ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Правило умножения

Если первый объект можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора второй объект можно выбрать m способами, то оба объекта можно выбрать $n \cdot m$ способами. Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

ПРИМЕР 1. Сколько существует наборов, состоящих из одной буквы и одной цифры, если буква выбирается из множества $\{A, B, C, D\}$, а цифра − из множества $\{1, 2, 3\}$?

Решение. Букву (первый объект) можно выбрать 4 способами, а после выбора буквы цифру (второй объект) можно выбрать 3 способами. По правилу умножения всего наборов $4 \cdot 3 = 12$ $(A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3, D1, D2, D3)$.■

Правило сложения

Если первый объект можно выбрать n способами, а второй объект − m способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (первый или второй) можно выбрать $n+m$ способами. Это правило можно распространить на любое конечное число объектов.

ПРИМЕР 4. Сколько существует наборов, состоящих из одной буквы или одной цифры, если буква выбирается из множества $\{A, B, C, D\}$, а цифра − из множества $\{1, 2, 3\}$?

Решение. По правилу сложения всего наборов: $4+3=7$ $(A, B, C, D, 1, 2, 3)$. ■

Размещения без повторений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов. ***Размещениями без повторений из n элементов по k элементов*** будем называть упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов данного множества. Размещения отличаются друг от друга или составом или порядком расположения элементов.

Число размещений без повторений из n элементов по k обозначается A_n^k (от французского слова «arrangement», что означает «размещение») и находится по формуле:

$$\boxed{A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

ПРИМЕР 5. Для множества $\{A, B, C, D\}$ найти число размещений без повторений по 2 элемента.

Решение. Всего размещений $A_4^2 = 4\cdot 3 = 12$. Запишем все размещения: *AB*, *AC*, *AD*, *BA*, *BC*, *BD*, *CA*, *CB*, *CD*, *DA*, *DB*, *DC*.■

Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов. ***Перестановками*** называются упорядоченные наборы, в которые входят все n элементов исходного множества. Перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n (от французского слова «permutation», что означает «перестановка») и находится по формуле:

$$\boxed{P_n = n!}$$

ПРИМЕР 7. Для множества $\{A, B, C\}$ указать все перестановки.

Решение. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Как видно, всего перестановок: $P_3 = 3! = 6$.■

Размещения с повторениями

Пусть дано n различных видов элементов. ***Размещениями с повторениями из n видов элементов по k элементов*** будем называть упорядоченные наборы, состоящие из k элементов, при этом могут выбираться элементы одного и того же вида. Размещения отличаются друг от друга или составом или порядком расположения элементов.

Число размещений с повторениями из n видов элементов по k элементов обозначается $\overline{A}_n^k$ и находится по формуле

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k}$$

ПРИМЕР 8. Даны два вида элементов A и B. Выписать все размещения по 3 элемента.

Решение. AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB. Всего размещений: $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$. ■

Сочетания

Пусть имеется множество из n различных элементов. ***Сочетаниями из n элементов по k*** называются подмножества, состоящие из k различных элементов данного множества. Любые два сочетания отличаются друг от друга только составом элементов (порядок здесь не важен).

Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k (от французского слова «combinaison», что означает «сочетание») и находится по формуле

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

ПРИМЕР 10. Для множества $\{1;2;3;4\}$ выписать все сочетания по 3 элемента и определить их число.

Решение. Всего сочетаний из 4 элементов по 3: $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ (123, 124, 134, 234).■

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Понятие вероятности восходит к древним временам; оно было известно уже античным философам. Мысль о том, что законы природы проявляются

случайных событий, впервые возникла у древнегреческих материалистов.

В развитии теории вероятностей весьма большую роль играли задачи, связанные с азартными играми, в первую очередь с игрой в кости. Уже в древности игра в кости была популярна и любима.

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями ***Паскаля*** *(1623-1662)*, ***Ферма*** *(1601-1665) и* ***Гюйгенса*** *(1629-1695)* в области теории азартных игр. В этих работах постепенно сформировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены их основные свойства и приемы их вычисления. Наряду с задачами азартных игр уже в самом начале возникновения теории вероятностей появились задачи, связанные с составлением таблиц смертности и вопросами страхования. В Лондоне уже с 1592 года велись точные записи о смертности.

