Лекция 5

Непрерывные случайные величины

1. Функция распределения случайной величины
2. Непрерывные случайные величины
3. Плотность вероятности случайной величины
4. Равномерное распределение
5. Показательное распределение
6. Нормальное распределение

ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Теория вероятностей и математическая статистика
лектор Макеева О.В.

Пролог

В качестве исчерпывающего описания *дискретной случайной величины* обычно рассматривается закон её распределения: ряд распределения или формула, позволяющая находить вероятности любых значений случайной величины. Этот способ не является единственным и, главное, не является универсальным. Он не применим к случайным величинам множество значений которых бесконечно и не является счётным.

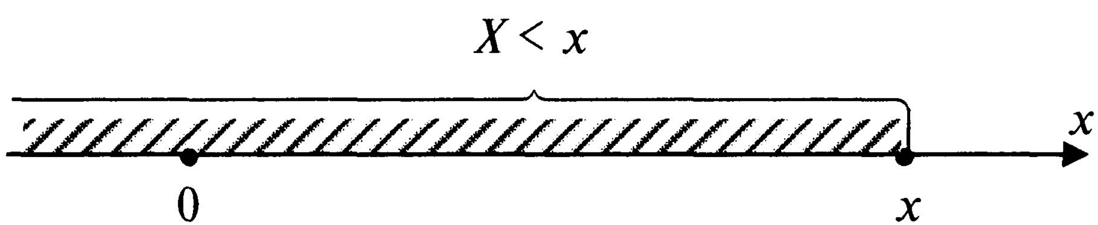
Возможен другой подход к описанию случайных величин: рассматривать не вероятности событий $X=x$ для возможных значений x, а вероятности событий $X<x$. Очевидно, что в этом случае вероятность $P(X<x)$ изменяется в зависимости от значения x, т.е. является функцией от x.

§1. Функция распределения СВ

Определение 1. **Функцией распределения** случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для каждого значения x определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение меньше чем x, т.е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

Геометрически это означает, что случайная точка X попадёт левее заданной точки x.



Функцию распределения называют также *интегральной функцией распределения*.

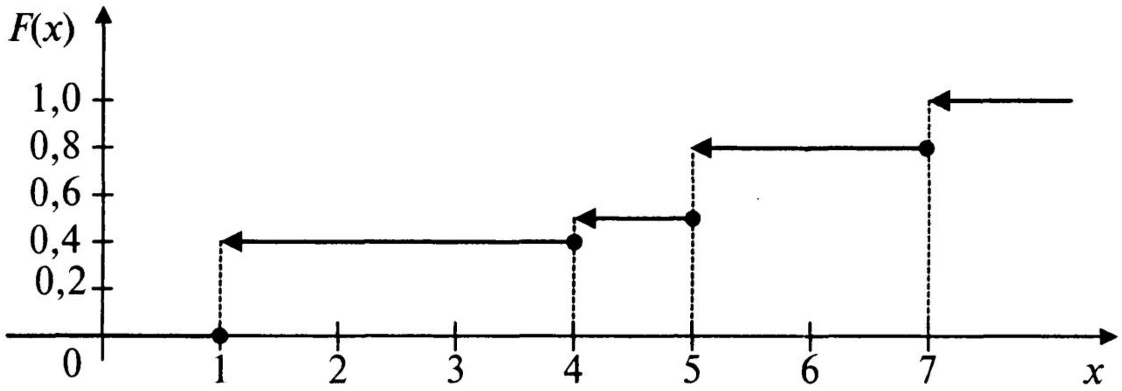
Пример 1

Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0.2

Функция распределения величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0;\ x\le 1; \\ 0,4;\ 1<x\le 4; \\ 0,5;\ 4<x\le 5; \\ 0,8;\ 5<x\le 7; \\ 1;\ x>7. \end{cases}$$



§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

1. Функция распределения принимает неотрицательные значения, заключённые между нулём и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Утверждение вытекает из определения функции распределения как вероятности (1).

