

Глава 3

Работа и энергия

§11. Энергия, работа, мощность

- **Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия материи.**
- С различными формами движения материи связывают различные **формы энергии**: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др.
- В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других—переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое).
- Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

- Чтобы количественно характеризовать обмен энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.
- Если тело движется **прямолинейно** и на него действует **постоянная сила**, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции этой силы на направление перемещения, умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = FS \cos \alpha = F_S S \quad (11.1)$$

- В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (11.1) пользоваться нельзя.
- Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение $d\vec{r}$, то силу \vec{F} можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным.
- **Элементарной работой**
- силы \vec{F} на перемещении $d\vec{r}$ называется **скалярная** величина

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha dS = F_S dS,$$

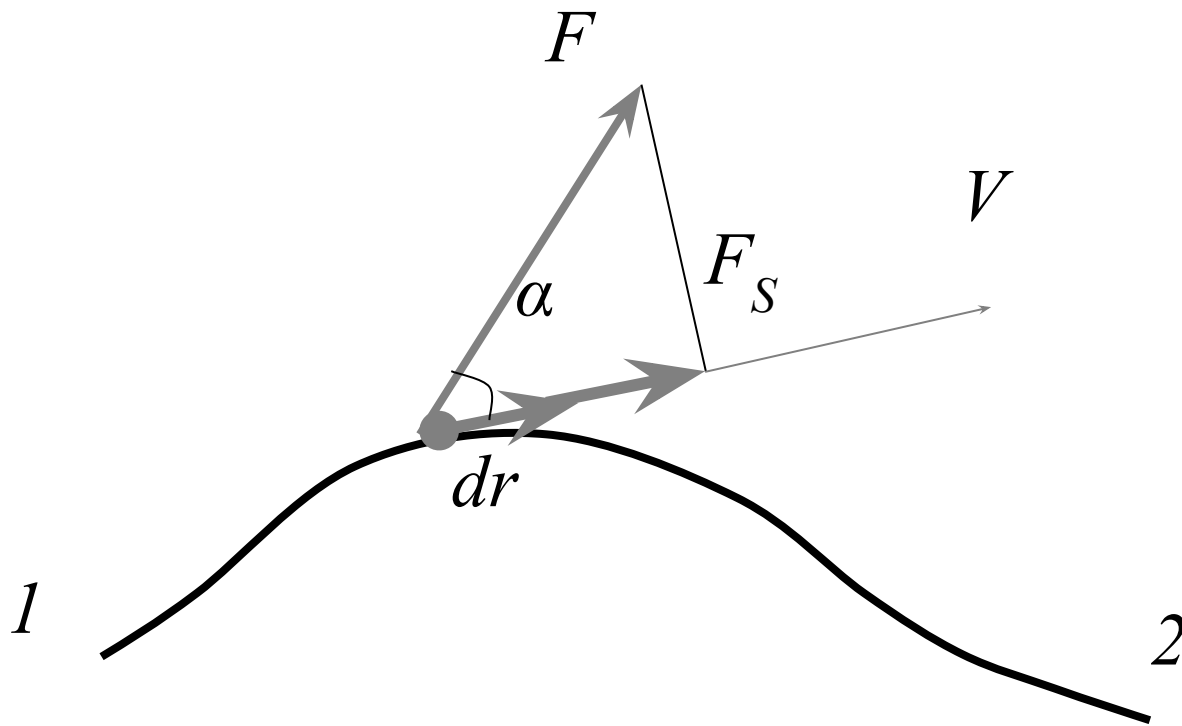


Рис. 13

- Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути.

- Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F \cos \alpha dS = \int_1^2 F_S dS. \quad (11.2)$$

- Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_S от пути S вдоль траектории 1—2. Пусть эта
- зависимость
- представлена
- графически (рис. 14),
- тогда искомая работа
- A определяется на
- графике площадью.

