

Discrete Mathematics: Introduction

Basics of Linear Algebra: Matrices

Kiril
Kuzmin
October 5, 2022

О нашем курсе

□ Курс включает

- Основы линейной алгебры
- Основы теории графов
- Математическую индукцию
- Комбинаторику

□ Оценка

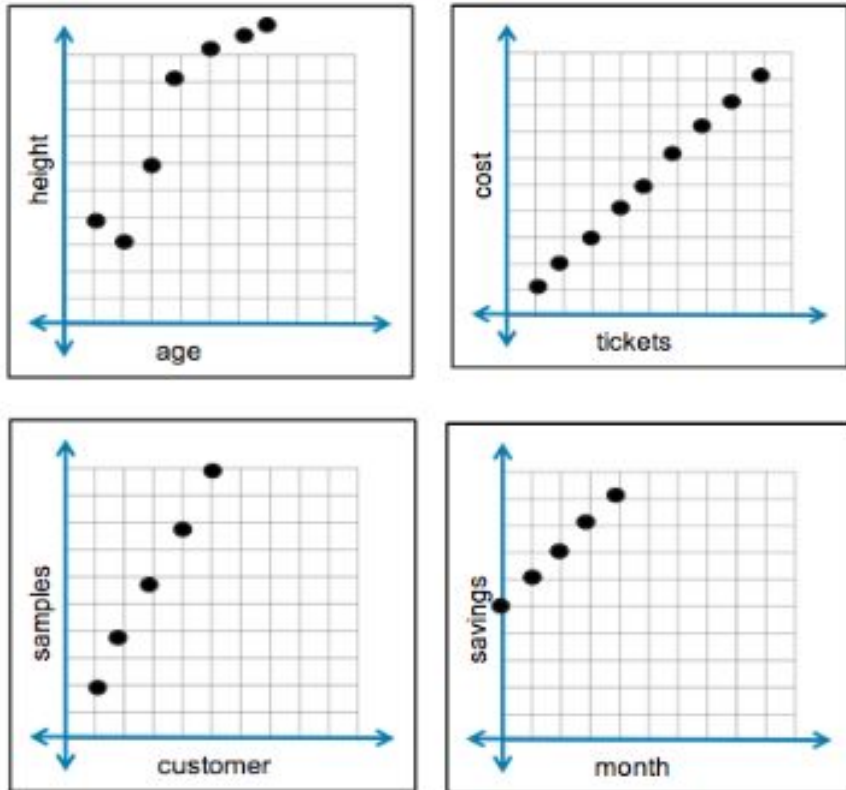
- 40% домашние задания
- 30% промежуточный экзамен
- 30% финальный экзамен

□ Как связаться с преподавателем (Кирилл Геннадьевич Кузьмин)

