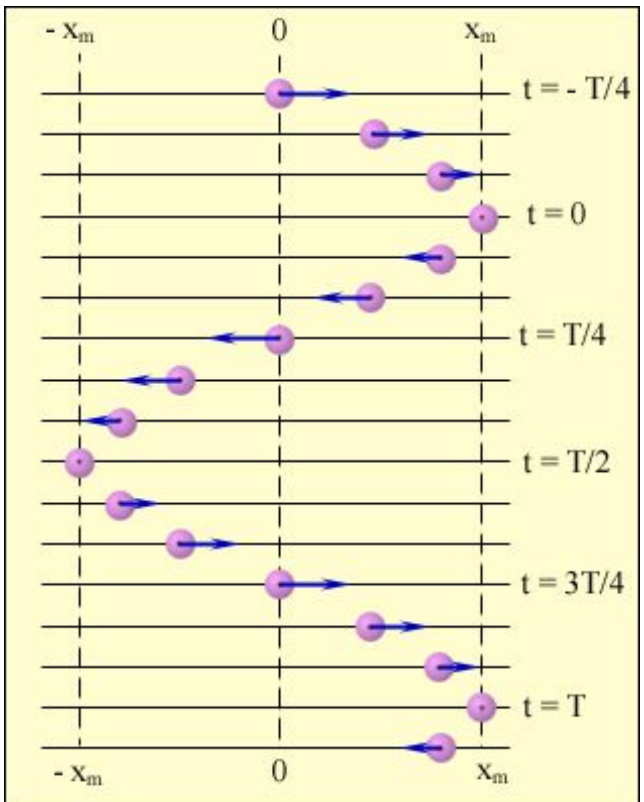
Гармонические колебания



Колебания – это физические процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания

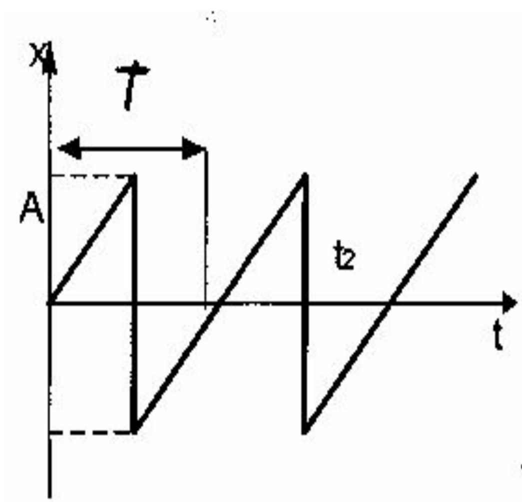
Колебание	**процесс изменения состояний системы, повторяющийся в той или иной степени**
Периодический процесс	**Если состояние системы или значение какой-либо физической величины повторяется через равные промежутки времени, то такие колебания называются периодическими.**

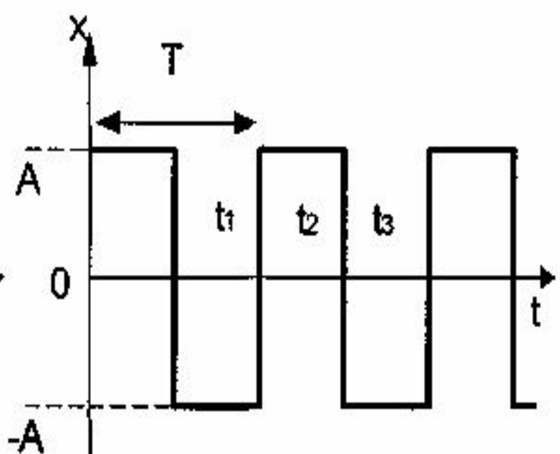
закон движения тела, совершающего колебания

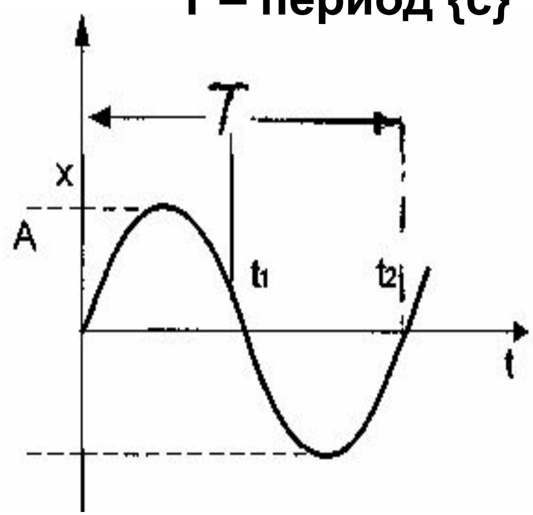
$$x(t) = x(t + nT)$$

Некоторая периодическая функция времени

T – период {с}

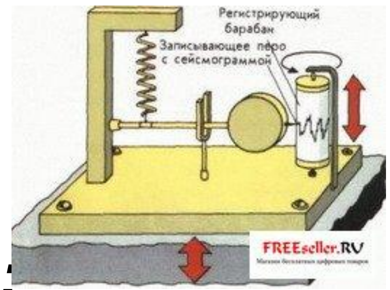






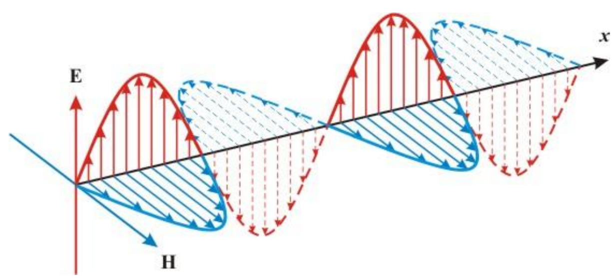
Классификация колебаний по типу колеблющейся величины

- ***1.Механические колебания***: X, V, a, угол φ,



- ***2.Электрические колебания:*** заряд q, сила тока I, напряжение *U.*

- *3.* ***Электромагнитные колебания:*** ***Ē***, ***B*** *(свет).*



4.Упругие колебания:
плотность ρ, давление P,
(звук).