§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

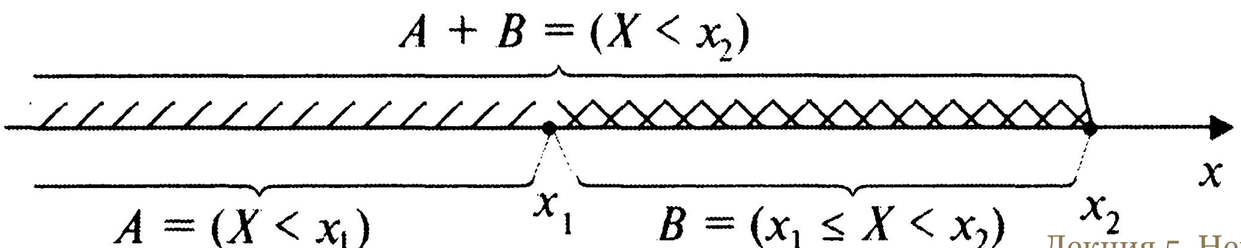
2. Функция распределения есть неубывающая функция на всей числовой прямой:

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } \forall x_1,\ x_2 \in R \text{ и } x_2 \geq x_1$$

Утверждение вытекает из теоремы о вероятности суммы несовместных событий:

$$F(x_2) = P(X < x_2) = P(A+B) = P(A) + P(B) =$$

$$P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2) \geq P(X < x_1) = F(x_1).$$



§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

3. Функция распределения на границах области определения принимает свои наименьшее и наибольшее значения:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Утверждение вытекает определения вероятности:

$$F(-\infty)=P(X<-\infty)=0$$

вероятность н - евозможного события;

$$F(+\infty)=P(X<+\infty)=1$$

вероятность д - остоверного события.

§1. Функция распределения СВ

Свойства функции распределения.

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1,x_2)$ равна приращению её функции распределения на этом интервале:

$$P\left(x_1 \le X < x_2\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right).$$

Утверждение было получено при доказательстве свойства 2:

$$F\left(x_2\right) = P\left(X < x_2\right) = P\left(X < x_1\right) + P\left(x_1 \le X < x_2\right)$$

$$= F\left(x_1\right) + P\left(x_1 \le X < x_2\right) \Rightarrow$$

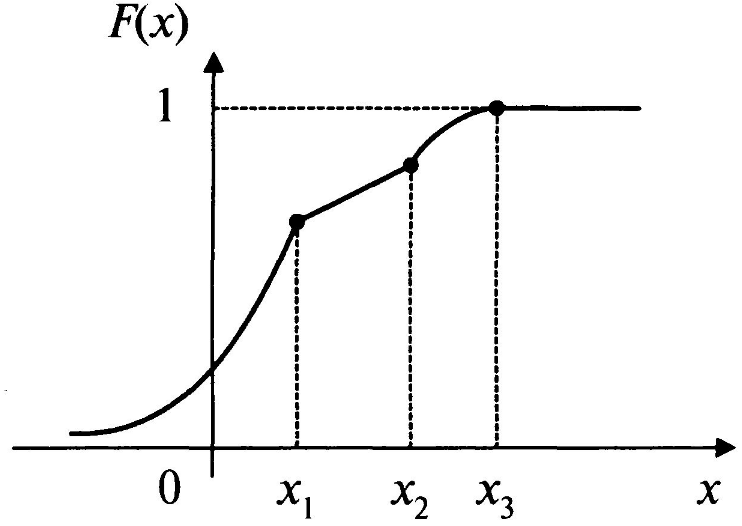
$$P\left(x_1 \le X < x_2\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right).$$

§2. Непрерывные СВ

Определение 2.

Случайная величина называется **непрерывной**, если её функция распределения непрерывна всюду и дифференцируема почти всюду, за исключением, быть может, конечного множества точек излома.