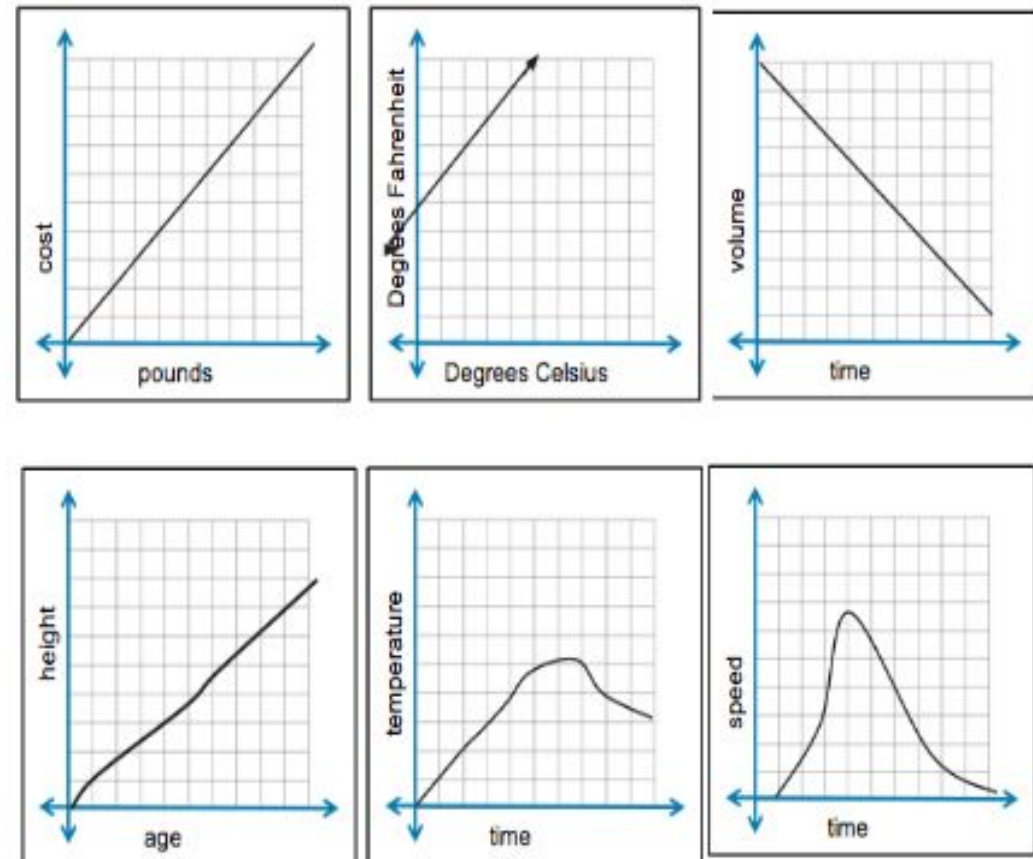
- kuzminkg@gmail.com

Что изучает дискретная математика?