Классификация колебаний

По характеру воздействия на колеблющуюся систему

Колебания

Свободные (собственные)

происходят под действием **внутренних сил системы**, после того, как она была выведена из состояния равновесия

Вынужденные

под действием **внешних периодически изменяющихся сил**

- **Автоколебания**
- **Параметрические**
- **Релаксационные**
- …

Затухающие

Незатухающие

Гармонические

по закону sin (cos)

Гармонический осциллятор

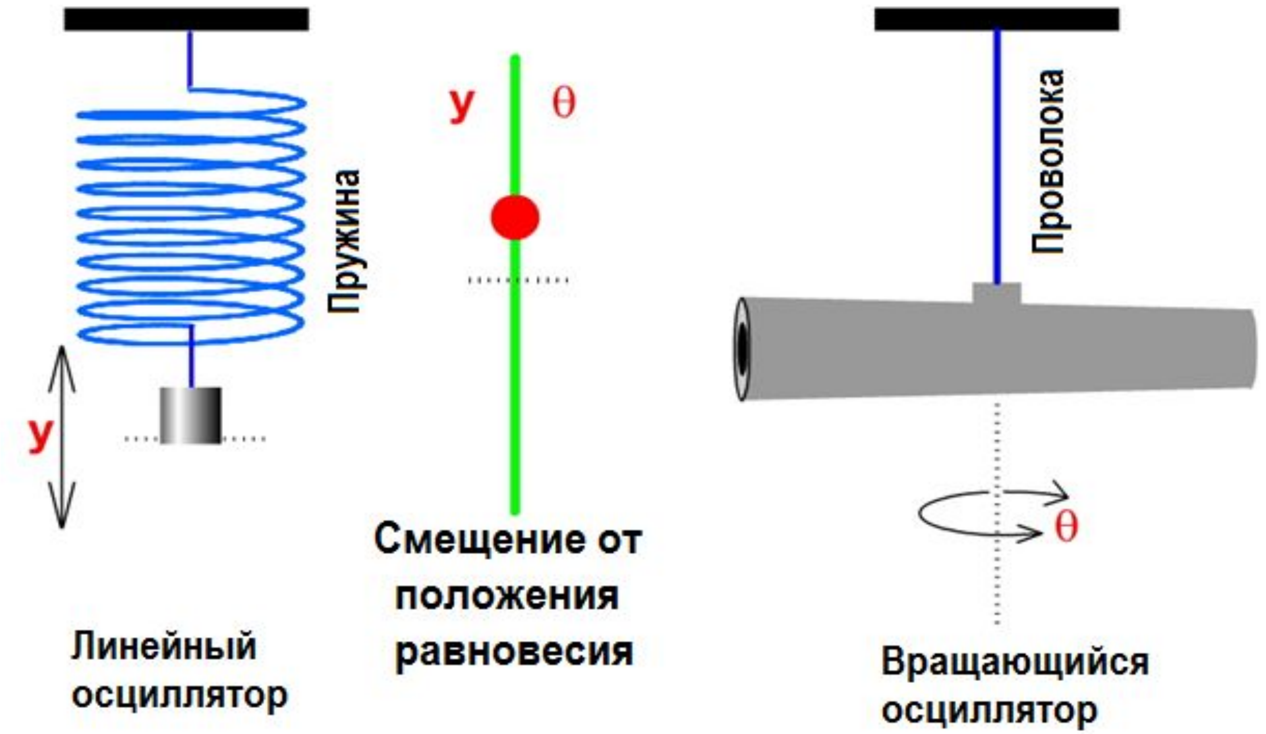
Осциллятор

Колебательная система

– это **физическая система, совершающая колебания**

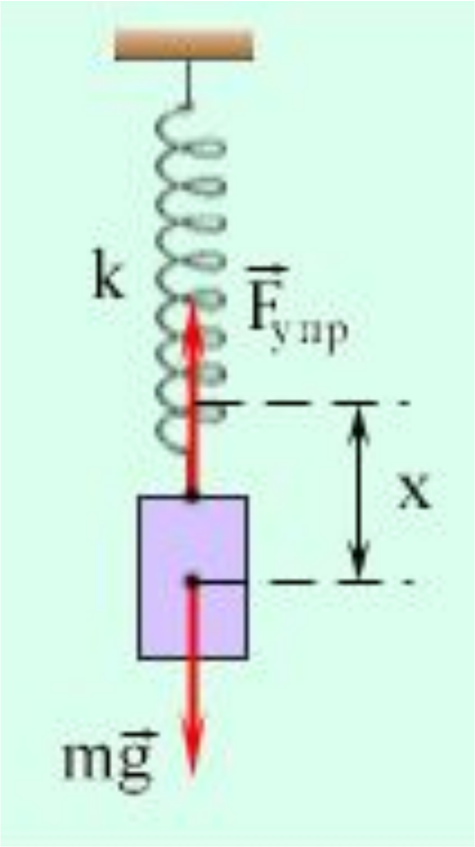
Примеры гармонического осциллятора:

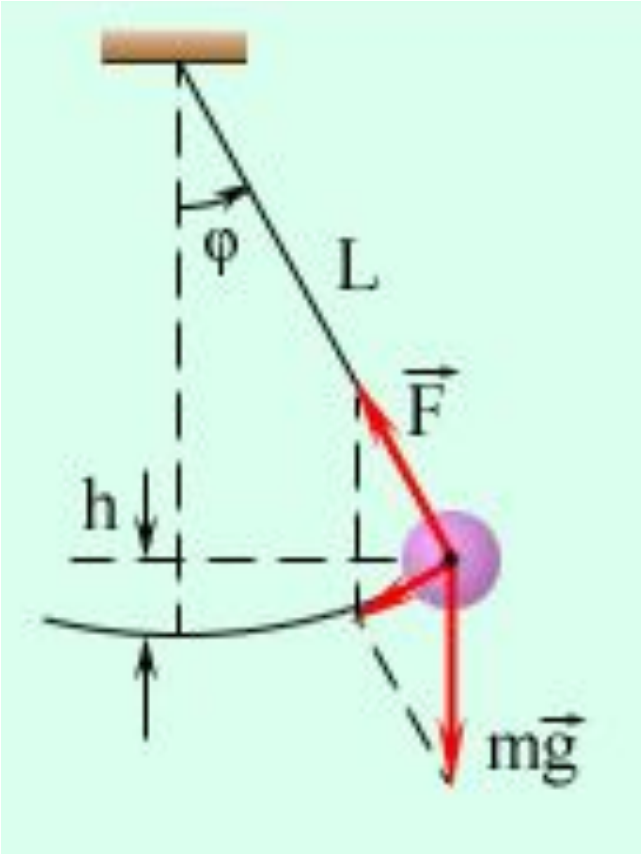
- пружинный маятник
- физический маятник
- математический маятник
- колебательный контур
- …

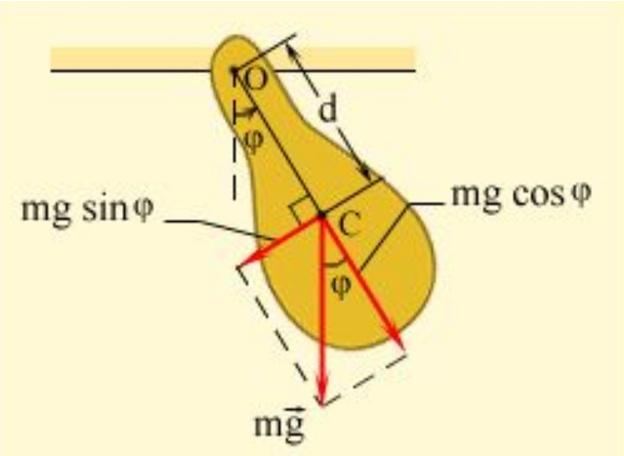


Механические колебательные системы

Примеры простых механических колебательных систем







Физический маятник

**Пружинный маятник –
груз на пружине**

**Математический маятник –
груз на невесомой нерастяжимой нити**

идеализация

Гармонические колебания

Колебания, совершающиеся по закону sin или cos

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

фаза колебаний
$\varphi = \omega t + \varphi_0$

смещение тела от положения равновесия в момент времени t

амплитуда колебаний (max смещение тела от положения равновесия)

