Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими уравнениями

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. *Функционально-графический метод.*
2. *Метод потенцирования.*
3. *Метод введения новой переменной.*

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3,5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1,5 \\ x<0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5,5 \end{array}\right. \\ -1,5<x<0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}(5-x)$$

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$$

$$\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1,$$

где $x > 0, \quad x \neq 10$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$$

пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, тогда

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t - 1}$$

$$(t - 1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемся к исходной переменной

$$\lg x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_{0,1x} x + \log_{0,2x} x = 0$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 0,1x \neq 1, \\ 0,2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\log_{0,1x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,1x} = \frac{\lg x}{\lg 0,1 + \lg x} = \frac{\lg x}{-1 + \lg x}$$

$$\log_{0,2x} x = \frac{\lg x}{\lg 0,2x} = \frac{\lg x}{\lg 0,2 + \lg x} = \frac{\lg x}{\lg \frac{1}{5} + \lg x} = \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x}$$

$$\frac{\lg x}{-1 + \lg x} + \frac{\lg x}{-\lg 5 + \lg x} = 0$$

Пусть $\lg x = t$, где $t \neq 1$, $t \neq \lg 5$ тогда

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t - \lg 5} = 0$$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t-\lg 5}=0 \quad \Big|\times(t-1)(t-\lg 5)$$

$$t(t-\lg 5)+t(t-1)=0$$

$$t(t-\lg 5+t-1)=0$$

$$t(2t-\lg 5-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{\lg 5+1}{2}=\dfrac{\lg 5+\lg 10}{2}=\dfrac{\lg 50}{2}=\lg\sqrt{50} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$\lg x=0$ *или* $\lg x=\lg\sqrt{50}$

$x=1$ $\qquad$ $x=5\sqrt{2}$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

Ответ : $1;\ 5\sqrt{2}.$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x = \log_5 0,04$$

$$ОДЗ: \quad x > 0$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

пусть $\log_5 x = t$, *тогда*

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 0,2. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x\left(3x^{\lg x}+4\right)=2\lg x$$

ОДЗ : $\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$

По определени ю логарифма

$$x^{2\lg x}=3x^{\lg x}+4$$

Пусть $x^{\lg x}=t$, где $t>0$ тогда

$$t^2-3t-4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 - \text{не удовлетвор яет} \\ t=4 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x}=4$$

Прологариф мируем обе части по основанию 10 :

$$\lg\left(x^{\lg x}\right)=\lg 4$$

$$\lg x \lg x=\lg 4$$

$$\lg^2 x=\lg 4$$

$$\lg x=\pm\sqrt{\lg 4}$$

$$x=10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$$

Ответ : $10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений : $\begin{cases} \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6, \\ 2\log_3(x-y)=\log_3(y+2) \end{cases}$

$$\begin{cases} \lg(2x-y)+\lg 10=\lg(y+2x)+\lg 6, \\ \log_3(x-y)^2=\log_3(y+2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg((2x-y)10)=\lg((y+2x)6), \\ (x-y)^2=y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-y)10=(y+2x)6, \\ (x-y)^2=y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x-10y=6y+12x, \\ (x-y)^2=y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ (2y-y)^2=y+2; \end{cases}$$

ОДЗ : $\begin{cases} 2x-y>0, \\ y+2x>0 \\ x-y>0, \\ y+2>0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x=2y, \\ y^2-y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ \left[\begin{array}{l} y_1=-1, \\ y_2=2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1=-1, \\ x_1=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} y_2=2, \\ x_2=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

– не удовлетворяет ОДЗ

Ответ : $(4;\ 2)$.