ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Теория вероятностей и математическая статистика
лектор Макеева О.В.

Лекция 5

Непрерывные случайные величины

1. Функция распределения случайной величины
2. Непрерывные случайные величины
3. Плотность вероятности случайной величины
4. Равномерное распределение
5. Показательное распределение
6. Нормальное распределение

Пролог

В качестве исчерпывающего описания *дискретной случайной величины* обычно рассматривается закон её распределения: ряд распределения или формула, позволяющая находить вероятности любых значений случайной величины. Этот способ не является единственным и, главное, не является универсальным. Он не применим к случайным величинам множество значений которых бесконечно и не является счётным.

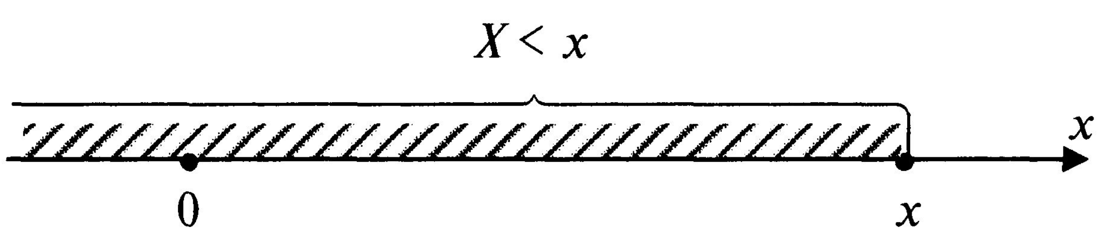
Возможен другой подход к описанию случайных величин: рассматривать не вероятности событий $X=x$ для возможных значений x, а вероятности событий $X<x$. Очевидно, что в этом случае вероятность $P(X<x)$ изменяется в зависимости от значения x, т.е. является функцией от x.

§1. Функция распределения СВ

Определение 1. **Функцией распределения** случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для каждого значения x определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение меньше чем x, т.е.

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right). \qquad (1)$$

Геометрически это означает, что случайная точка X попадёт левее заданной точки x.



Функцию распределения называют также *интегральной функцией распределения*.

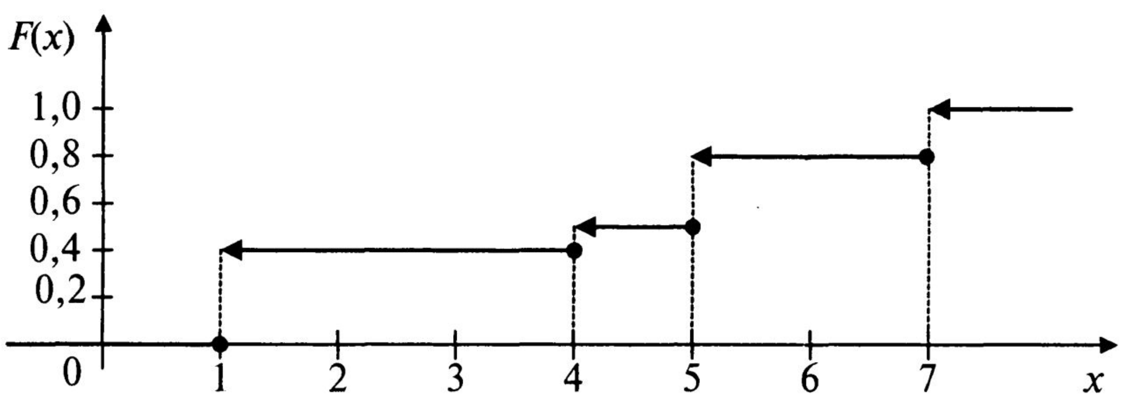
Пример 1

Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0.2

Функция распределения величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0;\ x\le 1; \\ 0,4;\ 1<x\le 4; \\ 0,5;\ 4<x\le 5; \\ 0,8;\ 5<x\le 7; \\ 1;\ x>7. \end{cases}$$



§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

1. Функция распределения принимает неотрицательные значения, заключённые между нулём и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Утверждение вытекает из определения функции распределения как вероятности (1).