На рисунке представлен график функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины (**НСВ**), который имеет три точки излома: x_1, x_2, x_3.



§2. Непрерывные СВ

Теорема 1. Вероятность отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Утверждение следует из свойств функции распределения случайной величины и свойства предела функции, непрерывной в точке:

$$P(X = x_0) = \lim_{x \to x_0} P(x_0 \le X < x) = \lim_{x \to x_0} \left[F(x) - F(x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \to x_0} F(x) - F(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Следствие. Вероятность попадание непрерывной случайной величины в интервал не зависит от принадлежности интервалу его концов:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) =$$

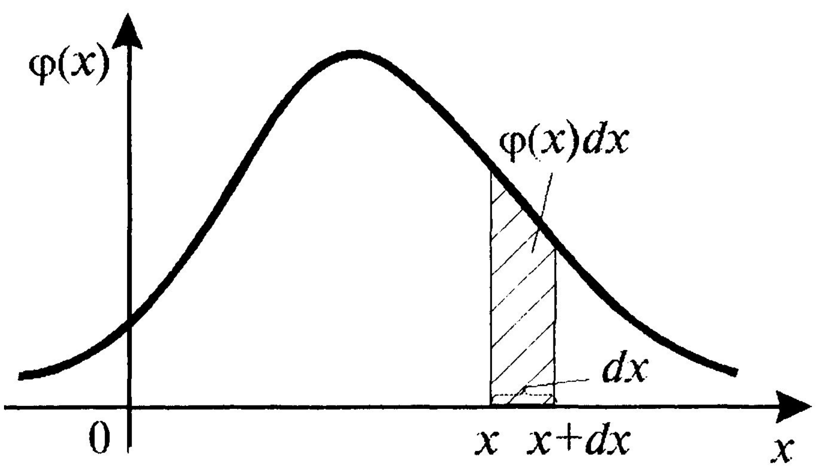
$$P(x_1 \le X \le x_2).$$

§3. Плотность вероятности СВ

Определение 3. **Плотностью вероятности** $\phi(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная её функции распределения, т.е.

$$\varphi(x) = F'(x). \qquad (2)$$

Плотность вероятности называют также *дифференциальной функцией распределения*. График этой функции называется *кривой распределения*.



Элементом вероятности называется вероятность попадания случайной величины X на участок dx бесконечно малой длины: $\phi(x) \cdot dx$.

Пример 2

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0<x\le 2;\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Её плотность вероятности имеет вид:

$$\varphi(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0;\\ \dfrac{1}{2} & \text{при } 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности неотрицательная функция:

$$\varphi(x) \geq 0.$$

Утверждение следует из определения плотности вероятности как производной неубывающей функции (функции распределения).

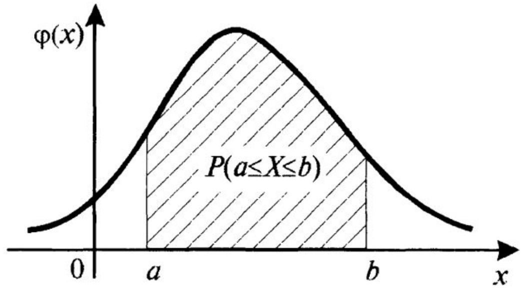
§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

2. Вероятность попадания случайной величины в интервал [a, b] равна определённому интегралу от её плотности вероятности на этом интервале:

$$P\left(a \le X \le b\right) = \int_a^b \varphi\left(x\right)dx.$$

Утверждение следует из свойства 4 функции распределения; того факта, что функция распределения $F(x)$ есть первообразная для плотности вероятности $\phi(x)$ и формулы Ньютона-Лейбница:



$$P\left(a \le X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) = \int_a^b \varphi\left(x\right)dx.$$