циклическая (круговая) **частота колебаний**

время

начальная фаза колебаний (при $t = 0$)

Гармоническое колебание определяется заданием трех постоянных: A, ω, ϕ_0, причем,

A, ϕ_0 - *определяются* **начальными условиями,**

ω - **определяется параметрами системы**

Характеристики колебательного движения

x **смещение тела от положения равновесия**

x_m, A **Амплитуда колебаний** **максимальное смещение тела от положения равновесия**

ω **циклическая** (круговая) **частота колебаний**

t **время колебаний**

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ **фаза колебаний**

φ_0 **начальная фаза колебаний (при t=0)**

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

T **Период колебаний** **время**, в течение которого происходит **одно полное колебание фаза колебания получает приращение 2п**

$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

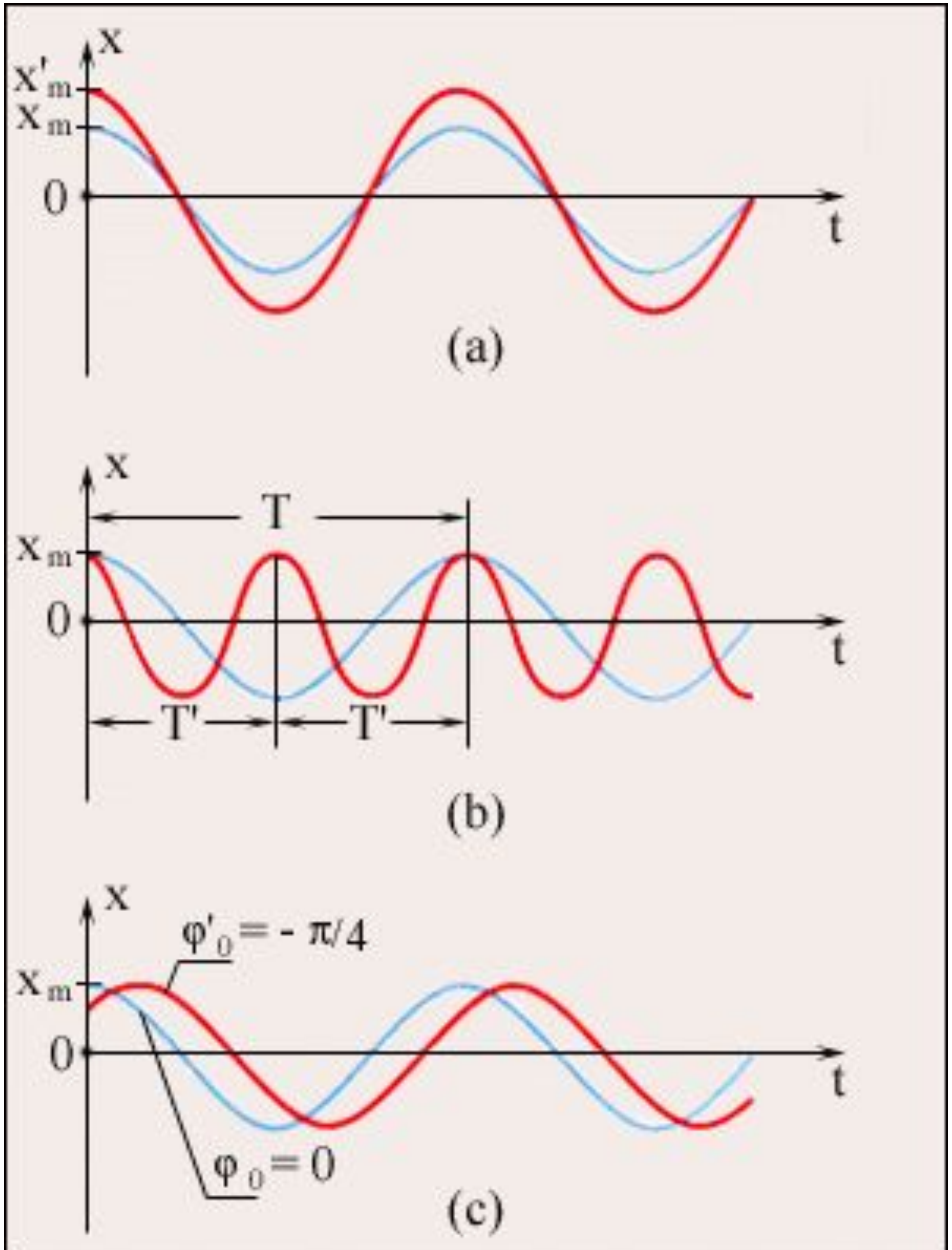
ν , f **Частота колебаний** **количество колебаний в единицу времени**

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

[T]=c

[ν]=c^{-1}=Гц

Графики отличаются:



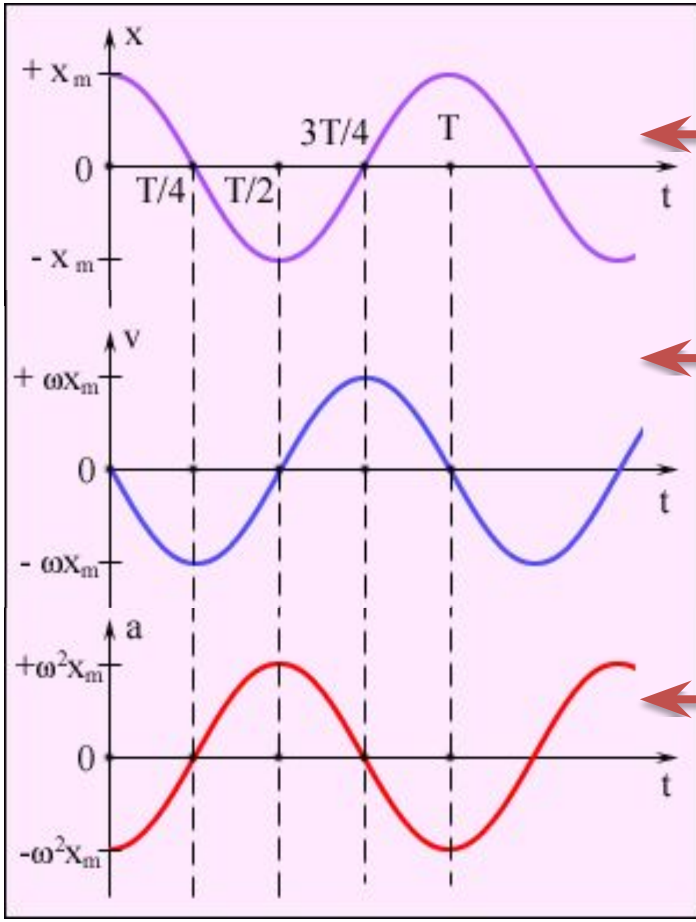
амплитудой

периодом

начальной фазой

Графики гармонического колебания

Графики при φ0 =0



для тела, совершающего гармонические колебания

координаты

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

скорости $v(t) =$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = \\ = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