§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

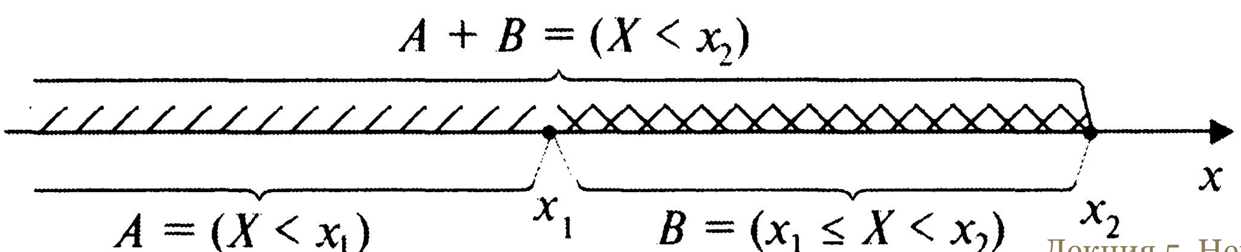
2. Функция распределения есть неубывающая функция на всей числовой прямой:

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } \forall x_1,\ x_2 \in R \text{ и } x_2 \geq x_1$$

Утверждение вытекает из теоремы о вероятности суммы несовместных событий:

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(A + B) = P(A) + P(B) =$$

$$P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2) \geq P(X < x_1) = F(x_1).$$



§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

3. Функция распределения на границах области определения принимает свои наименьшее и наибольшее значения:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Утверждение вытекает определения вероятности:

$$F(-\infty)=P(X<-\infty)=0$$

вероятность н - евозможного события;

$$F(+\infty)=P(X<+\infty)=1$$

вероятность д - остоверного события.

§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению её функции распределения на этом интервале:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Утверждение было получено при доказательстве свойства 2:

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$$

$$= F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \Rightarrow$$

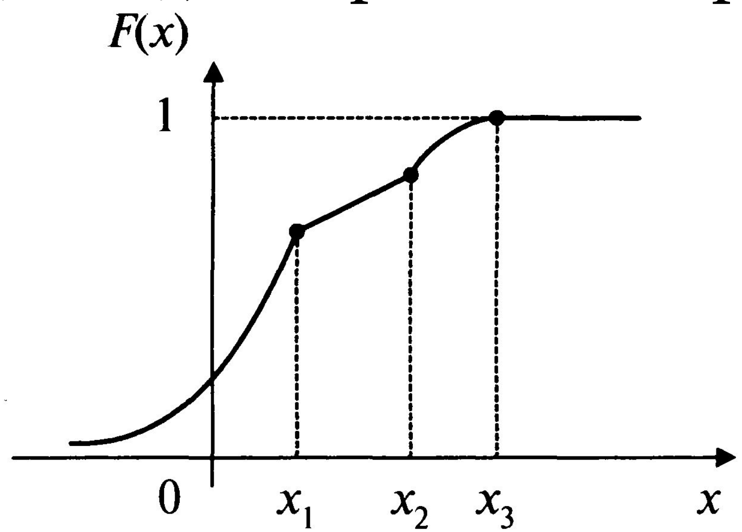
$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

§2. Непрерывные СВ

Определение 2.

Случайная величина называется **непрерывной**, если её функция распределения непрерывна всюду и дифференцируема почти всюду, за исключением, быть может, конечного множества точек излома.

На рисунке представлен график функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины (**НСВ**), который имеет три точки излома: x_1, x_2, x_3.



§2. Непрерывные СВ

Теорема 1. Вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Утверждение следует из свойств функции распределения случайной величины и свойства предела функции, непрерывной в точке:

$$P(X = x_0) = \lim_{x \to x_0} P(x_0 \le X < x) = \lim_{x \to x_0} \left[F(x) - F(x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Следствие. Вероятность попадание непрерывной случайной величины в интервал не зависит от принадлежности интервалу его концов:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) =$$

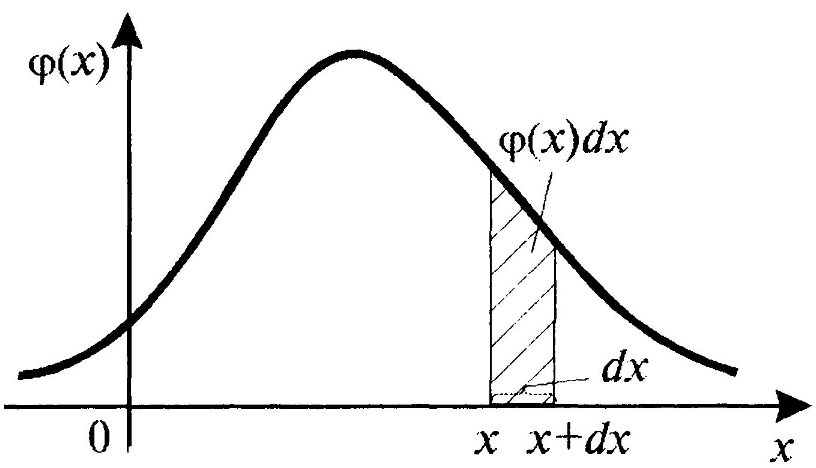
$$P(x_1 \le X \le x_2).$$

§3. Плотность вероятности СВ

Определение 3. **Плотностью вероятности** $\phi(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения, т.е.