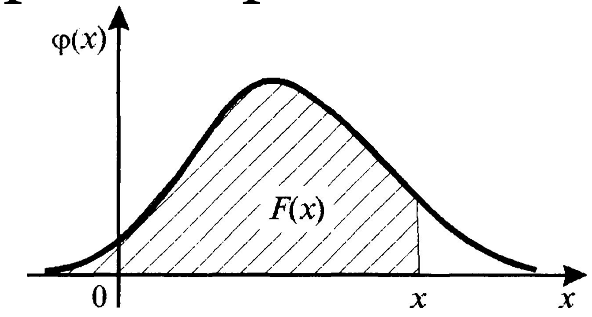
§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

3. Функция распределения случайной величины может быть выражена через её плотность вероятности:

$$F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi\left(t\right)dt.$$

Утверждение следует из предыдущего свойства плотности вероятности $\phi(x)$ и свойства функции распределения $F(x)$ при $x = a \rightarrow -\infty$ и переменном верхнем пределе $b=x$.



§3. Плотность вероятности СВ

Свойства плотности вероятности.

4. Несобственный интеграл по всей числовой прямой от плотности вероятности равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Утверждение следует из предыдущего свойства плотности вероятности и свойства функции распределения: $F(+\infty)=1$.

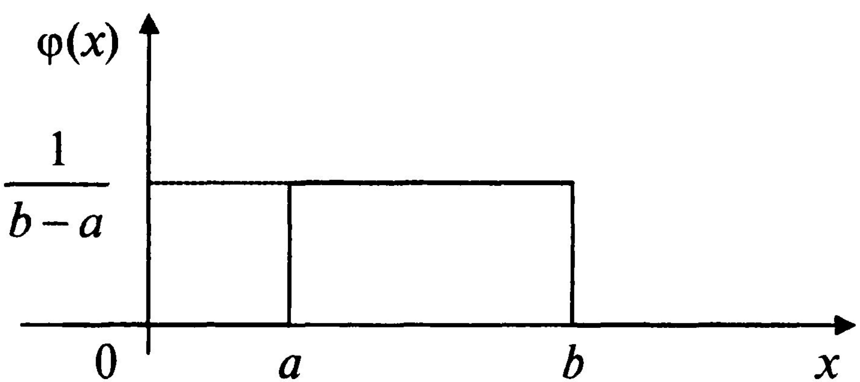
С геометрической точки зрения свойство означает, что площадь фигуры под всей кривой распределения равна единице.

§4. Равномерное распределение

Определение 5.
НСВ имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a,\ b]$, если её плотность вероятности $\phi(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b;\\ 0 & \text{при } x<a,\ x>b.\end{cases} \qquad (3)$$

График плотности вероятности имеет вид:



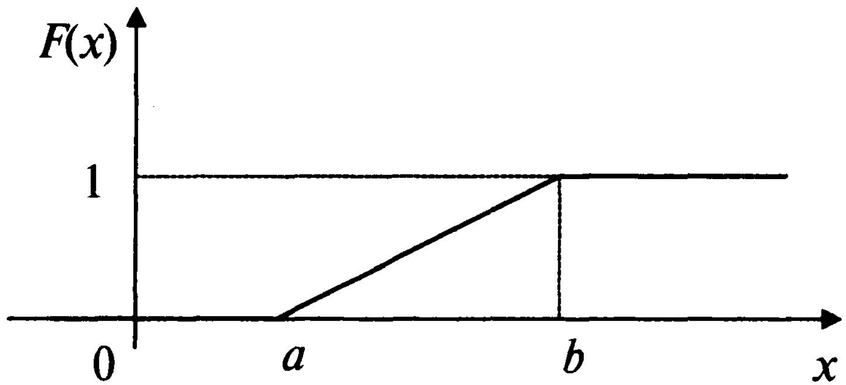
§4. Равномерное распределение

Теорема 2.