ускорения $a(t) =$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = \\ = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Знак «-»:

ускорение всегда имеет знак, ↑↓ знаку смещения x(t)

сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, **направлена всегда в сторону положения равновесия**

Квазиупругие силы

Теорема: **Чтобы система совершала гармонические колебания необходимо и достаточно, чтобы единственная сила, действующая в ней была КВАЗИУПРУГАЯ**, т.е. сила

Т

- стремящаяся возвратить тело в положение равновесия
- пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний
- направленная в сторону, ↑↓ смещению

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Таким свойством обладает **упругая сила в пределах применимости закона Гука**

$$F_{упр} = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию называют **квазиупругими**

с другой стороны, по II з-ну Ньютона $\boxed{F = ma = -m\omega_0^2 x}$ $\quad a = -\omega_0^2 x$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad a = -A\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\boxed{F =} -\boxed{m\omega_0^2} x = -\boxed{k} x = \boxed{-kA\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Гармонические колебания

Общая черта всех колебаний:

при выведении системы из положения равновесия возникает возвращающая сила *F* (квазиупругая):

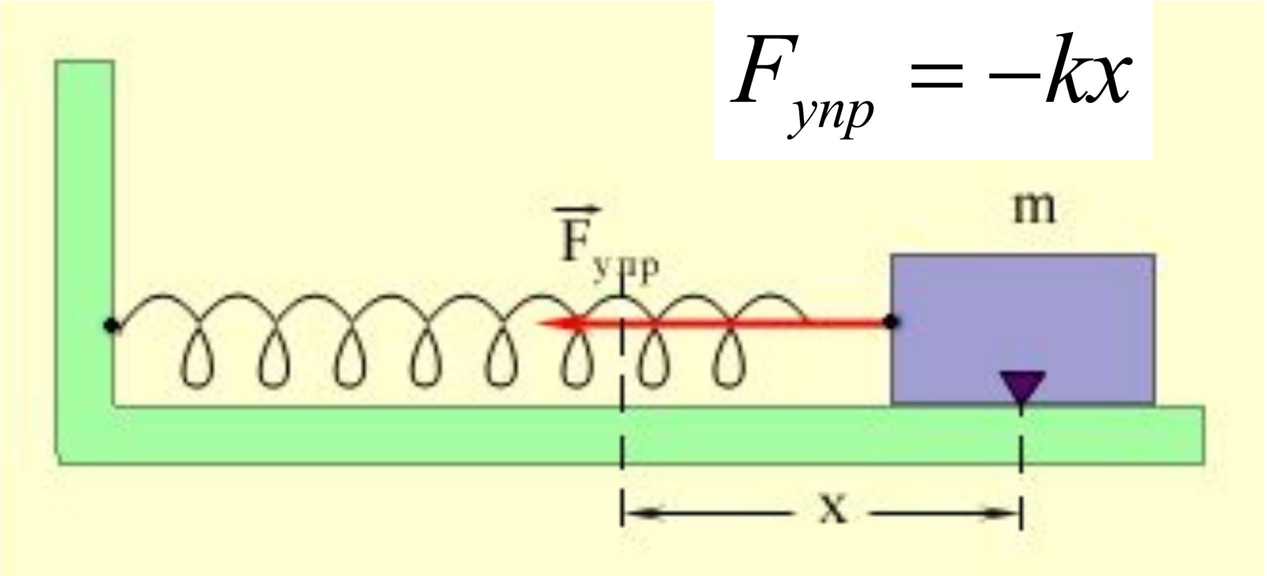
- **стремящаяся возвратить тело в положение равновесия**
- **пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний**
- **направленная в сторону, ↑↓ смещению**

Если **возвращающая сила ПЕРИОДИЧЕСКАЯ** → то **колебания ГАРМОНИЧЕСКИЕ**

Пружинный маятник

Груз массой *m*, прикрепленный **к пружине жесткости *k***

Колебания происходят под действием упругой силы



При горизонтальном расположении (груз скользит по поверхности)

$F_{тяж}$ **компенсируется силой реакции опоры**

При вертикальном расположении (груз висит на пружине)

$F_{тяж}$ **направлена по линии движения груза**

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

В положении равновесия пружина растянута на x_0

Пружинный маятник

Закон Гука $F = -kx$

II з-н Ньютона $ma = -kx$

$$mx'' = -kx$$

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

Дифференциальное уравнение:

$$\boxed{x'' + \omega_0^2 x = 0}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Решение диф.уравн. $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Круговая частота колебаний $\boldsymbol{\omega_0}$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Период гармонических колебаний груза на пружине

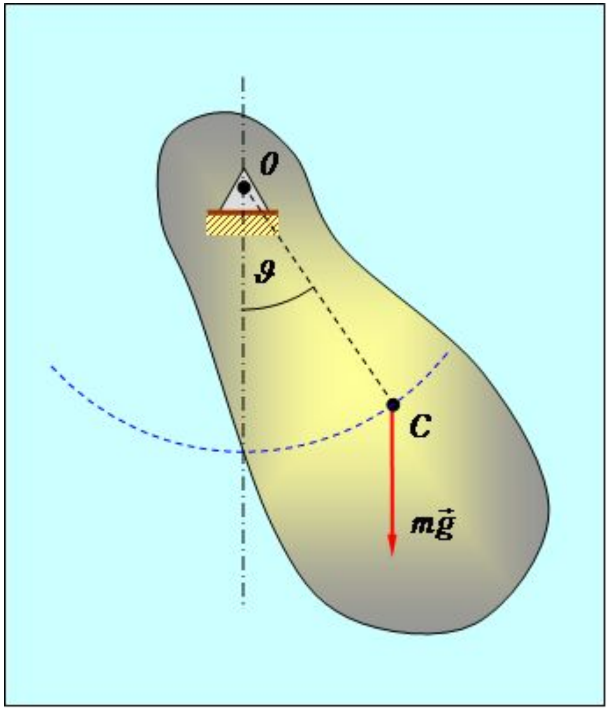
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Потенциальная энергия

$$\boxed{E_n = \frac{kx^2}{2}}$$

Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием $F_{тяж}$ колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через т.О, НЕ совпадающую с центром масс *С*



a= OC - расстояние от центра масс С до оси вращения О

Основной закон динамики вращательного движения:

$$\boxed{\vec{M} = J\vec{\varepsilon}}$$

направления $\vec{F}_\tau$ и $\vec{\varphi}$ всегда ↑↓

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{l} \times \vec{F}_\tau\right] = -a \cdot mg\sin\theta}$$

