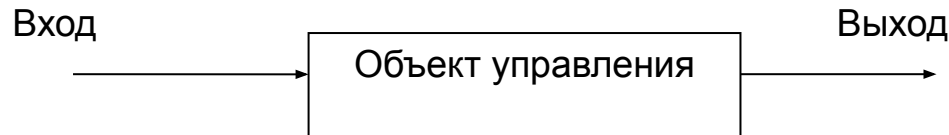
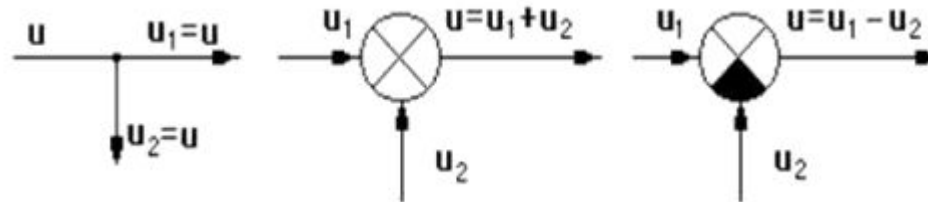
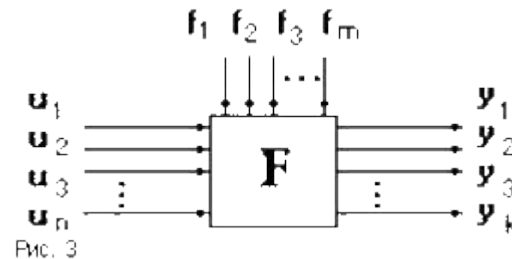


Процесс или объект, подлежащий управлению, может быть представлен в виде блока

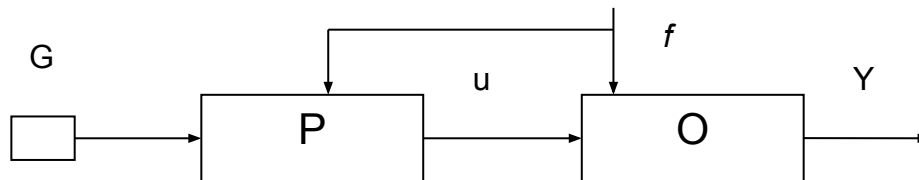


В общем случае функциональное звено может иметь несколько входов и выходов.



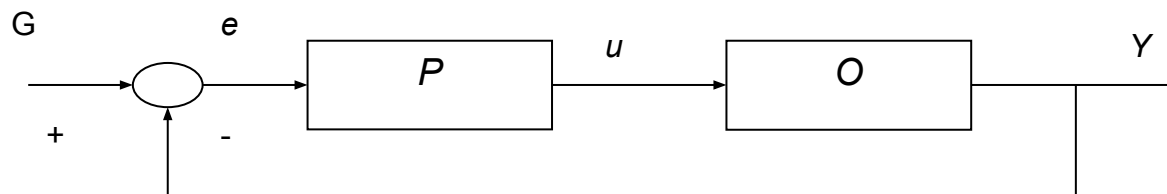
Точки разветвления сигнала называются *узлами*. Суммирование сигналов осуществляется в *сумматоре*, вычитание - в *сравнивающем устройстве*.

## *Принцип управления по внешнему возмущению*



Пусть  $y_o$  - значение выходной величины, которое требуется обеспечить согласно программе. На самом деле из-за возмущения  $f$  на выходе регистрируется значение  $y$ . Величина  $e = y_o - y$  называется *отклонением от заданной величины*.