Функция распределения НСВ, имеющей **равномерное** распределение на отрезке [a, b], имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}\qquad (4)$$

График функции распределения имеет вид:



§4. Равномерное распределение

Доказательство.

При $x \le a$ функция распределения $F(x)$=0.

При $a < x \le b$ функция распределения равна:

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

При $x > b$ функция распределения равна:

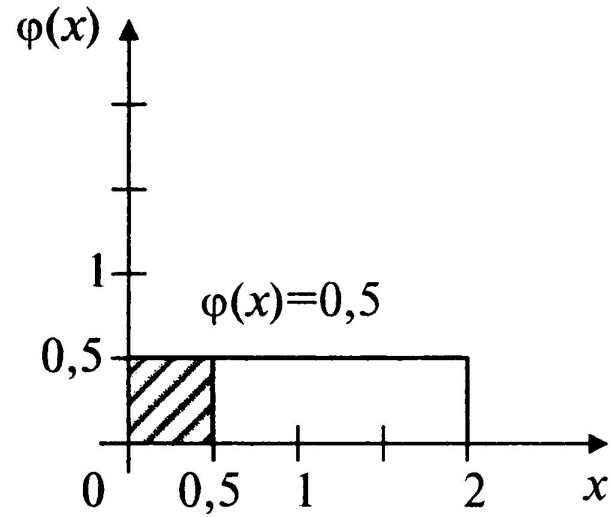
$$F(x) = \int_a^b \frac{dt}{b-a} = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Пример 3

Эксперимент: выбрать наугад время прихода пассажира на остановку в диапазоне [0; 2].
(Диапазон определяется графиком регулярного (равномерного) движения транспорта).
Событие A: время ожидания пассажиром автобуса составит не больше полминуты.
Величина X: время ожидания пассажиром автобуса.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 0 \text{ при } x < 0, \quad x > 2. \end{cases}$$

$$P(0 \le X \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4}$$



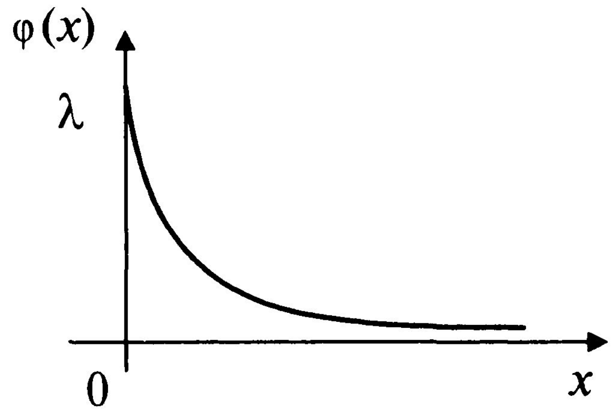
§5. Показательное распределение

Определение 5.

НСВ имеет **показательное** распределение с параметром λ>0, если её плотность вероятности $\phi(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases} \qquad (5)$$

График плотности вероятности имеет вид:



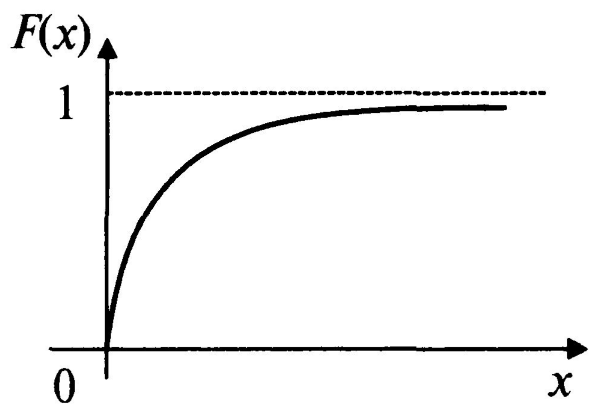
§5. Показательное распределение

Теорема 3.

Функция распределения НСВ, имеющей **показательное** распределение с параметром $\lambda>0$, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0.\end{cases} \qquad (6)$$

График функции распределения имеет вид:



§5. Показательное распределение

Доказательство.