$$\varphi(x) = F'(x). \qquad (2)$$

Плотность вероятности называют также *дифференциальной функцией распределения*. График этой функции называется *кривой распределения*.



Элементом вероятности называется вероятность попадания случайной величины X на участок dx бесконечно малой длины: $\phi(x) \cdot dx$.

Пример 2

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0; \\ \dfrac{x}{2} \text{ при } 0< x\le 2; \\ 1 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

Её плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le 0; \\ \dfrac{1}{2} \text{ при } 0< x\le 2; \\ 0 \text{ при } x>2. \end{cases}$$

§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности неотрицательная функция:

$$\varphi(x) \geq 0.$$

Утверждение следует из определения плотности вероятности как производной неубывающей функции (функции распределения).

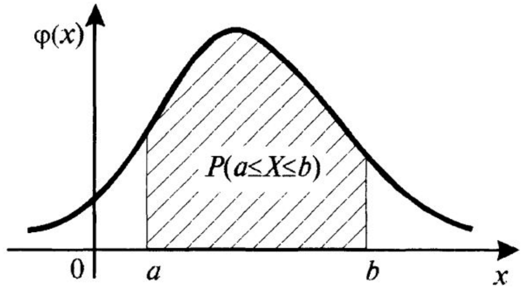
§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

2. Вероятность попадания случайной величины в интервал [a, b] равна определённому интегралу от её плотности вероятности на этом интервале:

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b \varphi\left(x\right)dx.$$

Утверждение следует из свойства 4 функции распределения; того факта, что функция распределения $F(x)$ есть первообразная для плотности вероятности $\phi(x)$ и формулы Ньютона-Лейбница:



$$P\left(a \le X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) = \int_a^b \varphi\left(x\right)dx.$$

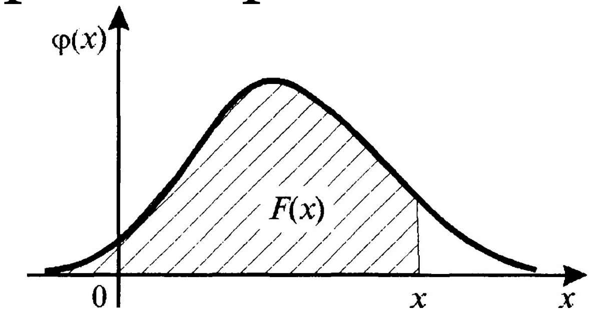
§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

3. Функция распределения случайной величины может быть выражена через её плотность вероятности:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt.$$

Утверждение следует из предыдущего свойства плотности вероятности $\phi(x)$ и свойства функции распределения $F(x)$ при $x = a \to -\infty$ и переменном верхнем пределе $b=x$.



§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

4. Несобственный интеграл по всей числовой прямой от плотности вероятности равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Утверждение следует из предыдущего свойства плотности вероятности и свойства функции распределения: $F(+\infty)=1$.

С геометрической точки зрения свойство означает, что площадь фигуры под всей кривой распределения равна единице.

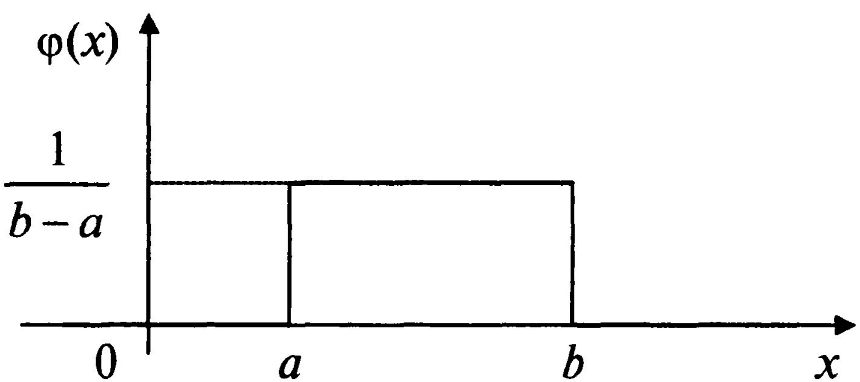
§4. Равномерное распределение

Определение 5.