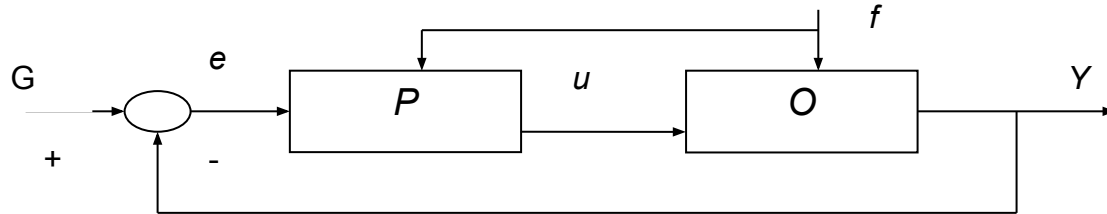
## *Принцип управления по отклонению*



$$e = G - Y$$

$$u(t) = \varphi\{e(t)\}$$

## Комбинированный принцип управления



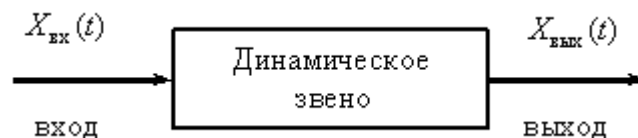
$$u(t) = \varphi\{e(t), f(t)\}$$

*Система называется линейной, если к ней применим принцип суперпозиции.*

Предположим, например, что реакция системы на вход  $r_1(t)$  есть  $c_1(t)$ , а реакция на вход  $r_2(t)$  есть  $c_2(t)$ .

Если система является линейной, то ее реакция на входы  $k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$  будет равна  $k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)$ , где  $k_1$  и  $k_2$  - произвольные константы.

Если уравнение, связывающее сигналы  $X_{\text{вх}}(t)$  и  $X_{\text{вых}}(t)$ , линейно, то говорят о линейном динамическом звене.



Уравнение линейного динамического звена имеет следующий общий вид:

$$a_n \frac{d^n X_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX_{вых}(t)}{dt} + a_0 X_{вых}(t) =$$

$$b_m \frac{d^m X_{вх}(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} X_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dX_{вх}(t)}{dt} + b_0 X_{вх}(t),$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_m$  - постоянные коэффициенты,  $m \leq n$ .

Если задать начальные условия и найти траекторию динамического движения выходной координаты, то можно записать:

$$X_{вых}(t) = X_{св}(t) + X_{выхн}(t)$$

С учетом оператора дифференцирования  $p = \frac{d}{dt}$

Уравнение, которое определяет свободное движение объекта:

$$a_n \frac{d^n X_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX_{вых}(t)}{dt} + a_0 X_{вых}(t) = 0$$

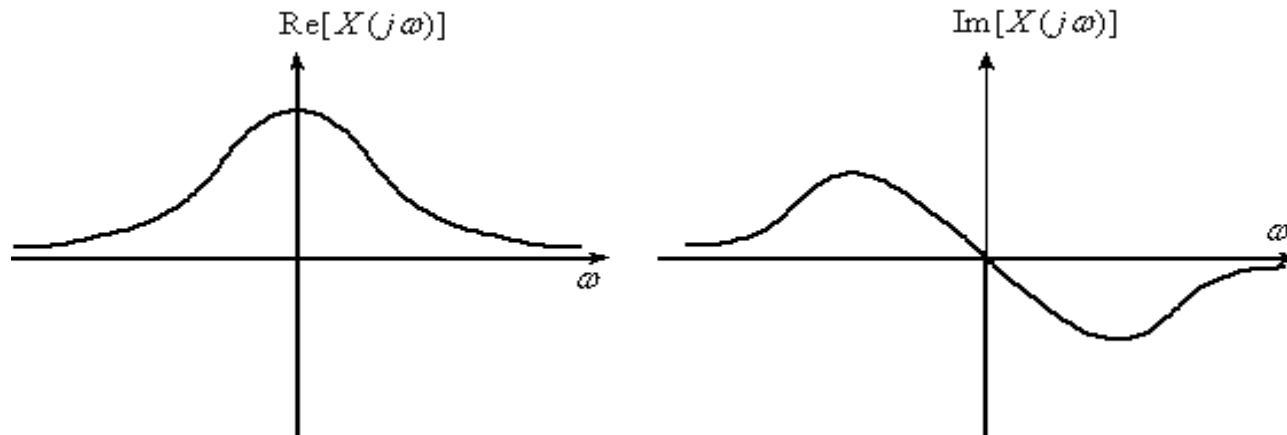
# Преобразование Фурье

Соотношение:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)[\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt$$

называют прямым преобразованием Фурье. Функция угловой частоты  $\omega$  —  $X(j\omega)$  — называется Фурье-изображением или частотным спектром функции  $X(t)$ .