M **– момент возвращающей силы (силы тяжести)**

J **– момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса О**

Физический маятник

$$J\ddot{\theta} = -mga\ \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\sin\theta = 0$$

для малых углов

$$\sin\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \boxed{\frac{mga}{J}}\theta = 0$$

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\boxed{\ddot{\theta} + \boxed{\omega_0^2}\theta = 0}$$

Круговая частота

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}}$$

Период колебаний

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} =}$$

приведенная длина физического маятника

длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника

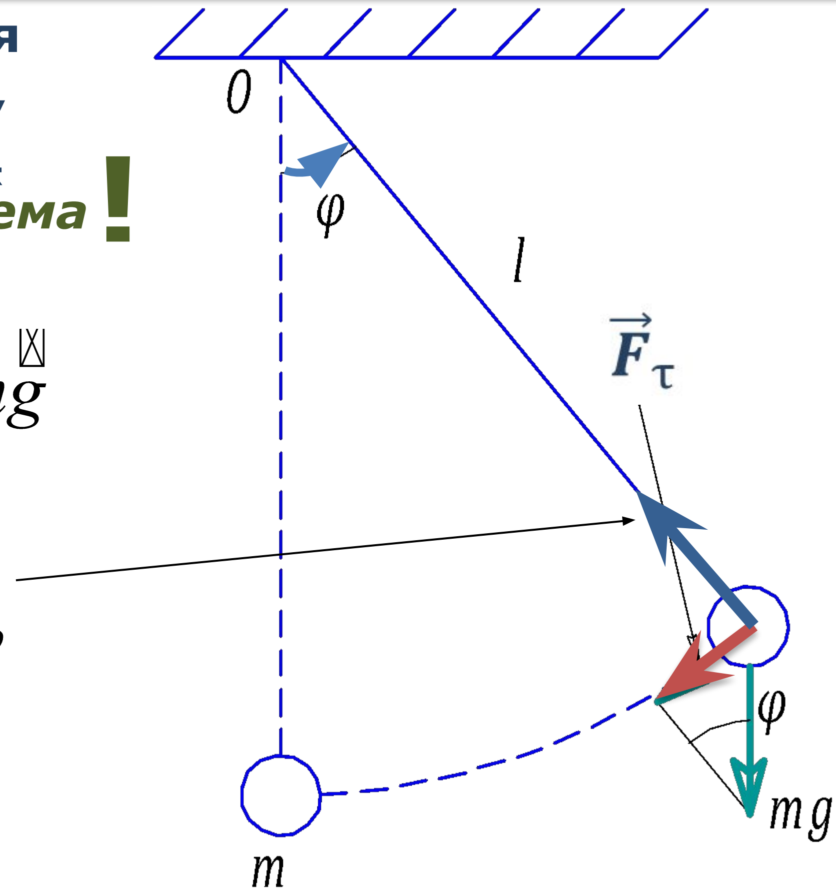
$$\boxed{T_{мат} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} = T_{физ} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}}$$

$$\boxed{L = \frac{J}{ma}}$$

Математический маятник

Материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, колеблющаяся под действием $F_{тяж}$

Идеализированная система **!**



В положении равновесия (маятник висит по отвесу), **сила тяжести**

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

уравновешивается силой натяжения нити

$$\vec{F}_{упр}$$

При отклонении маятника на *φ* появляется **касательная составляющая $\vec{F}_\tau$**

$$\boxed{F_\tau = -mg\sin\varphi}$$

Знак «-»: **направления $\vec{F}_\tau$ и $\vec{\varphi}$ всегда ↑↓**

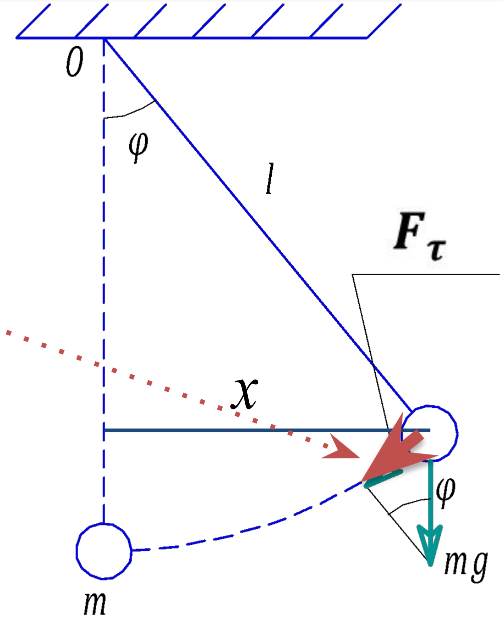
Линейное смещение маятника x

Угловое смещение маятника φ

Математический маятник

По II закону Ньютона

$$ma = F_\tau = -mg\sin\varphi$$



при малых углах

$$\sin\varphi \approx \boxed{tg\varphi = \frac{x}{l}}$$

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}$$

$$\ddot{x} + \boxed{\frac{g}{l}}x = 0$$

Круговая частота

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \boxed{\omega_0^2}x = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0}$$

Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника

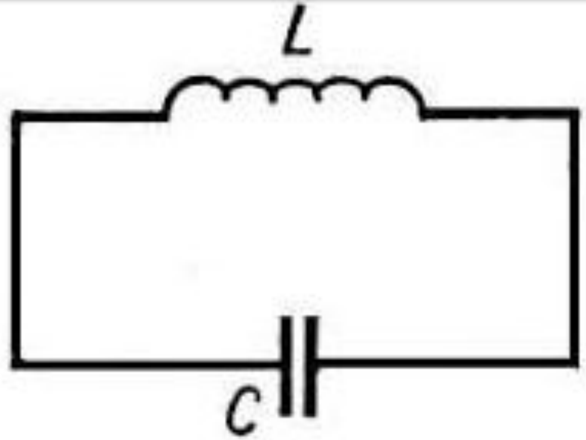
Период колебаний

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

НЕ зависит от массы!