Б. Паскаль

П.Ферма

Х. Гюйгенс

События и действия над ними

Ночью светит солнце	
	Равновозможные события
1 января – праздничный день	
	Невозможное событие
При броске кости выпало «7»	
	Достоверное событие
При броске монеты выпал «орел»	
	Случайное событие
При броске монеты выпала «решка»	

СЛУЧАЙНОЕ - событие, которое может произойти, а может и не произойти.

НЕВОЗМОЖНОЕ - событие, которое в данных условиях (опыте) не может произойти.

РАВНОВОЗМОЖНЫЕ - события, любое из которых не обладает никаким преимуществом появляться чаще при многократных испытаниях

ДОСТОВЕРНОЕ - событие, которое при данных условиях всегда произойдет

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$ (или $C = A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B (или A, или B, или оба события A и B).

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$ (или $C = A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B.

Разностью событий A и B называется событие $C = A - B$ (или $C = A \setminus B$), которое происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B не происходит.

Событие, которое происходит тогда, когда событие A не происходит, называется событием, ***противоположным*** событию A. Обозначение $\overline{A}$.

События A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого, то есть $AB = \varnothing$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно-несовместными***, если любые два из них несовместны, то есть $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу***, если в результате каждого эксперимента происходит хотя бы одно из них, то есть $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу попарно-несовместных событий***, если $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ и $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Событие A называется ***частным случаем*** B (событие A влечет за собой событие B), если при наступлении события A наступает и событие B. Обозначение $A \subset B$.

События A и B называются ***равными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Обозначение $A = B$.

ПРИМЕР 1. В урне 8 шаров, пронумерованных числами от 1 до 8. Наудачу вынимается один шар. Рассмотрим события: ***A*** – появление шара с номером 6, ***B*** – появление шара с четным номером, ***C*** – появление шара с нечетным номером, ***D*** – появление шара с номером, кратным трем, ***H*** − появление шара с номером от 1 до 8, ***K*** – появление шара с номером 10, ***F*** – появление шара с номером, являющимся положительной степенью двойки. Тогда для указанных событий имеем:

H − достоверное событие, то есть $H = \Omega$;

K – невозможное событие, то есть $K = \varnothing$;

$A \subset B$ (событие A является частным случаем события B);

$A \cdot C = \varnothing$ (A, C − несовместные события);

$B \cdot D = A$ (событие $B \cdot D$ − появление шара с четным номером, кратным трем, то есть появление шара с номером 6 (это событие A));

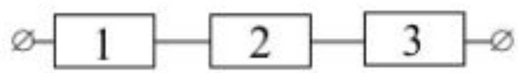
$D \setminus A \subset C$ (событие $D \setminus A$ − появление шара с номером 3 − частный случай события C);

$C = \overline{B}$ (события C и B − противоположные);

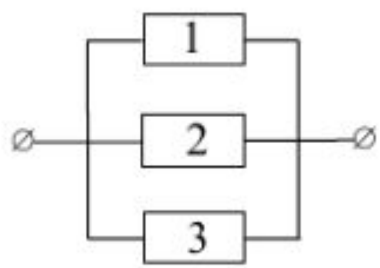
$C + D + F = \Omega$ (события C, D, F образуют полную группу событий, так как в результате эксперимента хотя бы одно из них произойдет; заметим, что среди событий C, D, F есть совместные);

$A + C + F = \Omega$ (A, C, F образуют полную группу попарно-несовместных событий, то есть в результате любого эксперимента произойдет ровно одно из этих событий).■

ПРИМЕР 2. Электрические цепи составлены по указанным схемам. События A_i – элемент с номером i вышел из строя $(i = 1, 2, 3)$. Событие B – разрыв цепи. В обоих случаях выразить события B и $\bar{B}$ через события A_i и $\bar{A}_i$.