DISCRETE

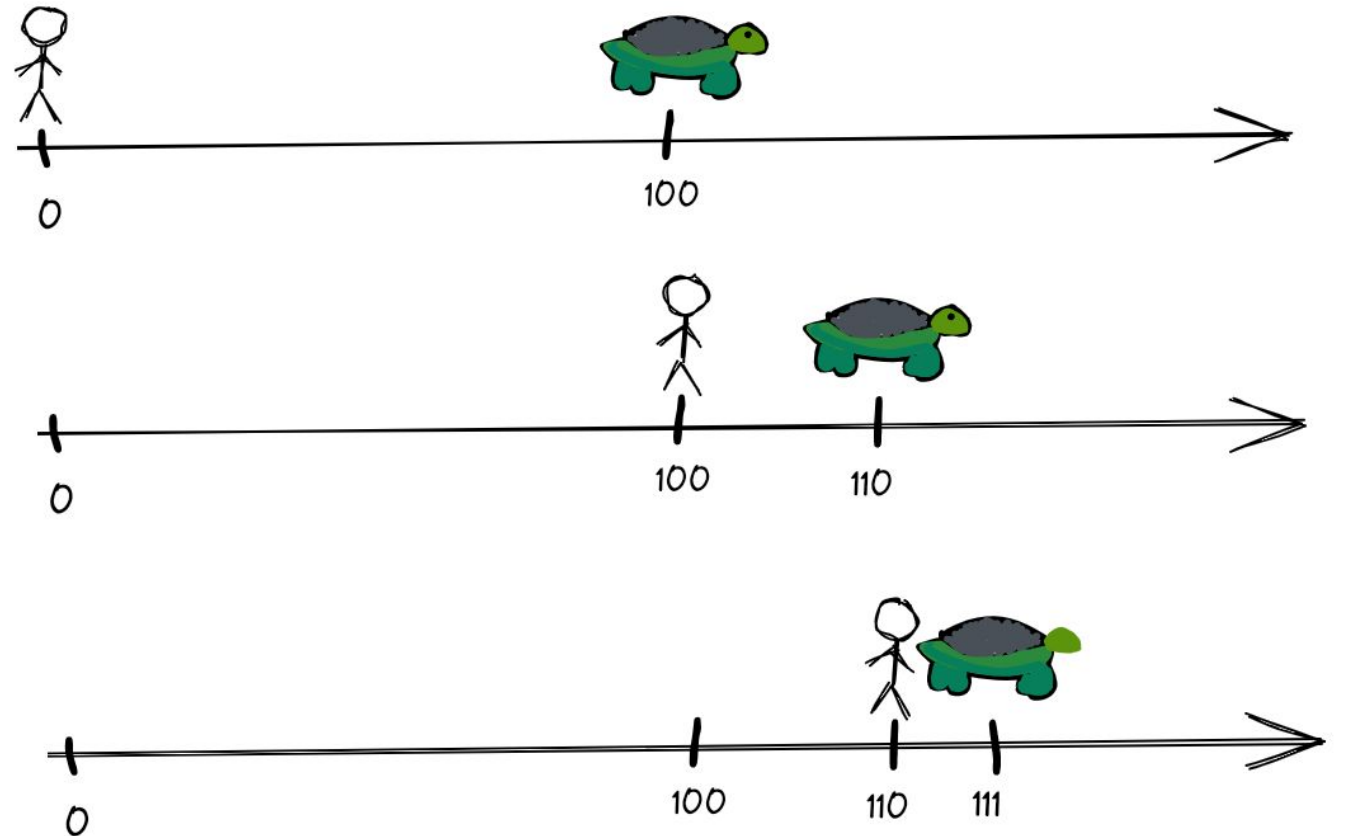


CONTINUOUS



Непрерывность – это иллюзия?

- Апории/трудности/парадоксы Зенона ([Zeno's paradoxes](#))
 - ✓ Ахиллес и черепаха
 - ✓ Стрела
 - ✓ Дихотомия



Линейная алгебра: что это и зачем

- ❑ Алгебра – это восполнение/обобщение арифметики
- ❑ Алгебра изучает операции над элементами множеств произвольной природы (**не только числами**)
- ❑ Алгебра обобщает обычные операции *сложения и умножения* чисел
- ❑ Алгебра
 - ❑ Элементарная (то, что изучалось в школе)
 - ❑ **Линейная** (будем изучать сейчас)
 - ❑ Общая
 - ❑ Универсальная

Линейная алгебра: рекомендуемые книги

□ *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике

□ Полный курс

или

□ Часть 1

□ *Лунгу К. М., Письменный Д. Т., Федин С. Н. и др.* Сборник задач по высшей математике. Часть 1.

Основные объекты линейной алгебры

 **Вектор** – упорядоченный набор элементов (чисел)

➤ $(1, 2, -3)$, $(x, y, 1, x^2)$, $(x, \text{слон}, 1, \{0, 1\})$

➤ вектор – это почти массив (однако может состоять из элементов разных типов)

 **Матрица** – это прямоугольная таблица элементов (чисел)


➤ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(0 \ 1 \ 2)$

Вектор-
строка



Вектор-
столбец



 Векторы и матрицы позволяют работать с [многомерными] массивами как с числами

Обозначения и размерность матриц

 Матрица размера $n \times m$ имеет

- n строк и
- m столбцов

 Матрицы обычно обозначают

- заглавными латинскими буквами:
 - например, A, B, X
- полужирными заглавными латинскими буквами:
 - например, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}$

➤ $A = [a_{ij}]_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Матрица	Размерность
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	2×3
$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$?
$(1 \ 6 \ 0)$?