ЭМ колебательный контур

II закон Кирхгофа



$$U_c = ЭДС_{самоинд.}$$

$$\frac{q}{C} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \boxed{\frac{1}{LC}}\, q = 0$$

Круговая частота

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

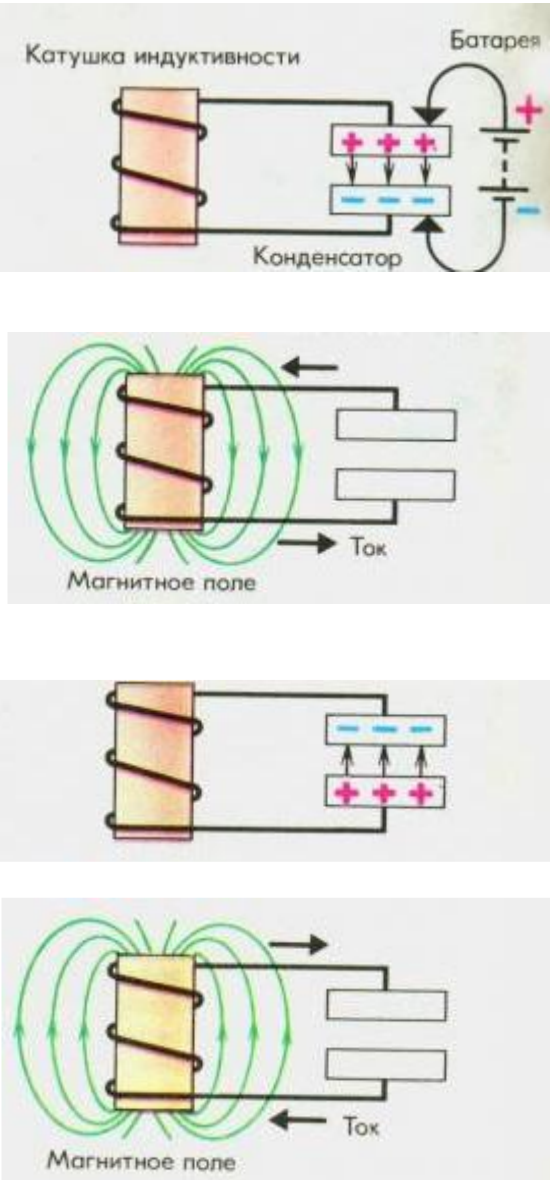
Период колебаний

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$$

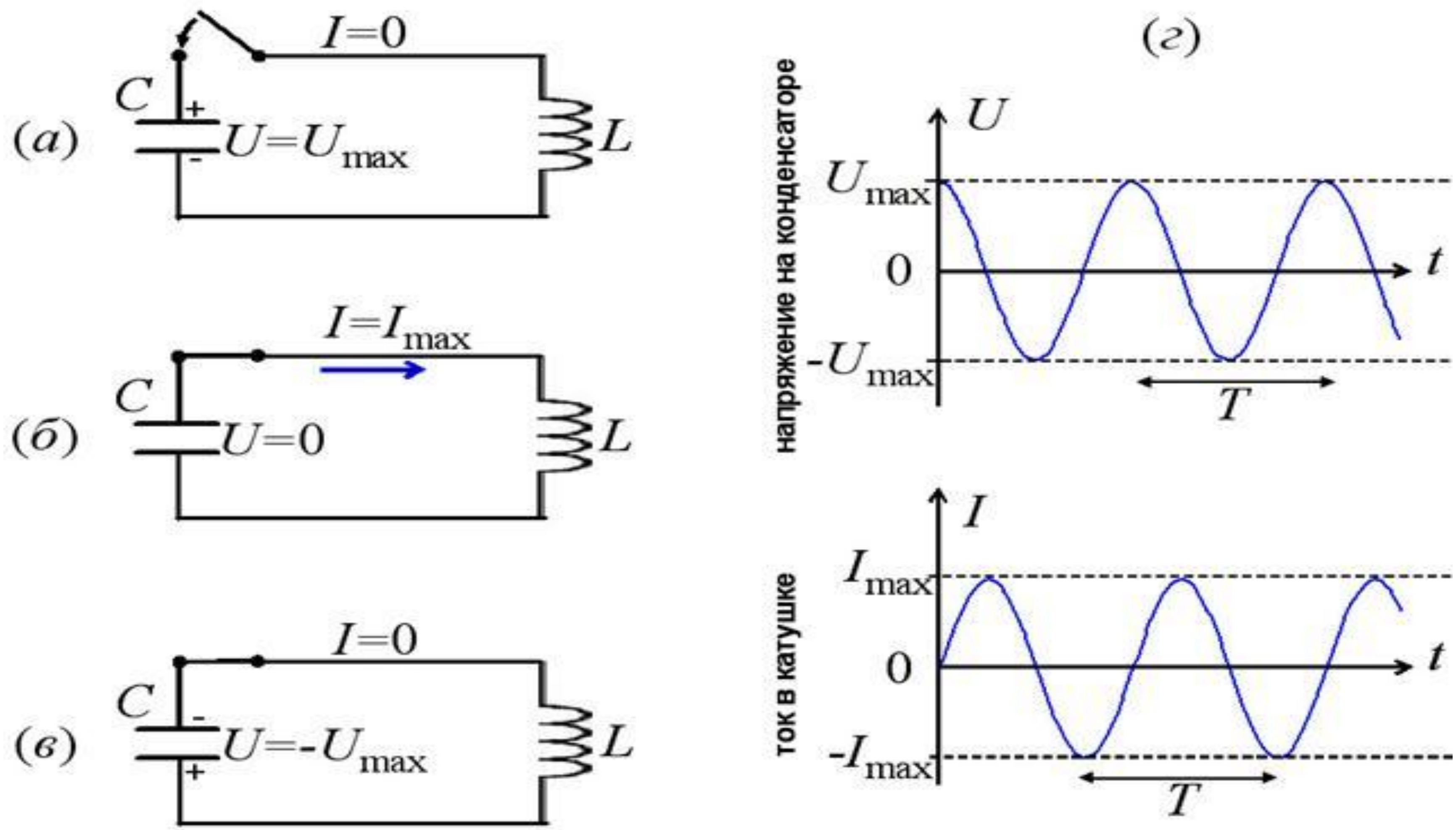
Формула Томсона, 1853 г.

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$



Электромагнитный колебательный контур



ЗСЭ: ЭМ колебания

Колебания заряда

$$q = q_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_{\max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания напряжения

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

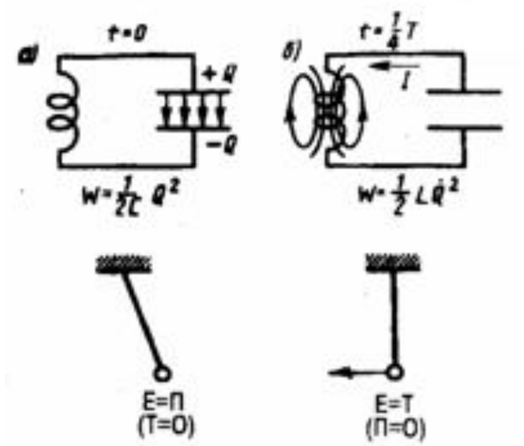
$$E = E_{эл} + E_{магн} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$$