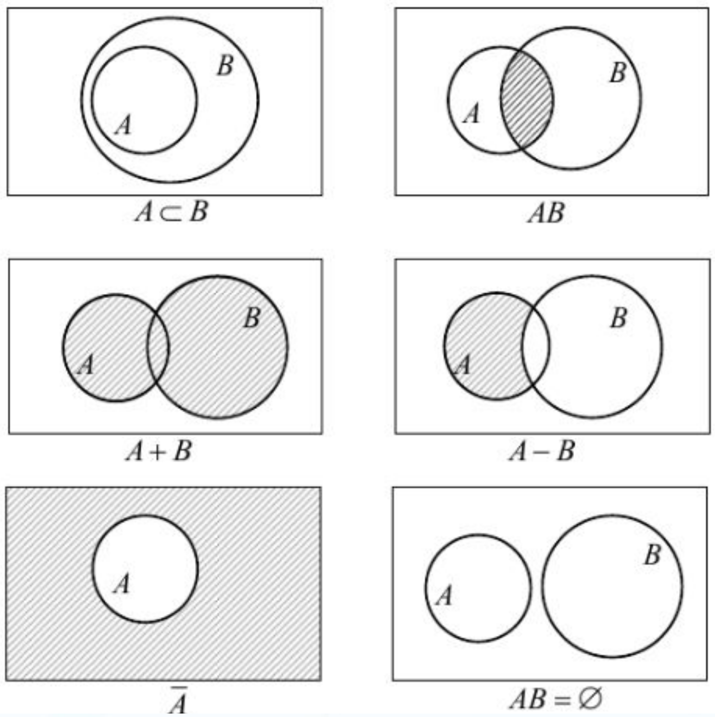


B = A1+A2+A3
B- = A1*A2*A3



B = A1*A2*A3
B- = A1- +A2- +A3-

Случайные события удобно изображать с помощью ***диаграмм Эйлера-Венна***. Прямоугольник соответствует достоверному событию Ω, а круги – случайным событиям A и B.



Классическое определение вероятности

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***равновозможными***, если при реализации комплекса условий S каждое них имеет равные шансы наступить.

Пусть Ω − конечное пространство попарно несовместных равновозможных элементарных исходов (событий) $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

Вероятностью (классическое определение) любого события A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему их числу n

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Свойства классической вероятности:

1. $P(A) \geq 0$ для любого события A.

2. $P(\Omega) = 1$, так как $m = n$.

3. $P(\varnothing) = 0$, так как $m = 0$.

4. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример.
Андрей, Роман, Максим и Сергей бросили жребий, кому быть вратарем. Найти вероятность того, что вратарем стал Роман.

Решение:
Пусть событие **А= {вратарем стал Роман}**
Число благоприятных исходов **k=1**
Общее число возможных исходов **n=4**
По формуле классической вероятности получаем:

Ответ: 0,25

Задание В чемпионате по гимнастике участвуют 64 спортсменки: 20 из Японии, 28 из Китая, остальные — из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Решение:

Из Кореи выступают **64-(20+28)=16** спортсменок

По формуле классической вероятности получим:

Ответ: 0,25

Задание В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.
Метод перебора комбинаций:
Нужно выписать все возможные комбинации орлов и решек, а затем выбрать нужные и применить формулу классической вероятности.

Решение:
1. Выписываем все возможные комбинации: **ОО, ОР, РО, РР.**
Значит, **n = 4**
2. Среди полученных комбинаций выбираем те, которые требуются по условию задачи: **РР.**
Значит, $m_a = 1$
3.По формуле классической вероятности получим:

Ответ: 0,25

Игральный кубик бросили один раз. Какова вероятность того, что выпадает не менее 4 очков?

Решение:

1. Бросаем игральный кубик один раз – **6исходов**. Значит, у данного действия (бросание одного игрального кубика 1 раз) всего имеется **n=6** возможных исходов.
2. Выписываем все благоприятные исходы: **4; 5; 6.** Значит, **k = 3** – число благоприятных исходов.
1. По формуле классической вероятности имеем:

Ответ: 0,5

ПРИМЕР 2. В урне 4 красных, 3 желтых и 2 зеленых шара. Наудачу извлекают 2 шара. Найти вероятности того, что:

а). оба шара красного цвета (событие A);

б). один из шаров красный, другой – зеленый (событие B);

в). оба шара одного цвета (событие C).

Решение. Сначала найдем число всех элементарных событий n. Всего шаров 9, а число способов выбрать 2 шара из 9 равно C_9^2, то есть $n = C_9^2 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$.

а). Число m_A элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно числу способов выбрать 2 красных шара из 4 красных, то есть $m_A = C_4^2 = 6$. Итак, $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

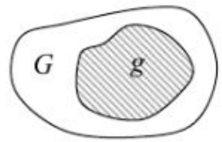
б). Чтобы найти m_B воспользуемся правилом умножения: выбрать 1 красный шар можно 4 способами, а 1 зеленый – 2 способами, тогда красный и зеленый шар можно выбрать $4 \cdot 2 = 8$ способами, то есть $m_B = 8$. Следовательно, $P(B) = \dfrac{m_B}{n} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

в). Найдем m_C. Событие C произойдет, если оба шара будут красного цвета, или оба желтого цвета, или оба зеленого. Выбрать 2 красных шара из 4 красных можно $C_4^2 = 6$ способами, 2 желтых из 3 желтых − $C_3^2 = 3$ способами, 2 зеленых из двух зеленых – одним способом. По правилу сложения общее число элементарных событий, благоприятствующих событию C, равно $m_C = 6 + 3 + 1 = 10$. Итак, $P(C) = \dfrac{m_C}{n} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.■

Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности основано на том, что число всех возможных равновероятных исходов конечно.