НСВ имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a,\ b]$, если её плотность вероятности $\phi(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{при } x < a,\ x > b. \end{cases} \qquad (3)$$

График плотности вероятности имеет вид:



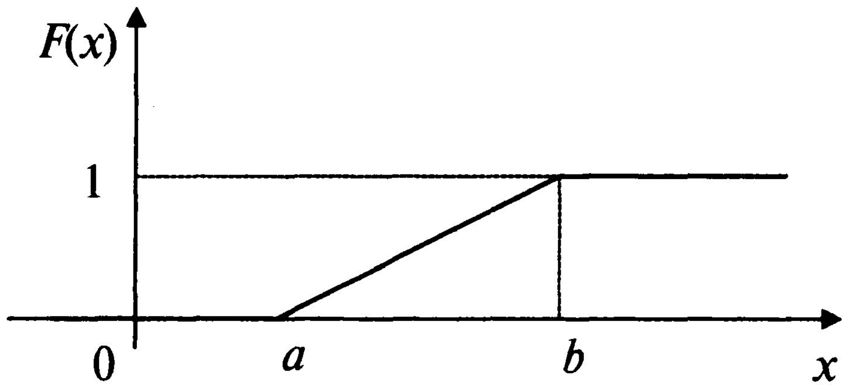
§4. Равномерное распределение

Теорема 2.

Функция распределения НСВ, имеющей **равномерное** распределение на отрезке [a, b], имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\le b, \\ 1 & \text{при } x>b. \end{cases} \qquad (4)$$

График функции распределения имеет вид:



§4. Равномерное распределение

Доказательство.

При $x \le a$ функция распределения $F(x)$=0.

При $a < x \le b$ функция распределения равна:

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \left. \frac{t}{b-a} \right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

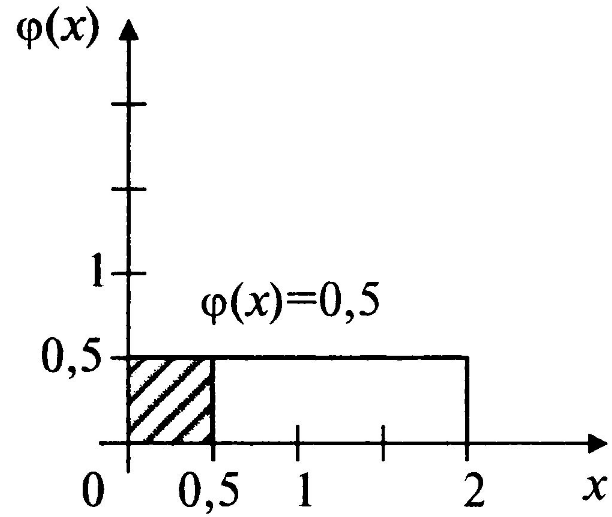
При $x > b$ функция распределения равна:

$$F(x) = \int_a^b \frac{dt}{b-a} = \left. \frac{t}{b-a} \right|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Пример 3

Эксперимент: выбрать наугад время прихода пассажира на остановку в диапазоне [0; 2].
(Диапазон определяется графиком регулярного (равномерного) движения транспорта).
Событие A: время ожидания пассажиром автобуса составит не больше полминуты.
Величина X: время ожидания пассажиром автобуса.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ \text{при}\ 0\le x\le 2,\\ 0\ \text{при}\ x<0,\quad x>2.\end{cases}$$



$$P(0\le X\le 0,5)=\int_0^{0,5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$$

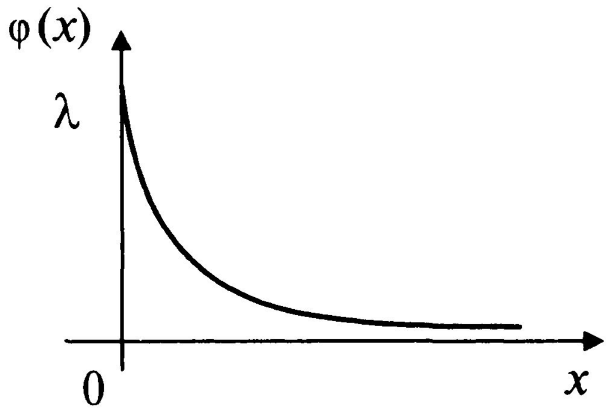
§5. Показательное распределение

Определение 5.