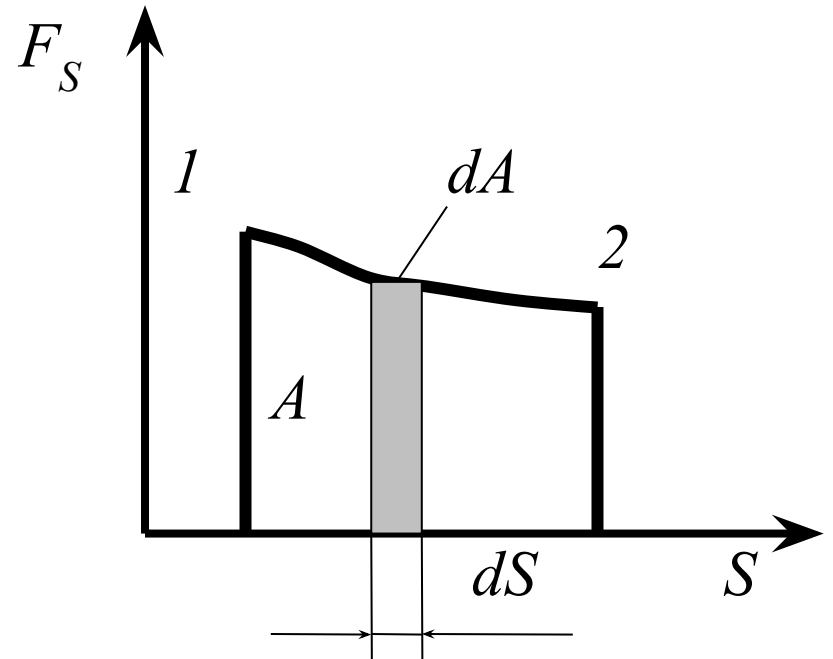


Рис. 14

- Если, например, тело движется прямолинейно, сила $F = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F \cos \alpha dS = F \cos \alpha \int_1^2 dS = FS \cos \alpha,$$

- где S — пройденный телом путь (см. также формулу (11.1)).
- Из этой формулы следует, что при $\alpha < \pi / 2$ работа силы положительна.
- Если, $\alpha > \pi / 2$ то работа силы отрицательна.
- При $\alpha = \pi / 2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.
- Единица работы—**джоуль** (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой в 1 Н на пути в 1 м
- (1 Дж=1 Н•м).

- Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **МОЩНОСТИ**:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (11.3)$$

- За время dt сила \vec{F} совершает работу $\vec{F} d\vec{r}$, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v},$$

- т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; N — величина *скалярная*.
- Единица мощности—ватт (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

§ 12. Кинетическая и потенциальная энергии

- **Кинетическая энергия** механической системы — это энергия механического движения этой системы.
- Сила, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы.
- Таким образом, работа dA силы на пути, который тело прошло за время возрастания скорости, идет на увеличение кинетической энергии dT тела, т. е.

$$dA = dT.$$

• Используя второй закон Ньютона $F = m \frac{dv}{dt}$

и умножая обе части равенства на перемещение dr ,
получим

$$F dr = m \frac{dv}{dt} dr = dA.$$

Так как $v = \frac{dr}{dt}$,

то $dA = m v dv = dT$

откуда $T = \int_0^v m v dv = m v^2 / 2.$

0

- Таким образом, тело массой m , движущееся со скоростью, обладает кинетической энергией

$$T = mv^2 / 2. \quad (12.1)$$

- Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.
- В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы.
- **Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.**

- **Потенциальная энергия** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.
- Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.
- Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них, — **консервативными**.
- Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является **сила трения**.

- Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией Π .
- Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi. \quad (12.2)$$

- Или $\overset{\sphericalangle}{F} d\overset{\sphericalangle}{r} = -d\Pi. \quad (12.3)$

- Исходя из (12.3):

$$\Pi = -\int \overset{\sphericalangle}{F} d\overset{\sphericalangle}{r} + C,$$

- Для консервативных сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

- или в векторном виде

$$\vec{F} = -\text{grad } \Pi, \quad (12.4)$$

$$\text{grad } \Pi = i \frac{\partial \Pi}{\partial x} + j \frac{\partial \Pi}{\partial y} + k \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (12.5)$$

- Вектор, определяемый выражением (12.5), называется **градиентом скаляра Π** .