Геометрическая вероятность – это обобщение классического определения вероятности на случай бесконечного числа равновозможных исходов.



Пусть область g лежит в области G. В области G наудачу выбирается точка. Вероятность того, что точка попадет в область g, пропорциональна мере области g и не зависит от ее формы и ее расположения. То есть для события A (попадание точки в область g) имеем

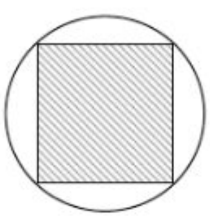
$$\boxed{P(A)=\frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}}$$

Здесь «мера» означает либо длину, если G − часть прямой или кривой линии, либо площадь, если G − часть плоскости, либо объем, если G − часть пространства.

Геометрическая вероятность имеет те же свойства,
сическая вероятность.

ПРИМЕР 4. В круг радиуса R вписан квадрат. Найти вероятность того, что наудачу выбранная в круге точка окажется внутри квадрата (событие A).

<u>*Решение.*</u> Искомая вероятность равна отношению площади квадрата к площади круга:



$$P(A)=\frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}.\blacksquare$$

Статистическое определение вероятности

Пусть некоторый эксперимент проведен в одних и тех же условиях n_1 раз, при этом некоторое событие A произошло m_1 раз. Отношение $\frac{m_1}{n_1}$ называется ***относительной частотой*** события A в данной серии испытаний.

Пусть во второй серии испытаний относительная частота события A – $\frac{m_2}{n_2}$, в третьей – $\frac{m_3}{n_3}$ и т. д.

Для многих явлений относительные частоты появления рассматриваемого события мало отличаются друг от друга, то есть обладают устойчивостью:

$$\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m_2}{n_2} \approx \frac{m_3}{n_3} \approx \dots,$$

где n_1, n_2, n_3,… − достаточно большие числа.

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пирсон	12000	6019	0,5046
Пирсон	24000	12012	0,5005

Статистическая вероятность события A при большом числе испытаний приближенно равна относительной частоте появления события A или величине, близкой к частоте, то есть

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

Статистическая вероятность имеет те же свойства, что и классическая вероятность.

Теорема сложения вероятностей

Для произвольных случайных событий A и B справедлива ***теорема сложения вероятностей***

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

►Доказательство. Так как $A+B=A+\bar{A}B$ и $B=\bar{A}B+AB$, а события в правых частях обоих равенств несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(\bar{A}B), \quad P(B)=P(\bar{A}B)+P(AB),$$

откуда

$$P(A+B)=P(A)+P(\bar{A}B)=P(A)+P(B)-P(AB).◄$$

Для трех случайных событий A, B, C справедлива формула

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Если события <u>несовместны</u>, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \quad P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

ПРИМЕР 1. В группе 25 студентов, 15 из них знают английский язык, 10 – французский, а 5 студентов знают и английский и французский. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент знает хотя бы один из указанных языков.

ПРИМЕР 1. В группе 25 студентов, 15 из них знают английский язык, 10 – французский, а 5 студентов знают и английский и французский. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент знает хотя бы один из указанных языков.

Решение. Пусть событие A − студент знает английский язык, событие B − студент знает французский язык, тогда

$$P(A)=\frac{15}{25}=0,6;\quad P(B)=\frac{10}{25}=0,4;\quad P(AB)=\frac{5}{25}=0,2,$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,6+0,4-0,2=0,8.\blacksquare$$

Условная вероятность

Вероятность наступления события A при условии, что событие B произошло, называется ***условной вероятностью*** и находится по формуле

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

ПРИМЕР 2. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на обеих костях выпадет равное число очков при условии, что суммарное число очков меньше 5.

ПРИМЕР 2. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что на обеих костях выпадет равное число очков при условии, что суммарное число очков меньше 5.

Решение. Пространство элементарных исходов состоит из 36 элементов: $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,6)\}$.

