразования выражений (15.1) и (15.2), получим

-
- $$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \qquad (15.3)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \qquad (15.4)$$

- разделив (15.4) на (15.3) получим:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \qquad (15.5)$$

- Решая уравнения (15.3) и (15.5), находим

-
- $$v_1^{/} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (15.6)$$

$$v_2^{/} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (15.7)$$

- Рассмотрим несколько конкретных примеров.

- 1) При $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (15.8)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (15.9)$$

- Проанализируем выражения (15.8) и (15.9) для двух шаров различных масс:

- а) Если второй шар до удара висел неподвижно
- ($v_2 = 0$) (рис.19), то после удара остановится первый шар ($v_1^{/} = 0$) (рис. 19), а второй будет двигаться с той же скоростью с которой двигался первый шар до удара ($v_2^{/} = v_1$);

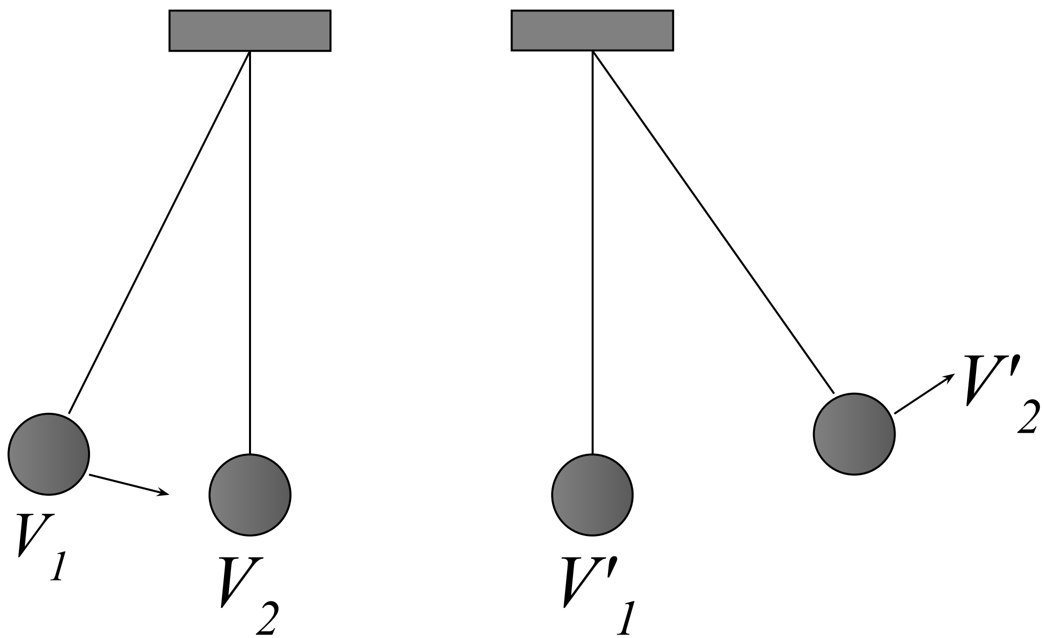

Рис. 19

- б) $m_1 \rangle m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью . Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара (рис. 20);

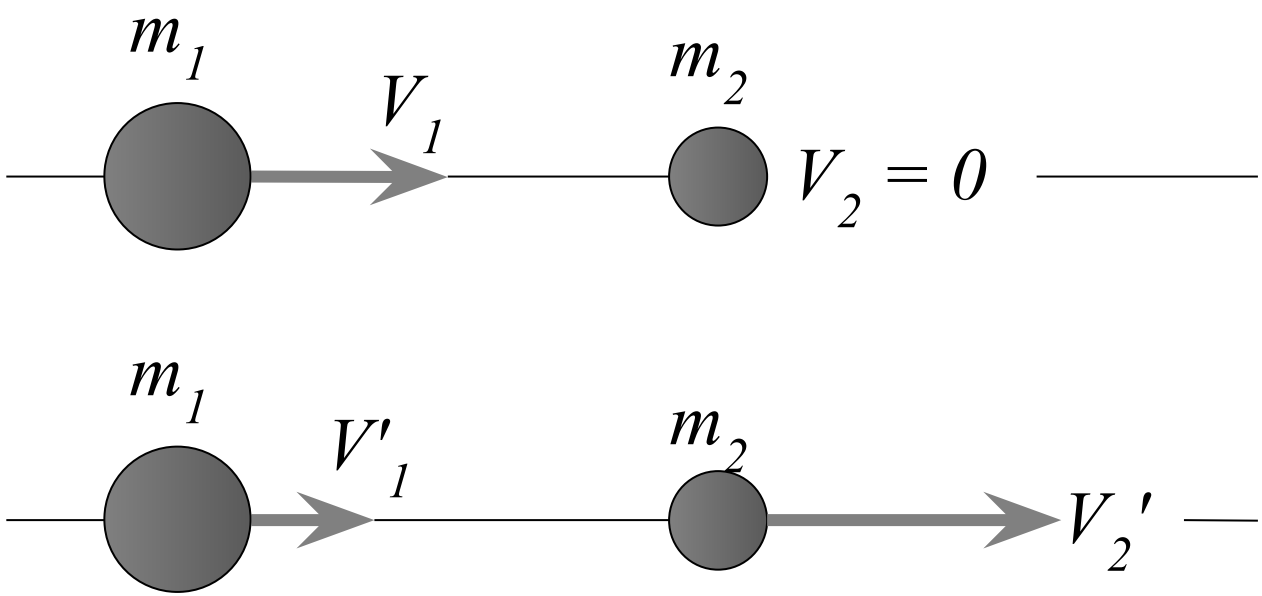

Рис. 20

в) $m_1 \langle m_2$. Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью (рис. 21);

