European Humanities University

EPAM SCHOOL
of Digital Engineering

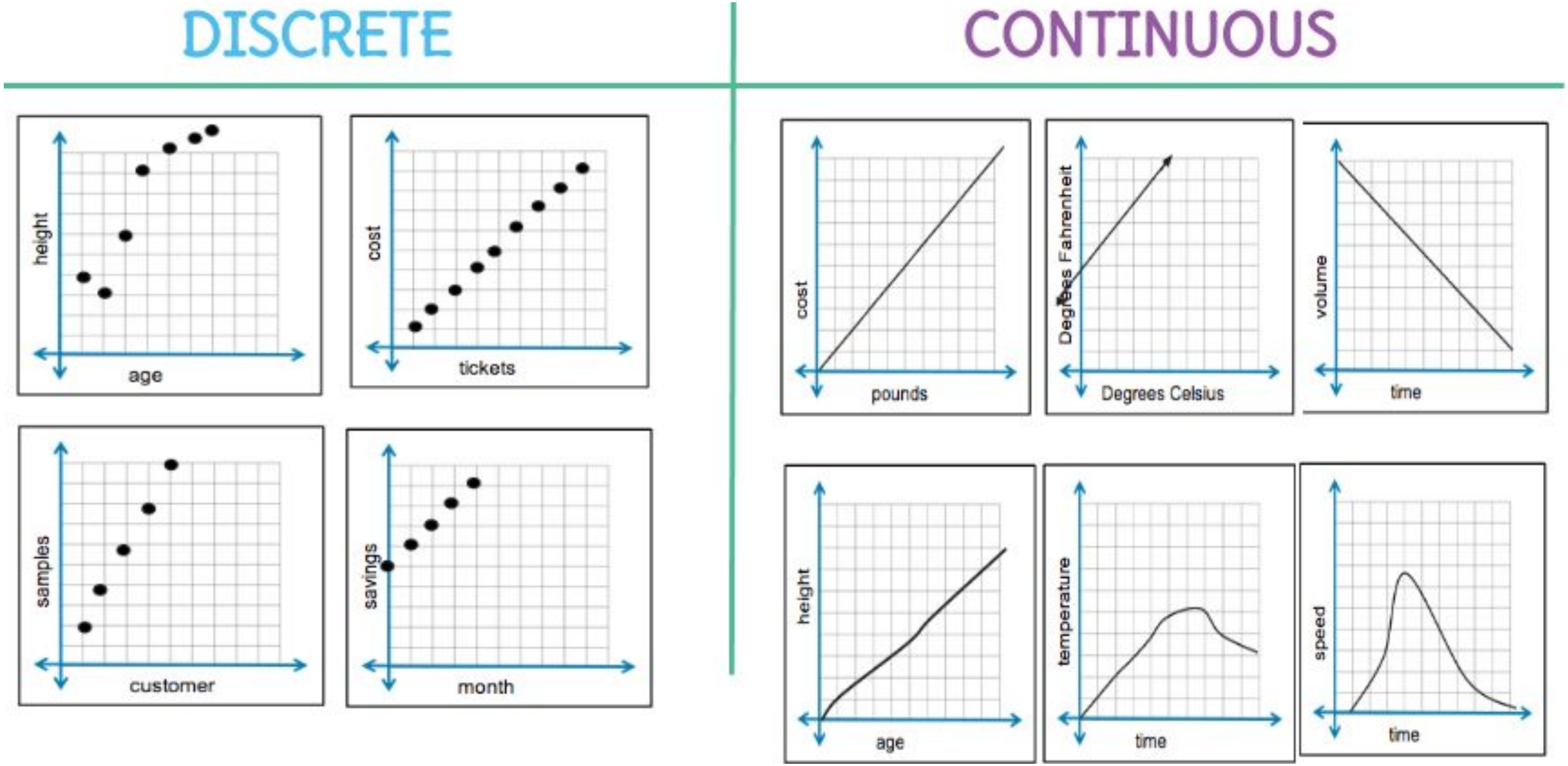
Discrete Mathematics: Introduction
Basics of Linear Algebra: Matrices

