Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими уравнениями**

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a h(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5{,}5 \end{array}\right. \\ -1{,}5<x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\text{Ответ}: -1.$$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x)$$

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$$

$$\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

где $x > 0, \quad x \neq 10$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 0,1x \neq 1, \\ 0,2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,1x} = \frac{\lg x}{\lg 0,1 + \lg x} = \frac{\lg x}{-1 + \lg x}$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,2x} = \frac{\lg x}{\lg 0,2 + \lg x} = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{5} + \lg x} = \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x}$$

$$\frac{\lg x}{-1 + \lg x} + \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x} = 0$$

Пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1,\ t \neq \lg 5$ тогда

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t - \lg 5} = 0$$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t-lg\,5}=0 \quad \Big|\times(t-1)(t-lg\,5)$$

$$t(t-lg\,5)+t(t-1)=0$$

$$t(t-lg\,5+t-1)=0$$

$$t(2t-lg\,5-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{lg\,5+1}{2}=\dfrac{lg\,5+lg\,10}{2}=\dfrac{lg\,50}{2}=lg\sqrt{50} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$lg\,x=0$ *или* $lg\,x=lg\sqrt{50}$

$x=1$ $x=5\sqrt{2}$

Оба корня удовлетвор яют ОДЗ

Ответ : $1;\ 5\sqrt{2}.$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$ОДЗ: \ x > 0$$

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$$

$$(1 - \log_5 x)\log_5 x = \log_5 0{,}04$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 0{,}2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x\left(3x^{\lg x}+4\right)=2\lg x$$

ОДЗ : $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$

По определени ю логарифма

$$x^{2\lg x} = 3x^{\lg x} + 4$$

Пусть $x^{\lg x} = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 - \text{не удовлетвор яет} \\ t = 4 \end{array}\right.$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x} = 4$$

Прологариф мируем обе части по основанию 10 :

$$\lg\left(x^{\lg x}\right) = \lg 4$$

$$\lg x \lg x = \lg 4$$

$$\lg^2 x = \lg 4$$

$$\lg x = \pm\sqrt{\lg 4}$$

$$x = 10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений: $\begin{cases} lg(2x-y)+1 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ 2\log_3(x-y) = \log_3(y+2) \end{cases}$

$$\begin{cases} lg(2x-y)+lg\,10 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ \log_3(x-y)^2 = \log_3(y+2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} lg((2x-y)10) = lg((y+2x)6), \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-y)10 = (y+2x)6, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x-10y = 6y+12x, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ (2y-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-y>0, \\ y+2x>0 \\ x-y>0, \\ y+2>0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y^2-y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y, \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = -1, \\ y_2 = 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1 = -1, \\ x_1 = -2; \end{cases} \text{ – не удовлетворяет ОДЗ} \\ \begin{cases} y_2 = 2, \\ x_2 = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;\ 2)$.