НСВ имеет **показательное** распределение с параметром λ>0, если её плотность вероятности $\phi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases} \qquad (5)$$

График плотности вероятности имеет вид:



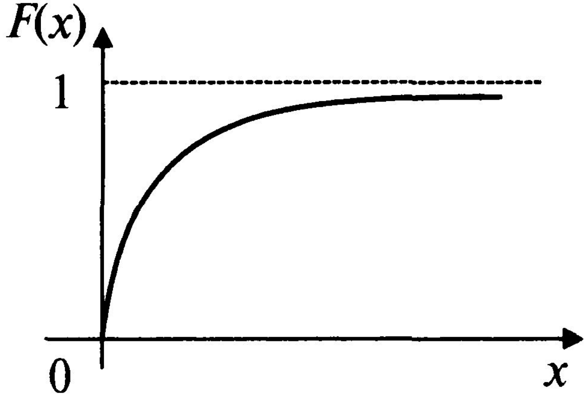
§5. Показательное распределение

Теорема 3.

Функция распределения НСВ, имеющей **показательное** распределение с параметром λ>0, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0.\end{cases} \qquad (6)$$

График функции распределения имеет вид:



§5. Показательное распределение

Доказательство.

При $x < 0$ функция распределения $F(x)=0$.
При $x \geq b$ функция распределения равна:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -\left(e^{-\lambda x} - e^0\right) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Замечание.

Показательный закон распределения играет важную роль в теории массового обслуживания. Так, например, интервал времени между соседними событиями в *простейшем потоке событий* имеет показательное распределение с параметром λ – интенсивностью потока.

§6. Нормальное распределение

Определение 6.

НСВ имеет **нормальное** распределение с параметрами a и σ^2, если её плотность вероятности $\phi_N(x)$ имеет вид:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (7)$$

Замечание.

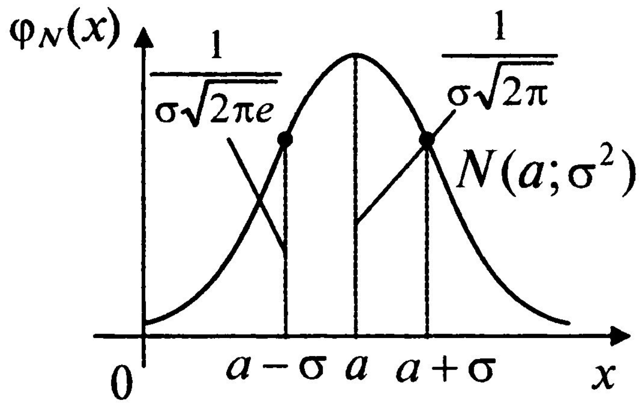
Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

§6. Нормальное распределение

График плотности вероятности нормально распределённой случайной величины с параметрами a и σ², т.е. $X \sim N(a,\sigma^2)$, называют *гауссовой* или *нормальной кривой*.

Нормальная кривая имеет:

- ось симметрии: прямую $x = a$,
- точку максимума: точку $x = a$,
- максимум: $f_{\max}(a) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$,
- две точки перегиба: $x = a \pm \sigma$.



§6. Нормальное распределение

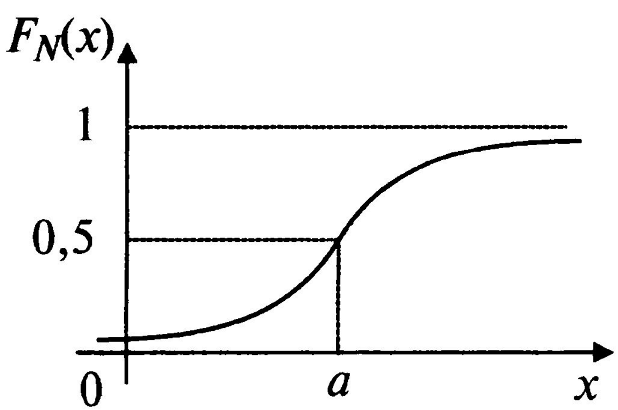
Теорема 4.