Kiril
Kuzmin
October 5, 2022

О нашем курсе

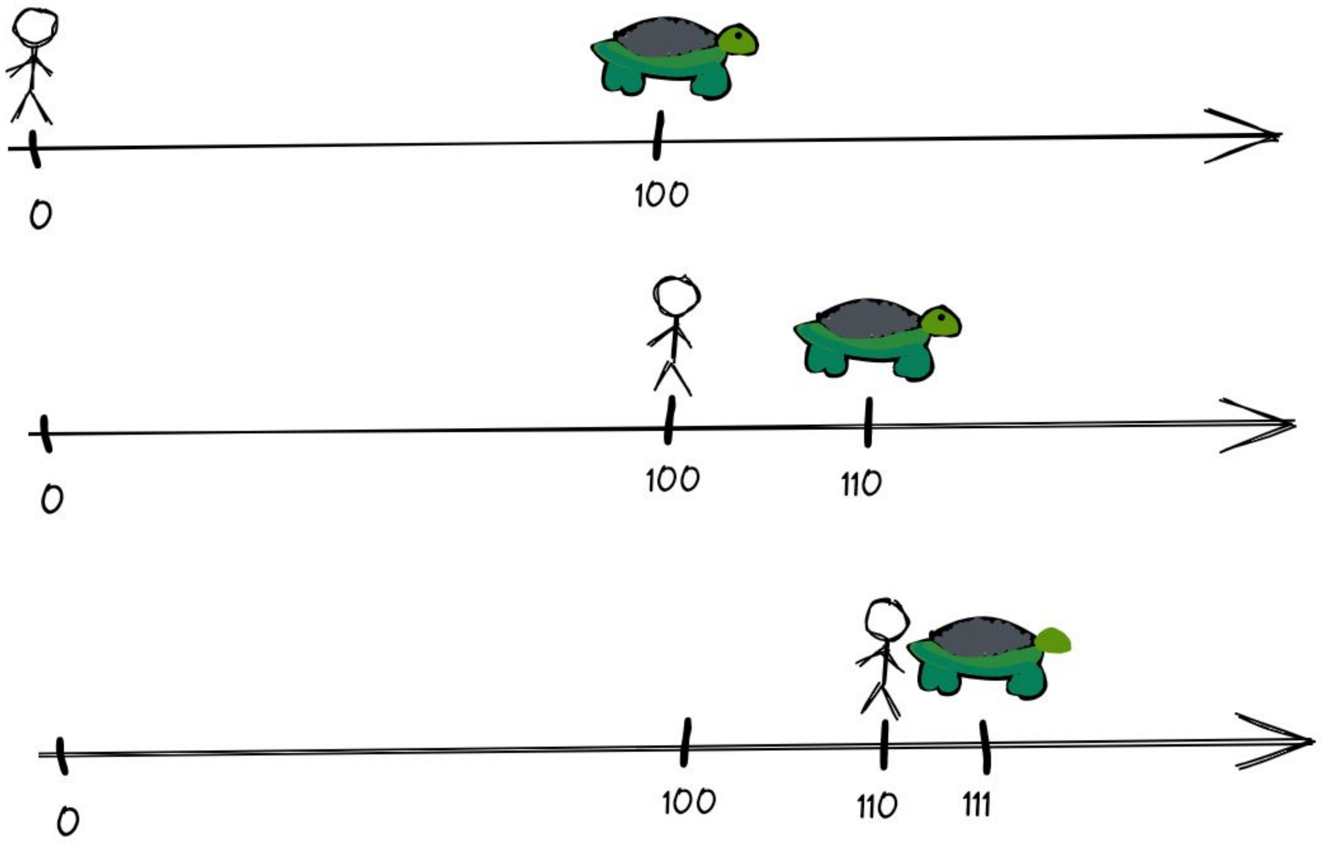
- Курс включает
  - Основы линейной алгебры
  - Основы теории графов
  - Математическую индукцию
  - Комбинаторику
- Оценка
  - 40% домашние задания
  - 30% промежуточный экзамен
  - 30% финальный экзамен
- Как связаться с преподавателем (Кирилл Геннадьевич Кузьмин)
  - kuzminkg@gmail.com

Что изучает дискретная математика?



Непрерывность – это иллюзия?

- ❑ Апории/трудности/парадоксы Зенона ([Zeno's paradoxes])
  - ✔ Ахиллес и черепаха
  - ✔ Стрела
  - ✔ Дихотомия



Линейная алгебра: что это и зачем

- Алгебра – это восполнение/обобщение арифметики
- Алгебра изучает операции над элементами множеств произвольной природы (не только числами)
- Алгебра обобщает обычные операции *сложения и умножения* чисел
- Алгебра
  - Элементарная (то, что изучалось в школе)
  - Линейная (будем изучать сейчас)
  - Общая
  - Универсальная

Линейная алгебра: рекомендуемые книги

- *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике
  - Полный курс

  или

  - Часть 1

- *Лунгу К. М., Письменный Д. Т., Федин С. Н. и др.* Сборник задач по высшей математике. Часть 1.