Рассмотрим события: A − на обеих костях выпало равное число очков, B – суммарное число очков меньше 5. Запишем элементарные исходы, благоприятствующие событиям A, B, AB, и найдем соответствующие вероятности:

$$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(3,1)\},$$

$$AB=\{(1,1),(2,2)\},$$

$$P(AB) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}.\blacksquare$$

Теорема умножения вероятностей

Из формулы для условной вероятности следует ***теорема умножения вероятностей***

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)}$$

Для n случайных событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Независимые события

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из них не влияет на вероятность появления второго, то есть

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B)$$

(условные вероятности совпадают с безусловными).

Таким образом, если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Верно и обратное утверждение: если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, то события A и B независимы.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***называются независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не зависит от осуществления или неосуществления любого числа остальных событий.

Для независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

ПРИМЕР 3. В урне 4 белых и 2 черных шара. Из урны 3 раза извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что все изъятые шары − белые. Рассмотреть два случая: а). шары извлекаются без возвращения; б). с возвращением.

Решение. а). Рассмотрим случай, когда шары не возвращаются в урну. Пусть события A_i − i-й шар белый ($i = 1, 2, 3$), событие A − все три шара белые. Тогда для события A имеем $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Заметим, что события A_1, A_2, A_3 зависимы, так как наступление события A_1 влияет на вероятность события A_2 (после наступления события A_1 в урне останется 5 шаров, из которых 3 белых), а наступление событий A_1 и A_2 влияет на вероятность события A_3 (после наступления событий A_1 и A_2 в урне останется 4 шара, из которых 2 белых). Таким образом,

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,2.$$

б). В случае, когда каждый раз извлеченный шар возвращается в урну, события A_1, A_2, A_3 независимы. Поэтому

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Стрелки делают по одному выстрелу. Найти вероятности событий: A – попадут ровно два стрелка, B − попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Рассмотрим события: A_i − i-й стрелок попал ($i = 1, 2, 3$), тогда

$$A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 .$$

Так как слагаемые являются несовместными событиями, а множители в слагаемых независимы, то

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,452.$$

Для события B имеем

$$B = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Здесь слагаемые являются совместными событиями, поэтому удобно перейти к противоположному событию $\overline{B}$ (никто не попал), для которого

$$\overline{B} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,024 .$$

Окончательно получаем

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,024 = 0,976 .\blacksquare$$

Формула полной вероятности

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий $\left(\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega,\ H_i H_j = \varnothing\ (i \neq j)\right)$. И пусть событие A может наступить только с одним из этих событий. Тогда справедлива ***формула полной вероятности***

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1\right)$$

► Так как $A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n$,

то из несовместности событий, стоящих в правой части, и теоремы умножения вероятностей получаем

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + ... + P(H_n A) =$$

$$= P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) + ... + P(H_n) P(A/H_n). ◄$$

События $H_1, H_2, ..., H_n$ называются ***гипотезами***, а вероятности $P(H_1), ..., P(H_n)$ называются ***априорными***.

ПРИМЕР 1. В первой урне 4 белых и 3 черных шара, во второй – 2 белых и 3 черных. Из каждой урны случайным образом удалили по одному шару, а оставшиеся шары переложили в третью пустую урну. Из третьей урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение. Пусть событие A − шар, извлеченный из третьей урны, белый. Вероятность этого события зависит от того, какие шары были удалены из урн.

Рассмотрим следующие гипотезы:

H_1 − из обеих урн удалили по белому шару,

H_2 − из обеих урн удалили по черному шару,

H_3 − удалили 1 белый и 1 черный шар.

Найдем $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$:

$$P(H_1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{35}, \qquad P(A/H_1)=\frac{4}{10};$$

$$P(H_2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{35}, \qquad P(A/H_2)=\frac{6}{10};$$

$$P(H_3)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{18}{35}, \quad P(A/H_3)=\frac{5}{10}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{8}{35}\cdot\frac{4}{10}+\frac{9}{35}\cdot\frac{6}{10}+\frac{18}{35}\cdot\frac{5}{10}=\frac{88}{175}.\blacksquare$$

Формула Байеса

Если событие A произошло, то априорные вероятности $P(H_i)$ $(i=1,2,...n)$ следует «переоценить». Найти вероятности $P(H_i/A)$ $(i=1,2,...,n)$, которые называются ***апостериорными***, можно по ***формуле Байеса***

$$\boxed{P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}P(H_i/A)=1\right)$$

Например, пусть $H_1,H_2,...,H_n$ − возможные виды заболеваний в некотором регионе в определенное время года. Вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$ дают представление о частоте этих заболеваний. И если к врачу приходит пациент с симптомами A, то имеет смысл рассматривать вероятности $P(H_1/A), P(H_2/A),...$ $P(H_n/A)$, которые дают представление о частоте заболеваний при данных симптомах.

