Электромагнитные поля и волны

Лекция 2

Тема 2

Система уравнений Максвелла

Это основные уравнения электромагнетизма, которые не выводятся, а постулируются на основе экспериментальных данных, проверяются новыми экспериментами.

Рассмотри наиболее простой вариант системы уравнений Максвелла, когда заряды (токи) находятся в вакууме, т.е. не учитываем свойства окружающей среды

Интегральная форма $\mapsto$ Дифференциальная форма

---

1. $$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \text{ или}$$

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{\int\limits_{(V)} \rho \cdot dV}{\varepsilon_0}$$

Поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов внутри данной поверхности

– теорема Остроградского-Гаусса (рис. 2.4)

по теореме Гаусса

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

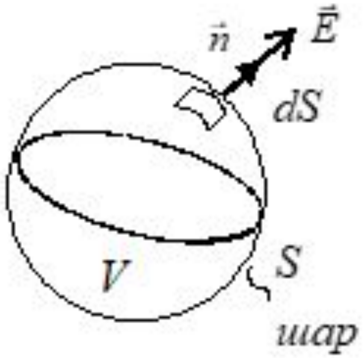

Рис. 2.4

Дивергенция вектора $\vec{E}$ в любой точке пространства пропорциональна плотности электрических зарядов в данной точке

2. $\oint\limits_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$

– закон отсутствия в природе магнитных зарядов (рис. 2.5)

Поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю

по теореме Гаусса $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Дивергенция вектора $\vec{B}$ всегда равна нулю

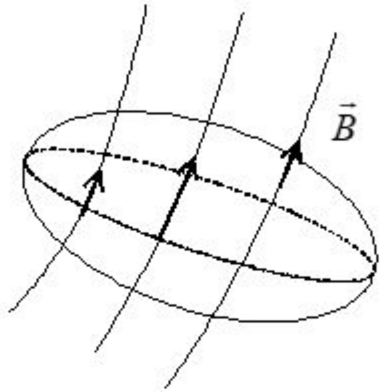

Рис. 2.5

3.

$$\mathcal{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ или}$$

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int\limits_{(S)} \vec{B} d\vec{S}, \text{ или}$$

$$\oint\limits_{(l)} \vec{E} d\vec{l} = -\int\limits_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна изменению со временем потока вектора $\vec{B}$ через поверхность, ограниченную данным контуром, с противоположным знаком

– закон электромагнитной индукции (на рис. 2.6 показан случай, если поле B – возрастает)

по теореме Стокса

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ротор $\vec{E}$ в данной точке равен изменению $\vec{B}$ со временем с обратным знаком

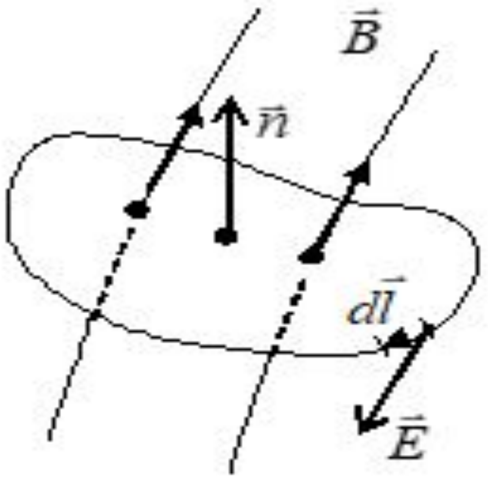

Рис. 2.6

4. $$c^2 \cdot \oint\limits_{(l)} \vec{B}d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int\limits_{(s)} \vec{E}d\vec{S} + \frac{I}{\varepsilon_0}, \text{ или}$$

$$c^2 \cdot \oint\limits_{(l)} \vec{B}d\vec{l} = \int\limits_{(s)} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \right) d\vec{S}$$