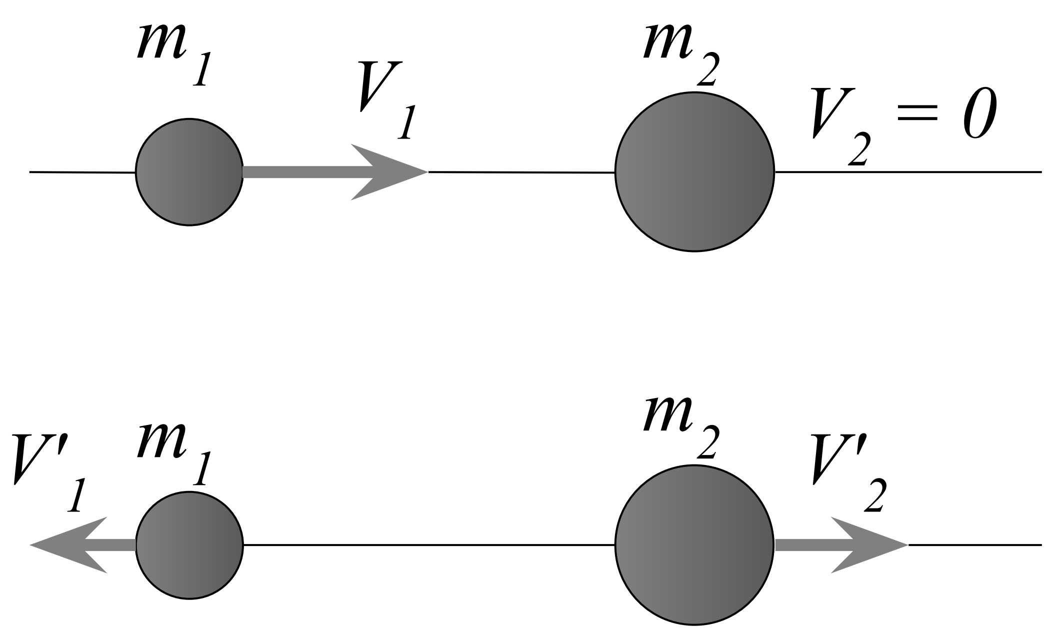

Рис. 21

- г) $m_1 \ll m_2$ (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (15.8) и (15.9) следует, что

$$v_1' \approx -v_1, \; v_2' \approx 2m_1 v_1 / m_2 \approx 0.$$

- 2) При $m_1 = m_2$ выражения (15.6) и (15.7) будут иметь вид

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1,$$

- т. е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

- **Абсолютно неупругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 22).

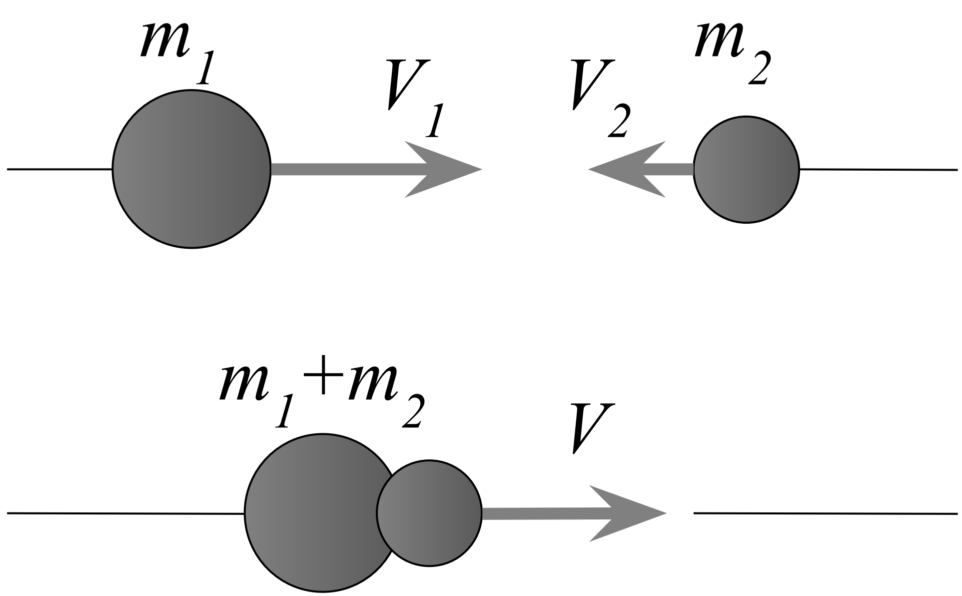

Рис. 22

- Используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v},$$

- Откуда

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (15.10)$$

- Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом.
- В частном случае если массы шаров равны, то

$$\vec{v} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2.$$

- Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе.
- Так как в процессе соударения шаров вследствие их деформации происходит «потеря» кинетической энергии (переход в тепловую и другие формы энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

- Используя (15.10), получим

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 .$$

- Если ударяемое тело было первоначально неподвижно $(v_2 = 0)$, то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

- Когда $m_2 \gg m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии.
- Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.
- Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей $(m_1 \gg m_2)$, тогда $v \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя.
- Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.