Спектры в теории автоматического управления представляют графически, изображая отдельно их действительную и мнимую части:



### ***Частотный спектр единичной ступенчатой функции (функция Хевисайда).***

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Для этой функции не выполняется требование абсолютной интегрируемости, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |1(t)| dt \rightarrow \infty$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

интеграл не имеет конечного значения, поэтому  $1(t)$  Фурье-изображения не имеет.

### ***Частотный спектр дельта-функции (функция Дирака).***

$\delta(t) = 1'(t)$  тождественно равна нулю повсюду, кроме точки  $t=0$ , где она стремится к бесконечности (функция описывает плотность массы **1**, сосредоточенной в точке  $t=0$ , единичный импульс).

Дельта функция является обобщающей функцией. Для любой непрерывной функции  $\varphi(t)$  и бесконечно-малого положительного  $\varepsilon$  выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Производные от  $\delta$  - функции определяются следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), m = 1, 2, \dots$$

$\delta^{(m)}(t)$  -  $m$ -тая производная по времени от  $\delta$  - функции,  $\varphi(t)$  - обычная функция, имеющая  $m$ -тую производную.

## Преобразование Лапласа

Соотношение

$$X(s) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-st} dt$$

Комплексная переменная  $s = \beta_0 + j\omega$

называется оператором Лапласа, где  $\omega$  - угловая частота,  $\beta_0$  - некоторое положительное постоянное число.

Изображение по Лапласу для импульсной функции

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1,$$

Изображение по Лапласу для единичной функции

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Переменную  $s$  в преобразовании Лапласа можно рассматривать как оператор дифференцирования, т.е.  $s \equiv \frac{d}{dt}$ .

Аналогично можно ввести оператор интегрирования  $\frac{1}{s} = \int_0^t dt$

Фрагмент таблицы преобразования

$x(t)$	$\delta(t)$	$1(t)$	$C = const$	$t$	$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$
$X(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{C}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$



**Теорема линейности.** Любое линейное соотношение между функциями времени справедливо и для изображений по Лапласу этих функций;

$$X_0(s) = aX_1(s) + bX_2(s) \Rightarrow x_0(t) = ax_1(t) + bx_2(t).$$

### Теорема о дифференцировании оригинала

Если

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)];$$

$$X(s) = L\{x(t)\};$$

то

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

где  $x(0)$  - начальное значение оригинала.

Для производной  $n$ -го порядка справедливо следующее соотношение:

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0)$$

## Теорема об интегрировании оригинала

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{1}{s} X(s). \quad \int_0^t dt = \frac{1}{s}$$

**Теорема запаздывания.** Для любого  $\tau > 0$  справедливо соотношение

$$L\{X(t-\tau)\} = e^{-s\tau} L\{X(t)\} = e^{-s\tau} X(s)$$

**Теорема о свертке (умножении изображений)**

$$L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau\right\} = L\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s)$$

$$X_1(s) = L\{x_1(t)\}, \quad X_2(s) = L\{x_2(t)\}$$

**Теорема о предельных значениях.** Если  $X(s) = L\{x(t)\}$  то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (sX(s)) = \lim_{t \rightarrow 0} (x(t)) = x(0),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sX(s)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = x(\infty),$$

если  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t))$  существует.

## Теорема

### разложения

Если  $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  является дробнорациональной функцией ( $A(s)$ ,  $B(s)$  – полиномы от  $s$ ) и степень полинома числителя меньше полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}} \left( X(s) (s - s_k)^{n_k} e^{ts} \right),$$

где  $s_k$  – корни уравнения  $A(s)=0$ ,  $n_k$  – их кратности и  $q$  – число различных корней.

Если указанные корни простые, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}$$

Здесь  $n$  – степень полинома  $A(s)$ ;  $A'(s_k) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$

Формулы справедливы при  $t \geq 0$ . При  $t < 0$  по определению функции-оригинала  $x(t) \equiv 0$