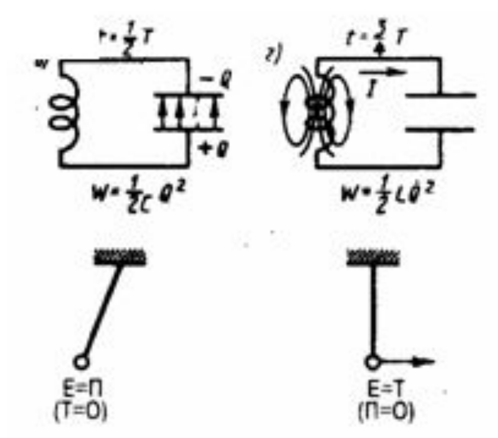
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

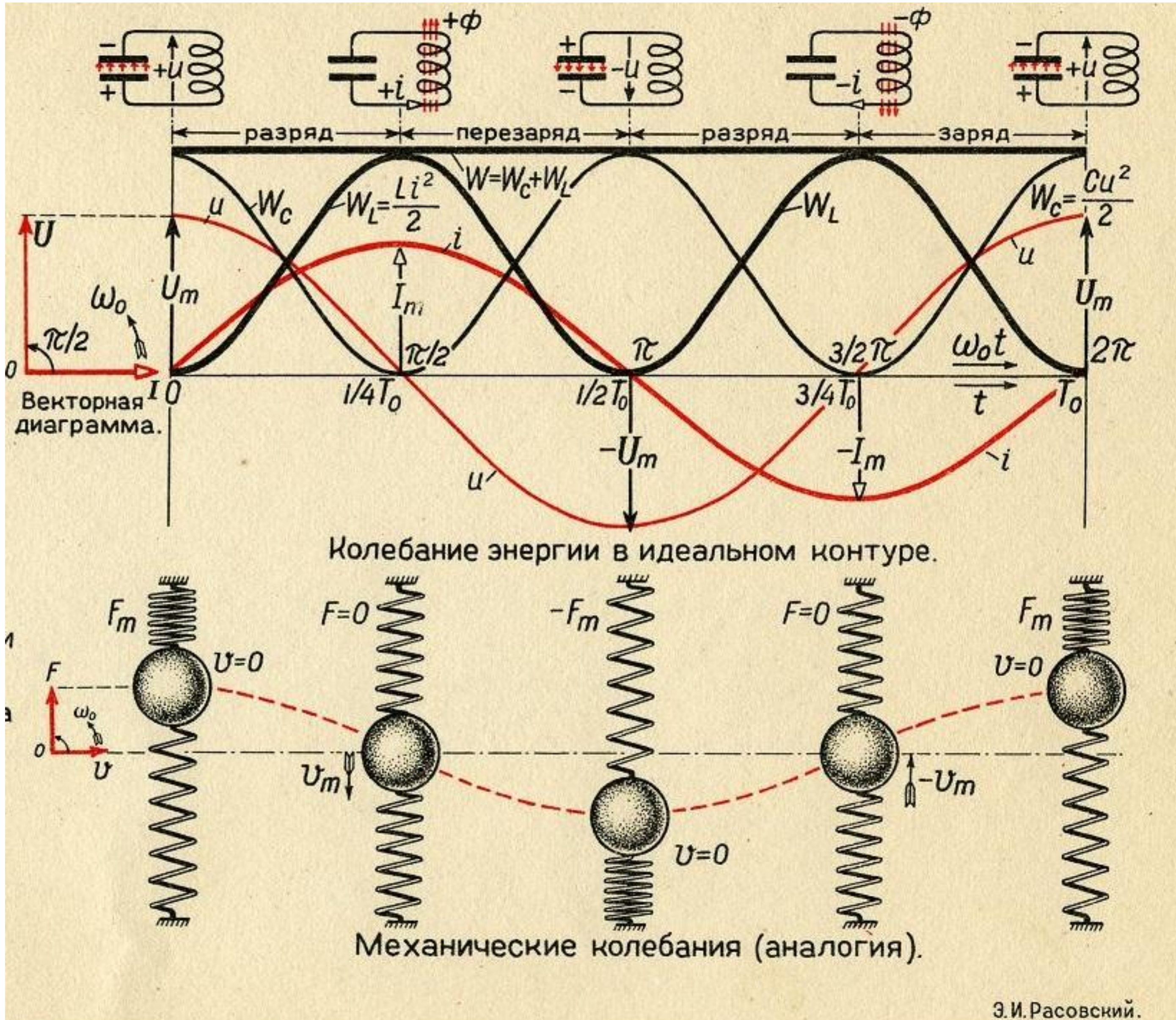
$$E = \frac{q_{\max}^2\cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{Lq_{\max}^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)}{2}$$

$$\frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{Lq_{\max}^2\omega_0^2}{2}$$

Аналогии гармонических колебаний







Аналогия между механическими и электрическими колебаниями

Механические колебания

1. *x, φ* –смещение
2. *V* -линейная скорость
3. *m* –масса
4. *k* –коэффициент жесткости

Электрические колебания

1. *q, U*-заряд, напряжение
2. *I* –сила тока
3. *L* –индуктивность
4. *1/C*.

Гармонический осциллятор

Итак, **дифференциальное уравнение гармонического осциллятора:**

Другие виды записи

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Решение этого уравнения:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Уравнение гармонических колебаний

Собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

пружинный маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

математический маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

электромагнитный колебательный контур

- **Собственная частота колебаний НЕ зависит от начальных условий, а определяется только внутренними свойствами осциллятора**

Энергия колебаний
гармонического осциллятора

Кинетическая энергия

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \boxed{\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Потенциальная энергия

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \boxed{\frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$$k = \omega_0^2 m$$