Функция распределения НСВ, имеющей **нормальное** распределение с параметрами a и σ^2 имеет вид:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (8)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - *функция Лапласа.*

График функции распределения имеет вид:

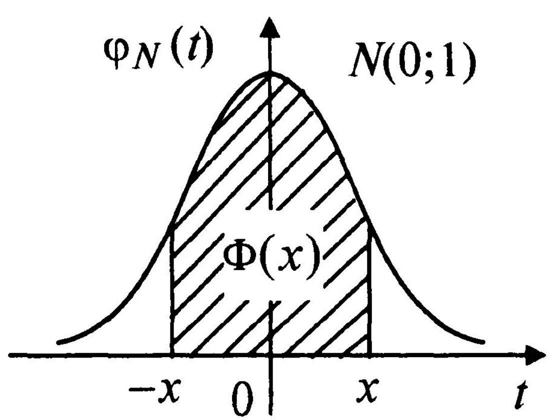


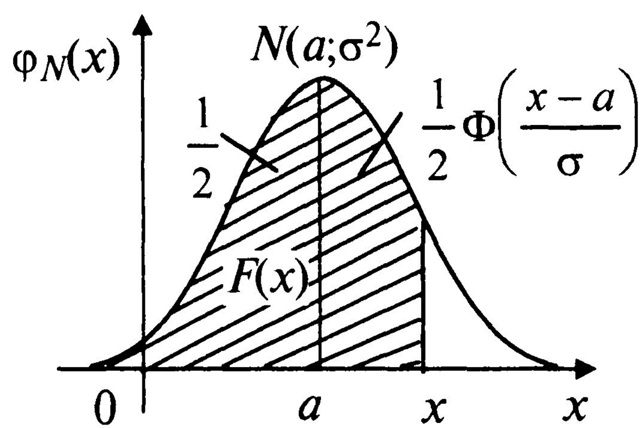
§6. Нормальное распределение

Доказательство (идея).

Нормальный закон распределения с параметрами $a=0$ и $\sigma^2=1$, т.е. $X \sim N(0,1)$, называется *стандартным*, а соответствующая нормальная кривая – *стандартной* или *нормированной*.

Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под стандартной нормальной кривой на отрезке [-x, x].





§6. Нормальное распределение

Свойства нормального распределения.

1. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2]$ равна:

$$P\left(x_1 \le X \le x_2\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(t_2\right) - \Phi\left(t_1\right)\right],$$

где $t_1 = \dfrac{x_1 - a}{\sigma}, t_2 = \dfrac{x_2 - a}{\sigma}.$

Утверждение следует из свойства функции распределения:

$$P\left(x_1 \le X \le x_2\right) = \frac{1}{2}\left[F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right)\right] =$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(t_2\right) - \Phi\left(t_1\right)\right].$$

§6. Нормальное распределение

Свойства нормального распределения.

2. Вероятность отклонения значений случайной величины от значения параметра a (по абсолютной величине) не более чем на δ равна:

$$P\left(\left|X-a\right|\le\delta\right)=\quad(\quad),$$

где $t=\delta/\sigma$.

Утверждение следует из предыдущего свойства и нечётности функции Лапласа:

$$P\left(a-\delta\le X\le a+\delta\right)=\frac{1}{2}\left[\quad\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right)-\quad\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=\Phi(t).$$

Свойства нормального распределения.

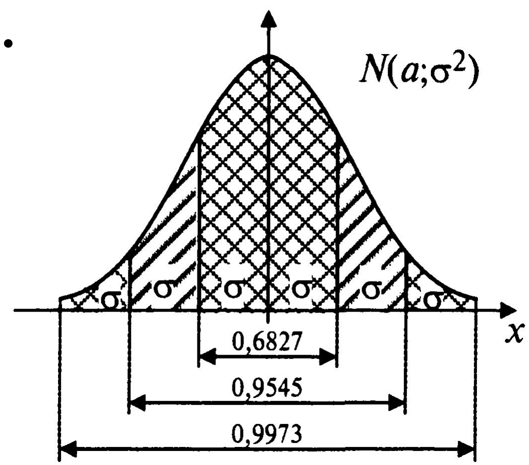
3. «**Правило трёх сигм**». Практически достоверно, что значение случайной величины заключено в интервале [a - 3σ; a + 3σ].

Утверждение следует из предыдущего свойства и таблицы значений функции Лапласа.

$$P\left(a-3\sigma \le X \le a+3\sigma\right)=$$

$$P\left(\left|X-a\right|\le 3\sigma\right)= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=$$

$$\Phi\left(3\right)=0,9973.$$



Продолжение следует…