- Наряду с обозначением grad Π применяется также обозначение с помощью символического вектора, называемого **оператором Гамильтона** (У. Гамильтон, - ирландский математик и физик) или **набла-оператором**:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}. \quad (12.6)$$

- Конкретный вид функции Π зависит от характера силового поля.
- Например, потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh, \quad (12.7)$$

- Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна*).
- Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $\Pi = -mgh'$.
- Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x \text{ упр}} = -kx,$$

- $F_{x \text{ упр}}$ — проекция силы упругости на ось x ;
- k — коэффициент упругости (для пружины — жесткость), а знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную деформации x .
- По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена, т. е.

$$F_x = -F_{x \text{ упр}} = kx.$$

- Элементарная работа dA , совершаемая силой F_x при бесконечно малой деформации dx , равна

$$dA = F_x dx = kx dx,$$

- а полная работа

$$A = \int_0^x kx \, dx = kx^2 / 2$$

- идет на увеличение потенциальной энергии пружины.
- Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$П = kx^2/2.$$

- Потенциальная энергия системы, является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

- **Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий :

$$E = T + \Pi$$

§ 13. Закон сохранения энергии

- Рассмотрим систему материальных точек
- массами m_1, m_2, \dots, m_n , движущихся со скоростями v_1, v_2, \dots, v_n . Пусть — F_1', F_2', \dots, F_n' равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек,
- а F_1, F_2, \dots, F_n — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными.
- Кроме того, на материальные точки действуют и внешние неконсервативные силы; f_1, f_2, \dots, f_n - равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек.

- При массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = F_1' + F_1 + f_1,$$

-

.....

$$m_n \frac{dv_n}{dt} = F_n' + F_n + f_n.$$

- Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные dr_1, dr_2, \dots, dr_n .

- Умножим каждое из выше представленных уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $dr_i^{\boxtimes} = v_i^{\boxtimes} dt$, получим:

$$m_1 (v_1^{\boxtimes} dv_1^{\boxtimes}) - (F_1' + F_1) dr_1^{\boxtimes} = f_1^{\boxtimes} dr_1^{\boxtimes},$$

$$m_n (v_n^{\boxtimes} dv_n^{\boxtimes}) - (F_n' + F_n) dr_n^{\boxtimes} = f_n^{\boxtimes} dr_n^{\boxtimes}.$$

- Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i (v_i^{\boxtimes} dv_i^{\boxtimes}) - \sum_{i=1}^n (F_i' + F_i) dr_i^{\boxtimes} = \sum_{i=1}^n f_i^{\boxtimes} dr_i^{\boxtimes}. \quad (13.1)$$

- Первый член левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^n m_i (v_i dv_i) = \sum_{i=1}^n d(m_i v_i^2 / 2) = dT ,$$

- где dT есть приращение кинетической энергии системы.
- Второй член (13.1) равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы (см. (12.2)).
- Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему.

- Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA. \quad (13.2)$$

- При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

- т. е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами.

- Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T + \Pi) = \mathbf{0}.$$

- Откуда

$$T + \Pi = E = \text{const}, \quad (13.3)$$

- т. е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной.
- Выражение (13.3) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

- Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**.
- Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так:
- **в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.**
- Закон сохранения механической энергии связан с **однородностью времени**, т. е. инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени.

- Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии.
- Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) **энергии**.
- Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.
- В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остается неизменной.

- Закон сохранения и превращения энергии — **фундаментальный закон природы**, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микроскопических тел.
- В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется.
- В этих случаях закон сохранения механической энергии не выполняется.
- Но при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида.
- Таким образом, **энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.**

§ 14. Графическое представление энергии

- Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты x), т.е. $\Pi = \Pi(x)$.
- График зависимости потенциальной энергии от некоторого аргумента называется **потенциальной кривой**.
- Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

- Потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли, согласно (12.7), $\Pi(h) = mgh$. График данной зависимости $\Pi = \Pi(h)$ — прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 15),
- угол наклона которой
- к оси h тем больше,
- чем больше масса
- тела (так как
- $\operatorname{tg}\alpha = mg$).