Основные объекты линейной алгебры

- **Вектор** – *упорядоченный* набор элементов (чисел)
  - $(1,2,-3),\ (x,y,1,x^2),\ (x, \text{слон}, 1, \{0,1\})$
  - вектор – это почти массив (однако может состоять из элементов разных типов)
- **Матрица** – это прямоугольная таблица элементов (чисел)
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вектор-строка

Вектор-столбец

- Векторы и матрицы позволяют работать с [многомерными] массивами как с числами

Обозначения и размерность матриц

- Матрица размера $n \times m$ имеет
  - n строк и
  - m столбцов
- Матрицы обычно обозначают
  - заглавными латинскими буквами:
    - например, A, B, X
  - полужирными заглавными латинскими буквами:
    - например, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$
  - $A = [a_{ij}]_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Матрица	Размерность
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2×3
$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	?
$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	?

Квадратная матрица

- Квадратная матрица
  - Число строк = числу столбцов ($n = m$)
  - $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Прямоугольная матрица
  - Число строк и число столбцов произвольны
  - Может быть квадратной, а может и не быть
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Главная и побочная диагонали

- Главная диагональ (main diagonal) выходит из левого верхнего угла
  - элементы a_{ij} такие, что $i = j$
- Побочная диагональ (antidiagonal) выходит из правого верхнего угла
  - элементы a_{ij} такие, что $i + j = 1 + m$, где m число столбцов

- $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Главная диагональ

Побочная диагональ

1 и 0 в матрицах

- Единичная матрица (identity matrix) – *квадратная* матрица с единицами на главной диагонали и остальными элементами = нулю
  - $E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Нулевая матрица (zero matrix) – *прямоугольная* матрица со всеми элементами = нулю
  - $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Диагональная матрица

- Диагональная матрица (diagonal matrix) – *прямоугольная* матрица, у которой *только* на главной диагонали *могут* стоять ненулевые элементы
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - любая единичная
  - любая нулевая

Транспонирование матриц

- $B = A^T$
  - записываем каждую строку матрицы A как столбец
  - $b_{ij} = a_{ji}$
  - если $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, то $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \boxed{?}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \boxed{?}$$

Сложение (вычитание) матриц

- $C = A \pm B$
  - соответствующие элементы складываем/вычитаем
  - $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
  - матрицы *должны иметь одинаковую размерность*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{?}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q & -3 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{?}$$

Умножение матрицы на скаляр (число)

- $C = \alpha A$
  - каждый элемент умножаем на число α
  - $c_{ij} = \alpha a_{ij}$

1

$$3\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{?}$$

2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} q & -3 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2\boldsymbol{A} = \boxed{?}$$

Умножение матрицы на матрицу

- $C = A \cdot B = AB$
  - $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$
  - c_{ij} = сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B
  - c_{ij} = скалярному произведению (dot product) i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B
  - операция не коммутативна (нет симметрии; вообще говоря $A \cdot B \neq B \cdot A$)
  - число столбов первой матрицы должно равняться числу строк второй:

$$n \times m \cdot m \times k \to n \times k$$

- $A^2 = AA$
- $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{p \text{ раз}}$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \begin{bmatrix} -11 & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Первая строка на первый столбец:
(1 x 5) + (0 x 1) + (3 x 0) + (-2 x 8) = -11

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Первая строка на второй столбец:
(1 x 1) + (0 x 7) + (3 x 3) + (-2 x -3) = 16

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Вторая строка на первый столбец:
(2 x 5) + (8 x 1) + (4 x 0) + (3 x 8) = 42

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Вторая строка на второй столбец:
(2 x 1) + (8 x 7) + (4 x 3) + (3 x -3) = 61

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \\ 50 & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Третья строка на первый столбец:
(7 x 5) + (-1 x 1) + (0 x 0) + (2 x 8) = 50

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \\ 50 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Третья строка на второй столбец:
(7 x 1) + (-1 x 7) + (0 x 3) + (2 x -3) = -6

Решим задачки

a Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $AB =$?

b $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$?

c $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 =$?

☠ $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k =$?

☠ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$?

☠ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$?

Единичная матрица при умножении

- Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- Найдите

$$AI = \boxed{?}$$

$$IA = \boxed{?}$$

- $A \cdot I = I \cdot A = A$ для любой матрицы A и соответствующей матрицы I

Почему матричное умножение такое [сложное]?

- Поскольку матрица – это линейное преобразование / линейный оператор

$$(x, y) \to (3x, 4x + 5y, x - y)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x + 5y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u & s \\ y & v & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3u & 3s \\ 4x + 5y & 4u + 5v & 4s + 5t \\ x - y & u - v & s - t \end{pmatrix}$$

Почему матричное умножение такое [сложное]?

- Поскольку таким образом легко записывать системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решите уравнение

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 8 \end{pmatrix}$$

?