ПРИМЕР 2. Известно, что 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема проверки признает пригодной продукцию с вероятностью 0,96, если она стандартная, и с вероятностью 0,06, если она нестандартная. Найти вероятность того, что изделие, прошедшее проверку, является стандартным.

Решение. Пусть событие A − изделие прошло проверку. Рассмотрим гипотезы: H_1 − изделие стандартное, H_2 − изделие нестандартное, тогда

$$P(H_1)=0{,}95, \quad P(A/H_1)=0{,}96,$$
$$P(H_2)=0{,}05, \quad P(A/H_2)=0{,}06.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)P(A/H_i)=0{,}95\cdot 0{,}96+0{,}05\cdot 0{,}06=0{,}915.$$

По условию задачи требуется найти $P(H_1/A)$. По формуле Байеса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}95\cdot 0{,}96}{0{,}915}=\frac{0{,}912}{0{,}915}\approx 0{,}997.\blacksquare$$

Практическое задание

Задача 1. Семь карточек с буквами А, А, А, Б, Б, Р, Н, перемешивают и выкладывают случайным образом. Найти вероятность того, что получится слово «БАРАБАН» (событие С). (Классическое определение вероятности)

Задача 2. 9 карточек с буквами Р, Е, Г, Р, Е, С, С, И, Я перемешивают. Случайным образом извлекают 4 карточки (по одной) и выкладывают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «ГИРЯ» (событие В). (Умножение вероятностей)

Задача 3. В группе 20 студентов, 10 из них играют на гитаре, 4 – на пианино, 3 студентов – на барабане, 3 – на скрипке. 6 человек из группы могут играть на всех инструментах одновременно. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент играет хотя бы на одном из указанных инструментов (Сложение вероятностей)

Практическое задание

Задача 4. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,65, для второго – 0,75, для третьего - 0,9. Стрелки делают по одному выстрелу. Найти вероятность событий А- попадет хотя бы один стрелок, В-попадут ровно два стрелка. (Умножение вероятностей)

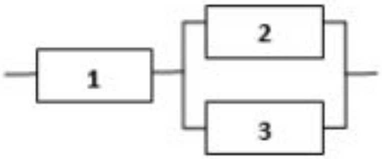
Задача 5. В мешке 7 красных, 4 черных и 5 белых шаров. Из мешка вынимают 4 раза по одному шару. Найти вероятность того, что все шары белые при условии, что шары извлекаются без возращения (Умножение вероятностей зависимых событий)

Задача 6. Два радиста пытаются принять сигнал передатчика. Первый из них сможет это сделать с вероятностью 60 %, а второй – с вероятностью 80 %, независимо друг от друга. Найти вероятность, что хотя бы одному из них удастся принять сигнал.

Практическое задание

Задача 7

4.10. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



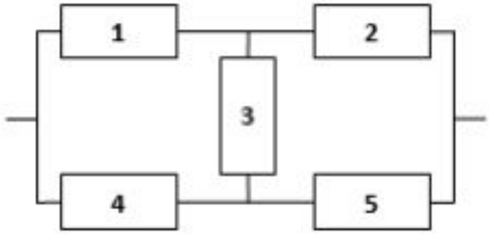
Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Изначальные вероятности отказа элементов 1, 2, 3 соответственно равны $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}6$.

Посланный сигнал не прошел со входа на выход. Найти вероятность того, что: а) элемент 1 отказал; б) только элемент 1 отказал; в) элемент 2 отказал; г) только элемент 2 отказал.

Практическое задание

Задача 8

4.9. Элементы соединены в цепь с одним входом и одним выходом по следующей схеме:



Отказы элементов являются независимыми событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Изначальные вероятности отказа элементов 1, 2, 3 соответственно равны $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}4$; $q_3 = 0{,}6$.

Посланный сигнал не прошел со входа на выход. Найти вероятность того, что: а) элемент 1 отказал; б) только элемент 1 отказал; в) элемент 2 отказал; г) только элемент 2 отказал.