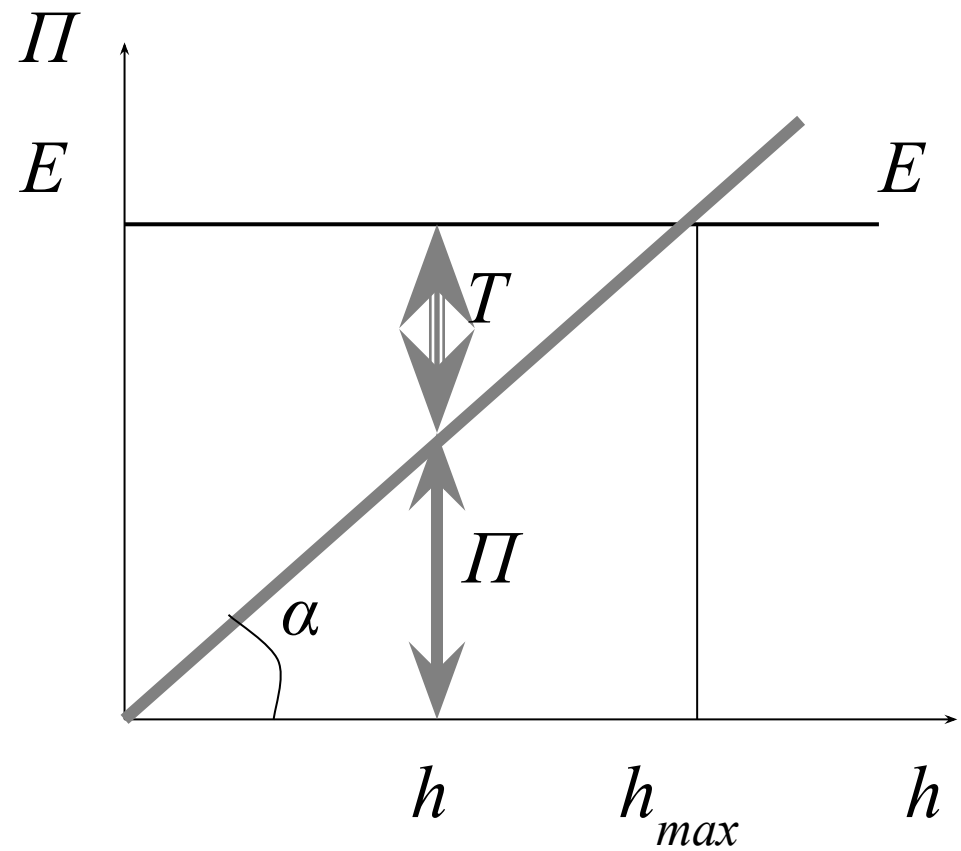


Рис. 15

- Из приведенного графика можно найти скорость тела на высоте h :

$$T = E - \Pi,$$

$$mv^2 / 2 = mgh_{\max} - mgh,$$

$$v = \sqrt{2g(h_{\max} - h)}.$$

- Зависимость потенциальной энергии упругой деформации $\Pi = kx^2/2$ от деформации x имеет вид параболы (рис. 16), где график заданной полной энергии тела E — прямая, параллельная оси абсцисс x , а значения T и Π определяются так же, как на рис. 15.

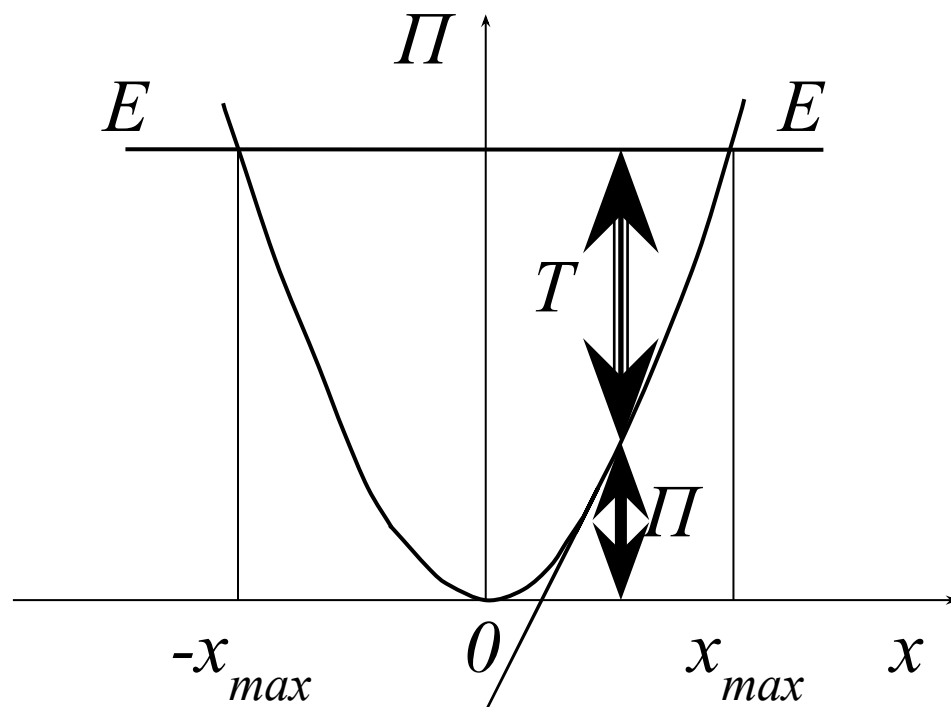


Рис. 16

- В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 17).