При $x < 0$ функция распределения $F(x)=0$.
При $x \geq b$ функция распределения равна:

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-\left(e^{-\lambda x}-e^0\right)=1-e^{-\lambda x}.$$

Замечание.

Показательный закон распределения играет важную роль в теории массового обслуживания. Так, например, интервал времени между соседними событиями в *простейшем потоке событий* имеет показательное распределение с параметром λ – интенсивностью потока.

§6. Нормальное распределение

Определение 6.

НСВ имеет **нормальное** распределение с параметрами a и σ^2, если её плотность вероятности $\phi_N(x)$ имеет вид:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (7)$$

Замечание.

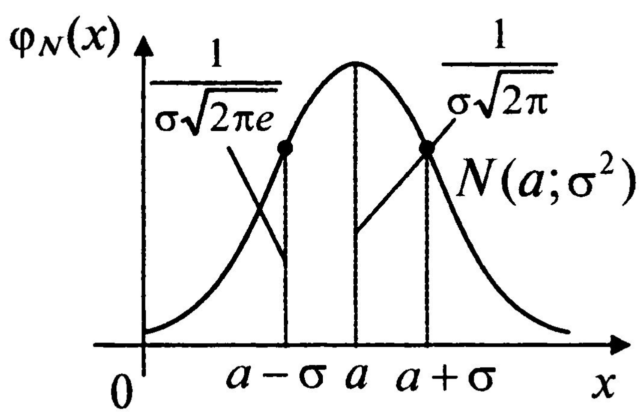
Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

§6. Нормальное распределение

График плотности вероятности нормально распределённой случайной величины с параметрами a и σ^2, т.е. $X \sim N(a,\sigma^2)$, называют *гауссовой* или *нормальной кривой*.

Нормальная кривая имеет:

- ось симметрии: прямую $x = a$,
- точку максимума: точку $x = a$,
- максимум: $f_{\max}(a) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$,
- две точки перегиба: $x = a \pm \sigma$.



§6. Нормальное распределение

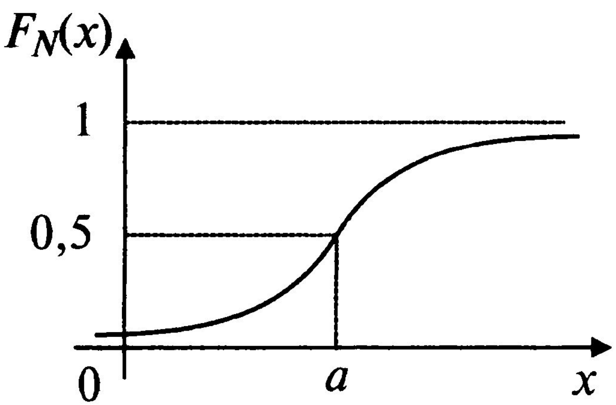
Теорема 4.

Функция распределения НСВ, имеющей **нормальное** распределение с параметрами a и σ² имеет вид:

$$F_N\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\quad\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (8)$$

где $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-x}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - *функция Лапласа.*

График функции распределения имеет вид:

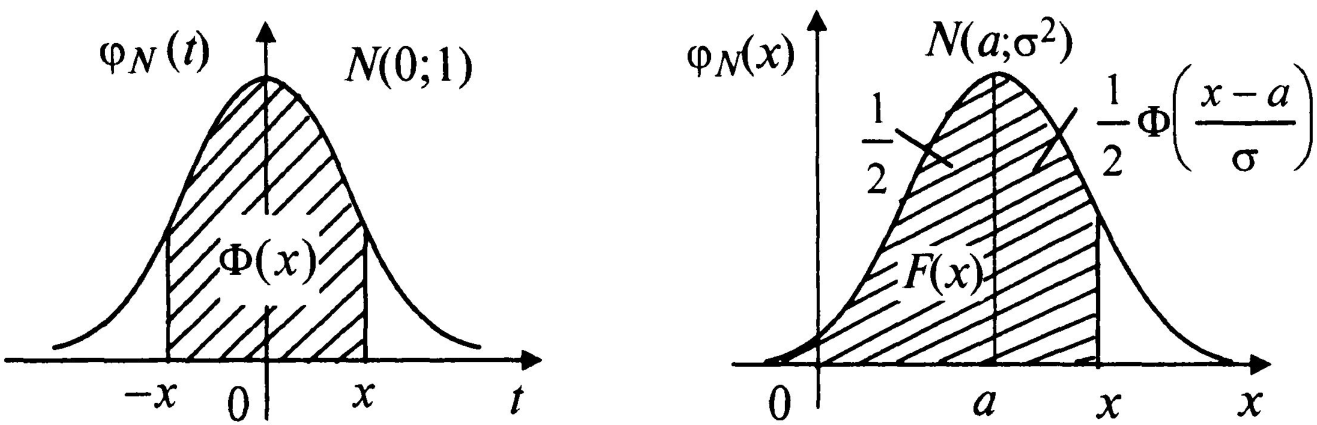


§6. Нормальное распределение

Доказательство (идея).

Нормальный закон распределения с параметрами $a=0$ и $\sigma^2=1$, т.е. $X \sim N(0,1)$, называется *стандартным*, а соответствующая нормальная кривая – *стандартной* или *нормированной*.

Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под стандартной нормальной кривой на отрезке $[-x, x]$.



§6. Нормальное распределение

Свойства нормального распределения.

1. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2]$ равна:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right],$$

где $t_1 = \dfrac{x_1 - a}{\sigma}, t_2 = \dfrac{x_2 - a}{\sigma}$.

Утверждение следует из свойства функции распределения:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{2}\left[F(x_2) - F(x_1)\right] =$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right].$$

§6. Нормальное распределение

Свойства нормального распределения.

2. Вероятность отклонения значений случайной величины от значения параметра a (по абсолютной величине) не более чем на δ равна:

$$P\left(\left|X-a\right|\le\delta\right)=\Phi\left(t\right),$$

где $t=\delta/\sigma$.

Утверждение следует из предыдущего свойства и нечётности функции Лапласа:

$$P\left(a-\delta\le X\le a+\delta\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\left(a+\delta\right)-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\left(a-\delta\right)-a}{\sigma}\right)\right]=$$

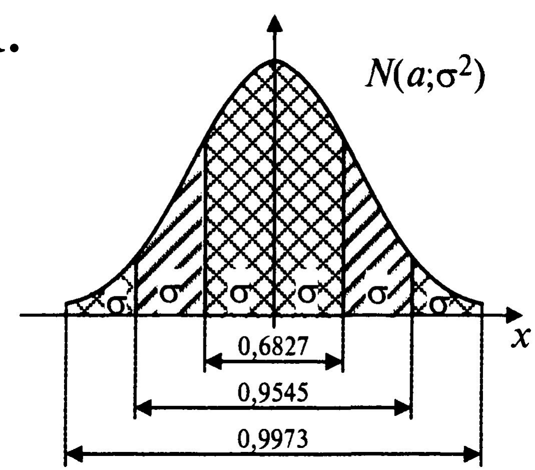
$$\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=\Phi\left(t\right).$$

§6. Нормальное распределение

Свойства нормального распределения.

3. «**Правило трёх сигм**». Практически достоверно, что значение случайной величины заключено в интервале [a - 3σ; a + 3σ].

Утверждение следует из предыдущего свойства и таблицы значений функции Лапласа.



$$P\left(a-3\sigma \le X \le a+3\sigma\right) =$$

$$P\left(\left|X-a\right| \le 3\sigma\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(3\right) = 0,9973.$$

Продолжение следует…