по теореме Стокса

$$c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$$

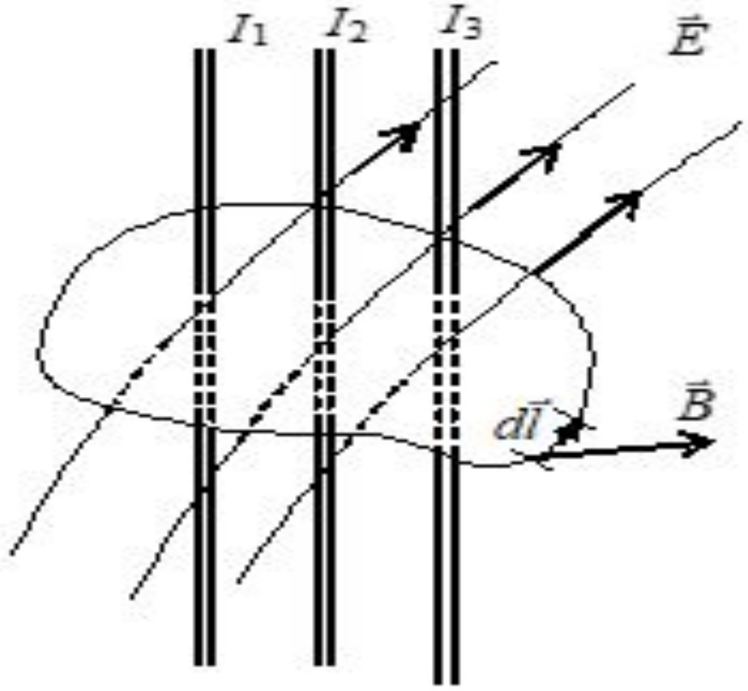

Рис. 2.7

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2}.$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 \;) \; 0 = \frac{\nabla \vec{j}}{\varepsilon_0 c^2}.$$

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Чтобы избежать этой трудности, Максвелл добавил в 4 уравнение еще одно слагаемое, которое назвал током смещения ($\vec{j}$ – плотность тока проводимости, $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ – плотность тока смещения)

Частный случай применения уравнений Максвелла: статическое поле

Условие: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Тогда из уравнений Максвелла получаем:

1-е: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (без изменений);

2-е: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (без изменений);

3-е: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, нет переменного магнитного поля;4-е: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$,

нет переменного электрического поля.

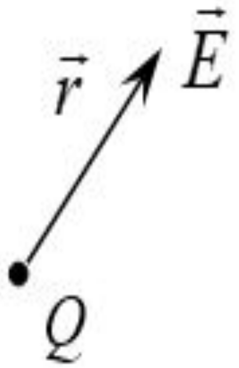

Рис. 2.8

1. *Электрическое статическое поле* (поле неподвижных электрических зарядов). Рассмотрим на примере точечного заряда (рис. 2.8).

1) Согласно 1-му уравнению Максвелла:

$$\oint\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{\int\limits_{(V)} \rho \cdot dV}{\varepsilon_0}, \text{ или } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$F_к = qE = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

2) $\oint\limits_{(l)} \vec{E}d\vec{l} = 0$ (2.3) – условие потенциальности электрического статического поля, так как в случае, когда точечный заряд находится в потенциальном поле, работа кулоновской силы по замкнутому контуру равна нулю:

$$A = \oint\limits_{(l)} \vec{F}_{к} d\vec{l} = 0, \text{ или } \oint\limits_{(l)} q\vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Согласно теореме Стокса из равенства (2.3): $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$. По 1-й теореме для вторых производных поля: $\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}$, т. е. $\vec{E} = -\nabla \varphi$. (2.4)

Укажем на математическую неопределенность в отсчете потенциала в равенстве (2.4): подставим в (2.4) $\varphi' = \varphi + C$, где C – константа. Тогда $\vec{E}' = -\nabla\varphi' = -\nabla(\varphi + C) = -\nabla\varphi - \nabla C = -\nabla\varphi = \vec{E}$. То есть φ определяется с точностью до константы, за которую обычно берется $\varphi_0 = 0$.