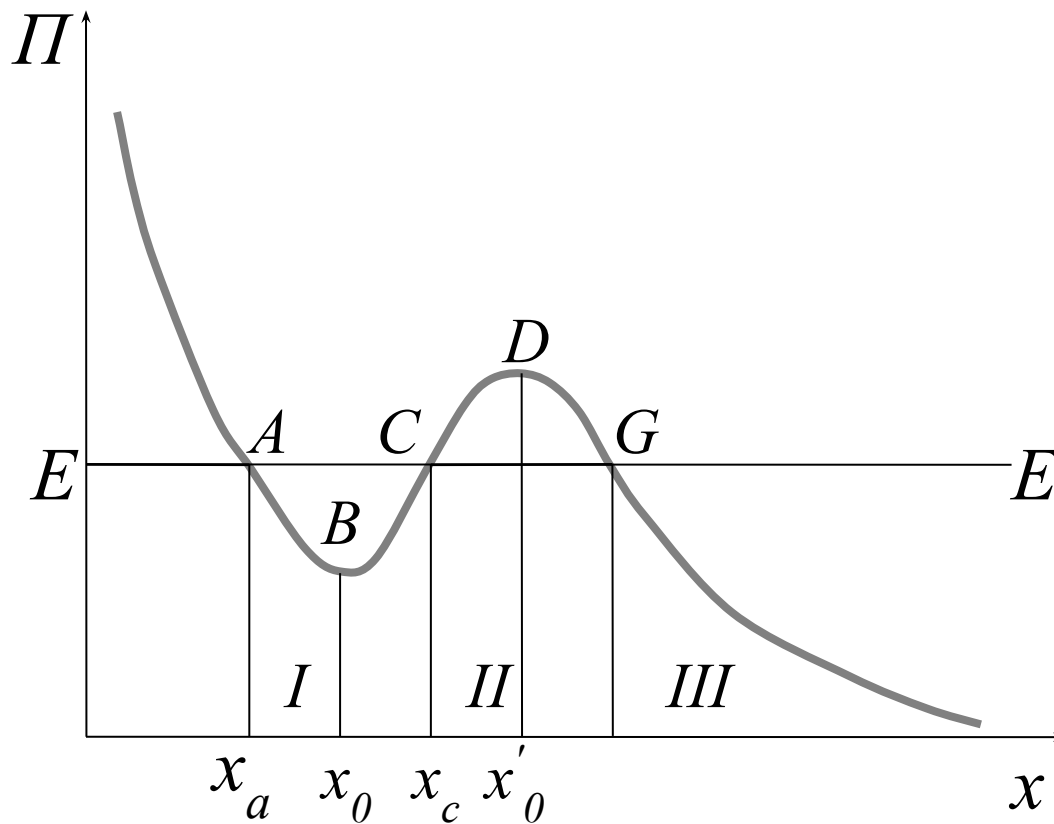


Рис. 17

§ 15. Удар абсолютно упругих и неупругих тел

- **Удар** (или **соударение**) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.
- К ударам, кроме столкновения атомов или бильiardных шаров, можно отнести удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. п.
- При ударе в телах возникают столь значительные внутренние силы, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь.
- Это позволяет рассматривать соударяющиеся тела как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

- Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации.
- Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами.
- Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления** ε :

$$\varepsilon = v'_n / v_n .$$

- Если для сталкивающихся тел $\varepsilon = 0$, то такие тела называются **абсолютно неупругими**,
- если $\varepsilon = 1$ —**абсолютно упругими**.
- На практике для всех тел $0 < \varepsilon < 1$ (например, для стальных шаров $\varepsilon \approx 0,56$, для шаров из слоновой кости $\varepsilon \approx 0,89$, для свинца $\varepsilon \approx 0$).
- Однако в некоторых случаях тела можно с большой точностью рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

- Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**.
- Удар называется **центральный**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.
- Мы рассмотрим только центральные абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.
- **Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

- Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.
- Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через v_1 и v_2 , после удара — через v_1' и v_2' (рис. 18).