Квадратная матрица

Квадратная матрица

➤ Число строк = числу столбцов ($n = m$)

➤
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица

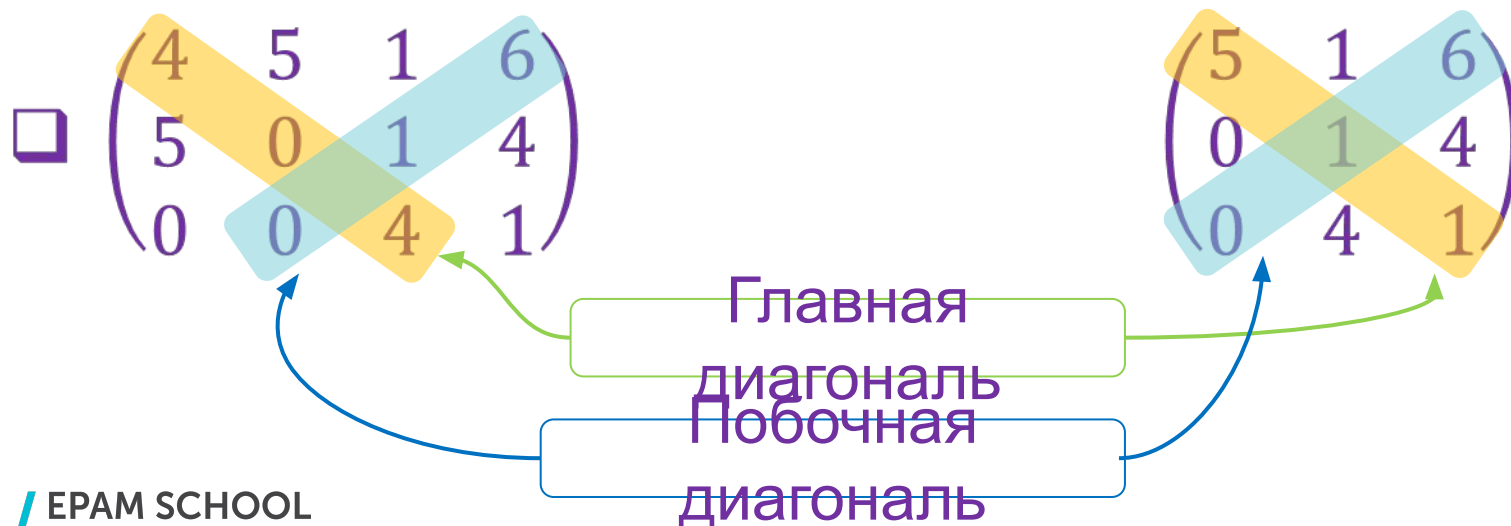
➤ Число строк и число столбцов произвольны

➤ Может быть квадратной, а может и не быть

➤
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Главная и побочная диагонали

- ▣ Главная диагональ (**main diagonal**) выходит из левого верхнего угла
 - элементы a_{ij} такие, что $i = j$
- ▣ Побочная диагональ (**antidiagonal**) выходит из правого верхнего угла
 - элементы a_{ij} такие, что $i + j = 1 + m$, где m число столбцов



1 и 0 в матрицах


- 📖 Единичная матрица (**identity matrix**) – квадратная матрица с единицами на главной диагонали и остальными элементами = нулю

$$\triangleright E = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- 📖 Нулевая матрица (**zero matrix**) – прямоугольная матрица со всеми элементами = нулю

$$\triangleright O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица


 Диагональная матрица (**diagonal matrix**) – прямоугольная матрица, у которой *только* на главной диагонали *могут* стоять ненулевые элементы

➤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

➤ любая единичная

➤ любая нулевая

Транспонирование матриц

 $B = A^T$

➤ записываем каждую строку матрицы A как столбец


➤ $b_{ij} = a_{ji}$

➤ если $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, то $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \text{[yellow box with ?]}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \text{[yellow box with ?]}$$

Сложение (вычитание) матриц

 $C = A \pm B$

➤ соответствующие элементы складываем/вычитаем


➤ $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

➤ матрицы должны иметь одинаковую размерность

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array}$$

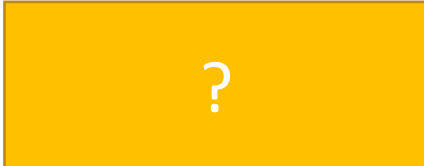
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q & -3 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array}$$