Теперь подставим равенство (2.4) в 1-е уравнение Максвелла $\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, или $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, или $\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ – уравнение Пуассона. Из данного уравнения следует, что зависимость $\rho(x, y, z)$ однозначно определяет зависимость $\varphi(x, y, z)$, а значит и $\vec{E}$.

2. *Статическое магнитное поле* (поле стационарных (постоянных во времени) электрических токов).

1) Согласно 4-му уравнению Максвелла $c^2 \oint\limits_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = \dfrac{\int\limits_{(S)} \vec{j} d\vec{S}}{\varepsilon_0}$, здесь $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ (скорость света в вакууме), тогда $\oint\limits_{(l)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_i$

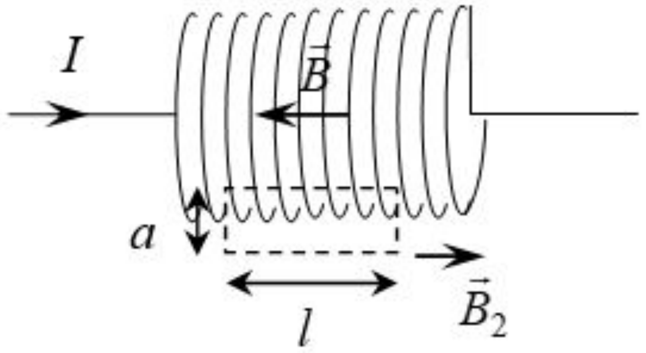

Рис. 2.9

Применим данное уравнение к соленоиду (рис. 2.9): $B \cdot l + B_1 \cdot a - B_2 \cdot l - B_1 \cdot a = \mu_0 NI$, здесь N – количество витков, охваченных мысленным контуром, B – поле внутри соленоида, $B_2 \cong 0$ – поле снаружи соленоида. Или $B \cdot l = \mu_0 NI$,отсюда индукция магнитного поля в соленоиде

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

2) Из 4-го уравнения Максвелла в дифференциальной форме: $c^2 \cdot \nabla \times \vec{B} = \dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$, или $c^2 \cdot \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \dfrac{\nabla \vec{j}}{\varepsilon_0}$, отсюда по теореме $0 = \dfrac{\nabla \vec{j}}{\varepsilon_0}$

– что показывает, что линии $\vec{j}$ являются замкнутыми, т. е. постоянный ток течет по замкнутым цепям (В случае переменного электрического поля ток бы был переменным и определялся бы в соответствии с законом сохранения заряда $\nabla \vec{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$).

3) Введем понятие векторного потенциала. Так как $\nabla\vec{B}=0$, то согласно математической теореме существует такое векторное поле $\vec{A}$, что $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$, и тогда $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ (2.5) – получили формулу, связывающую индукцию магнитного поля и векторный потенциал поля.

Т.е. например: $B_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}$, $E_x=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, т. е. компоненты электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выражаются через потенциалы φ и $\vec{A}$.

Из формулы (2.5) видно, что векторный потенциал $\vec{A}$ определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции ψ, или $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$. Покажем это: $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \cdot \psi) =$ $= \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, что и требуется $\vec{B}' = \vec{B}$.

Для уменьшения произвола выбора векторного потенциала $\vec{A}$ вводятся калибровки. Одна из них, калибровка Кулона применяется для статических полей: $\boxed{\nabla\vec{A} = 0}$.

Подставим эту калибровку в 4-е уравнение Максвелла для статического поля: $c^2(\nabla\times\vec{B})=\dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$,

здесь $\nabla\times\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla\cdot(\nabla\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=-\nabla^2\vec{A}$.

Тогда $-c^2(\nabla^2\vec{A})=\dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$, или $\boxed{-\nabla^2\vec{A}=\dfrac{\vec{j}}{c^2\varepsilon_0}}$ – уравнение Пуассона для магнитного поля.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