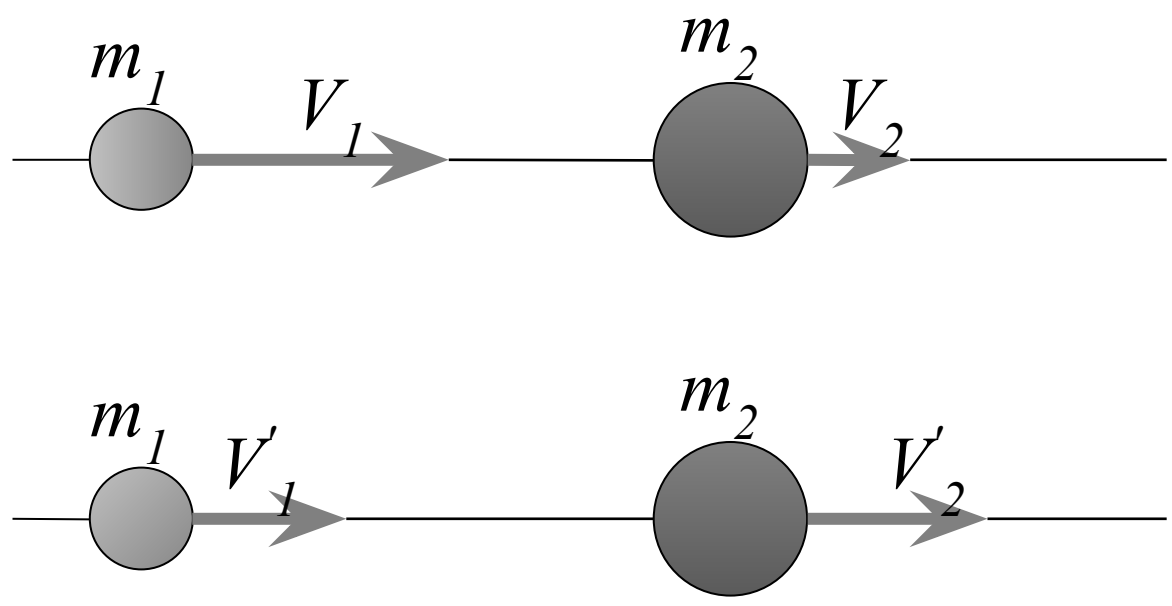


Рис. 18

- Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.
- В этом случае законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (15.2)$$

- Произведя соответствующие преобразования выражений (15.1) и (15.2), получим

-
- $$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (15.3)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (15.4)$$

- разделив (15.4) на (15.3) получим:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad (15.5)$$

- Решая уравнения (15.3) и (15.5), находим

-
- $$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (15.6)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (15.7)$$

- Рассмотрим несколько конкретных примеров.

- 1) При $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (15.8)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (15.9)$$

- Проанализируем выражения (15.8) и (15.9) для двух шаров различных масс:

- а) Если второй шар до удара висел неподвижно ($v_2 = 0$) (рис.19), то после удара остановится первый шар ($v'_1 = 0$) (рис. 19), а второй будет двигаться с той же скоростью с которой двигался первый шар до удара ($v'_2 = v_1$);