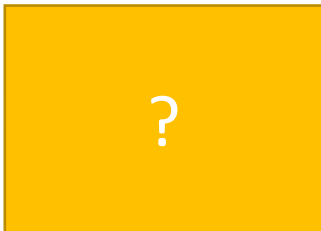
Умножение матрицы на скаляр (число)

 $C = \alpha A$

➤ каждый элемент умножаем на число α

➤ $c_{ij} = \alpha a_{ij}$

1 $3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$ 

2 $A = \begin{pmatrix} q & -3 \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad 2A =$ 

Умножение матрицы на матрицу

$$\square C = A \cdot B = AB$$

$$\text{➤ } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

➤ c_{ij} = сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B

➤ c_{ij} = скалярному произведению (dot product) i -ой строки матрицы A на j -ый столбец матрицы B

➤ операция не коммутативна (нет симметрии; вообще говоря $A \cdot B \neq B \cdot A$)

➤ число столбцов первой матрицы должно равняться числу строк второй:

$$n \times m \cdot m \times k \rightarrow n \times k$$

$$\square A^2 = AA$$

$$\square A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{p \text{ раз}}$$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -11 \\ \\ \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Первая строка на первый столбец:
 $(1 \times 5) + (0 \times 1) + (3 \times 0) + (-2 \times 8) = -11$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 16 \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Первая строка на второй столбец:
 $(1 \times 1) + (0 \times 7) + (3 \times 3) + (-2 \times -3) = 16$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Вторая строка на первый столбец:
 $(2 \times 5) + (8 \times 1) + (4 \times 0) + (3 \times 8) = 42$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Вторая строка на второй столбец:
 $(2 \times 1) + (8 \times 7) + (4 \times 3) + (3 \times -3) = 61$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \\ 50 & \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Третья строка на первый столбец:
 $(7 \times 5) + (-1 \times 1) + (0 \times 0) + (2 \times 8) = 50$

Умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -11 & 16 \\ 42 & 61 \\ 50 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$


Третья строка на второй столбец:
 $(7 \times 1) + (-1 \times 7) + (0 \times 3) + (2 \times -3) = -6$


Решим задачи


a Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $AB =$?

b $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$?

c $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 =$?

 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k =$?

 $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$?

 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) =$?

Единичная матрица при умножении

- ❑ Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- ❑ Найдите

$$AI = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array}$$
$$IA = \begin{array}{|c|} \hline ? \\ \hline \end{array}$$

📖 $A \cdot I = I \cdot A = A$ для любой матрицы A и соответствующей матрицы I

Почему матричное умножение такое [сложное]?

- Поскольку матрица – это линейное преобразование / линейный оператор

$$(x, y) \rightarrow (3x, 4x + 5y, x - y) \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x + 5y \\ x - y \end{pmatrix}$$

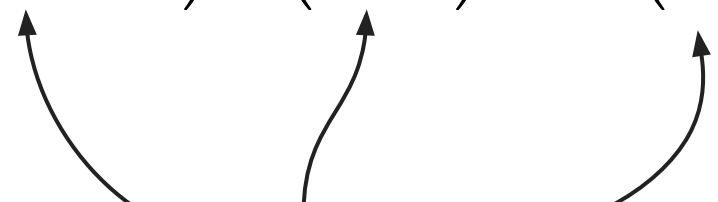
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u & s \\ y & v & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3u & 3s \\ 4x + 5y & 4u + 5v & 4s + 5t \\ x - y & u - v & s - t \end{pmatrix}$$

Почему матричное умножение такое [сложное]?

- Поскольку таким образом легко записывать системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$Ax = b$$


$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решите уравнение

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 8 \end{pmatrix}$$



?