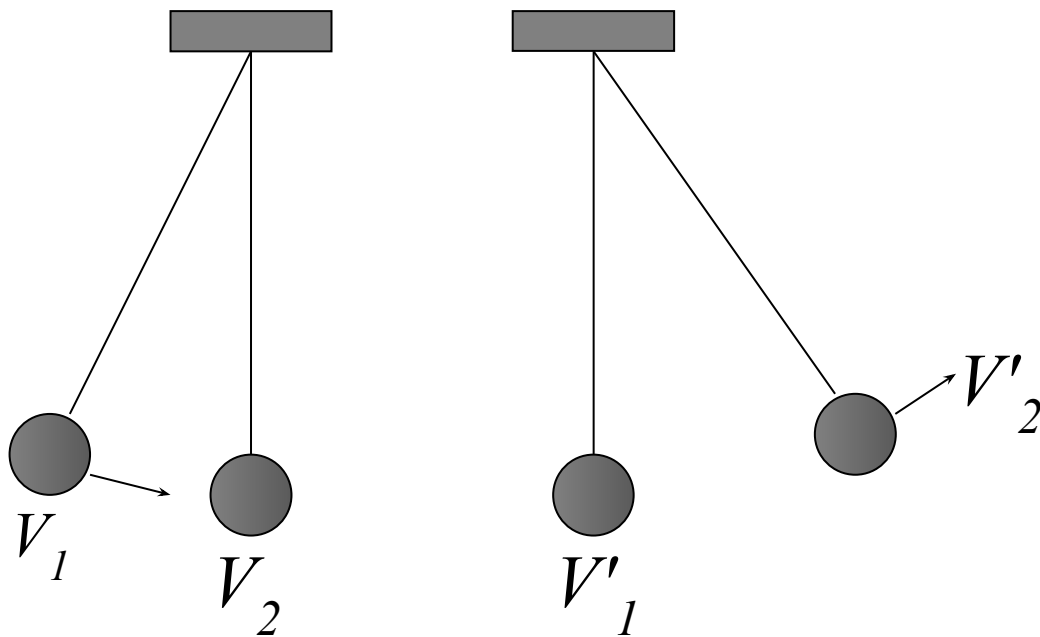


Рис. 19

- б) $m_1 > m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью. Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара (рис. 20);

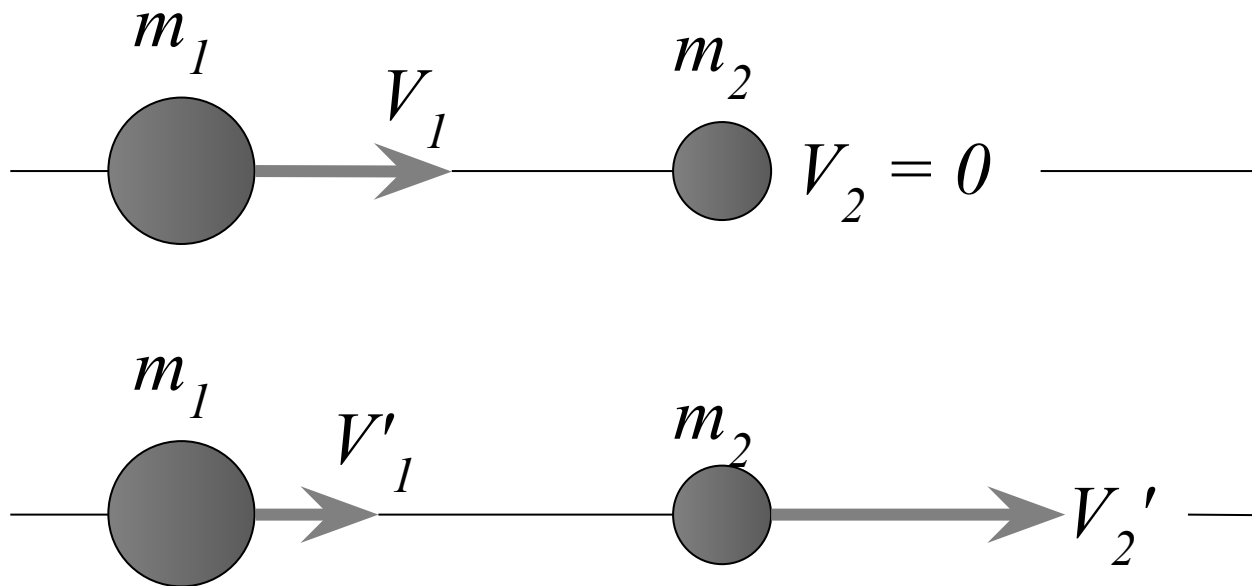


Рис. 20

В) $m_1 < m_2$. Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью (рис. 21);

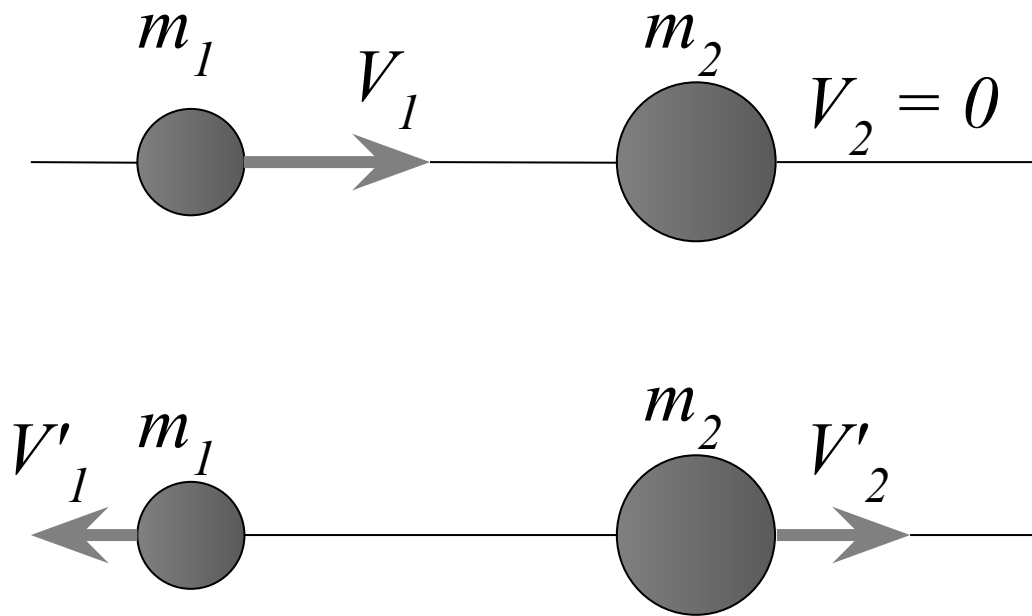


Рис. 21

- г) $m_1 \ll m_2$ (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (15.8) и (15.9) следует, что

$$v_1' \approx -v_1, \quad v_2' \approx 2m_1 v_1 / m_2 \approx 0.$$

- 2) При $m_1 = m_2$ выражения (15.6) и (15.7) будут иметь вид

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1,$$

- т. е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

- **Абсолютно неупругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.
Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 22).

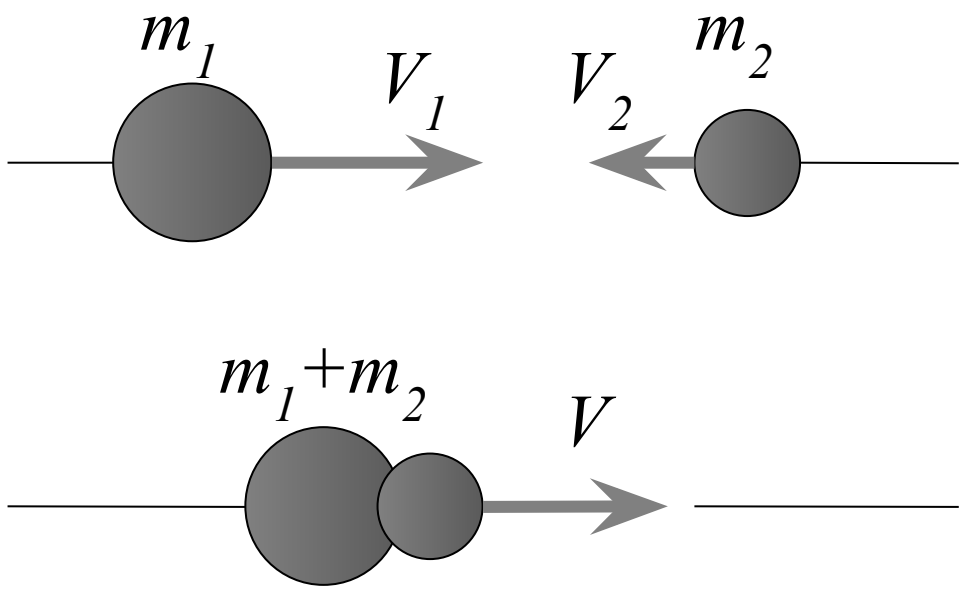


Рис. 22

- Используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

- Откуда

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.10)$$

- Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом.
- В частном случае если массы шаров равны, то

$$\vec{v} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) / 2.$$

- Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе.
- Так как в процессе соударения шаров вследствие их деформации происходит «потеря» кинетической энергии (переход в тепловую и другие формы энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

- Используя (15.10), получим

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

- Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = \mathbf{0}$), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

- Когда $m_2 \gg m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии.
- Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка.
- Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ($m_1 \gg m_2$) тогда $v \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя.
- Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.