пружинный

Закон сохранения энергии

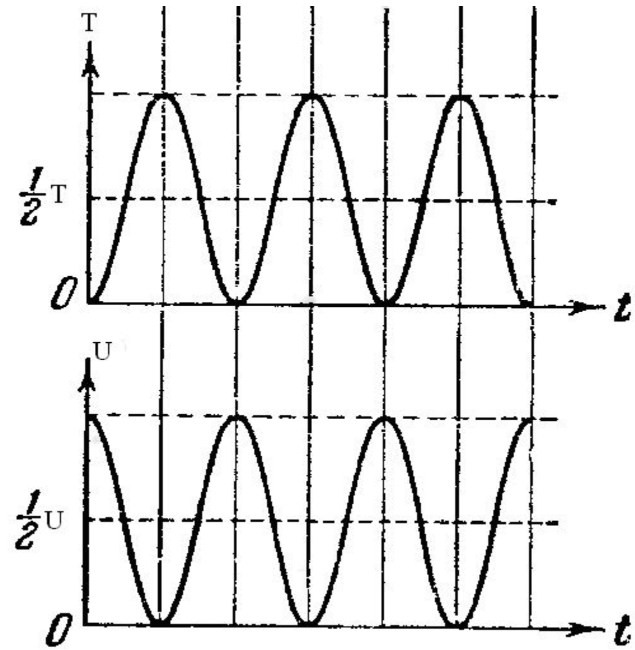
Полная энергия

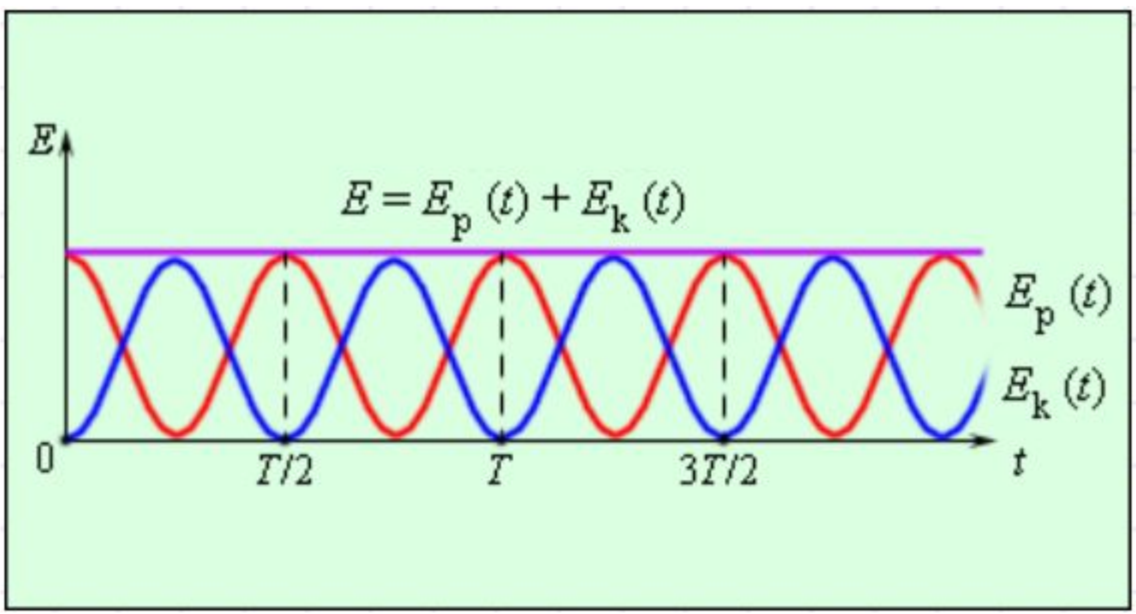
$$\boxed{E = E_к + E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = const}$$

Энергия колебаний

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

В моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия Е равна максимальной потенциальной, а при прохождения положения равновесия максимальной кинетической.



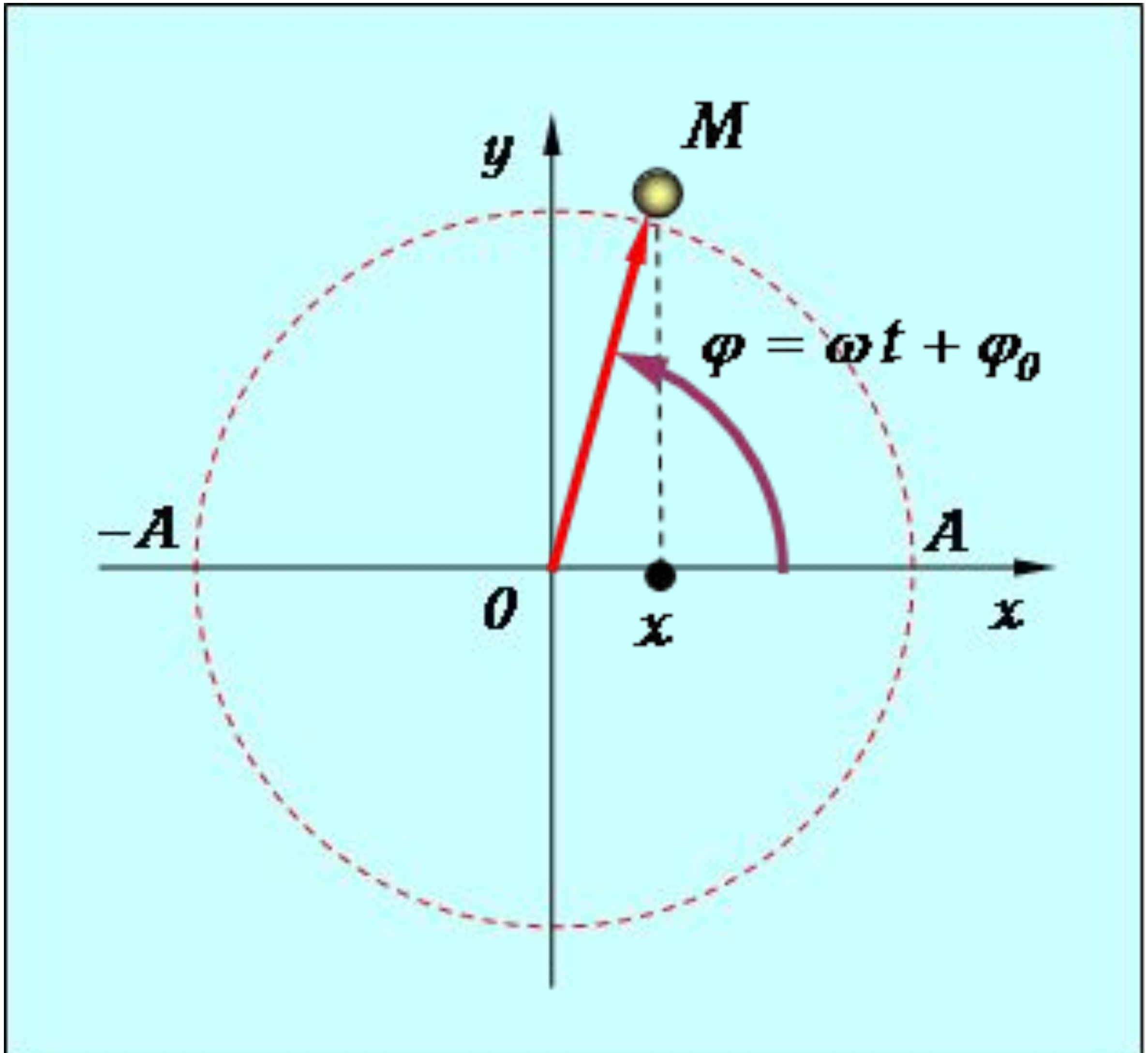


Сложение колебаний

Еще одним методом изучения гармонических колебаний является метод векторных диаграмм.

1. Рисуем произвольную ось,
2. на ней выбираем начало отсчета,
3. затем рисуем вектор, длина которого равна амплитуде колебаний,
4. а его положение относительно выбранной оси задается углом, равным начальной фазе колебаний.
5. Циклическая частота колебаний равна угловой скорости вращения вектора амплитуды.

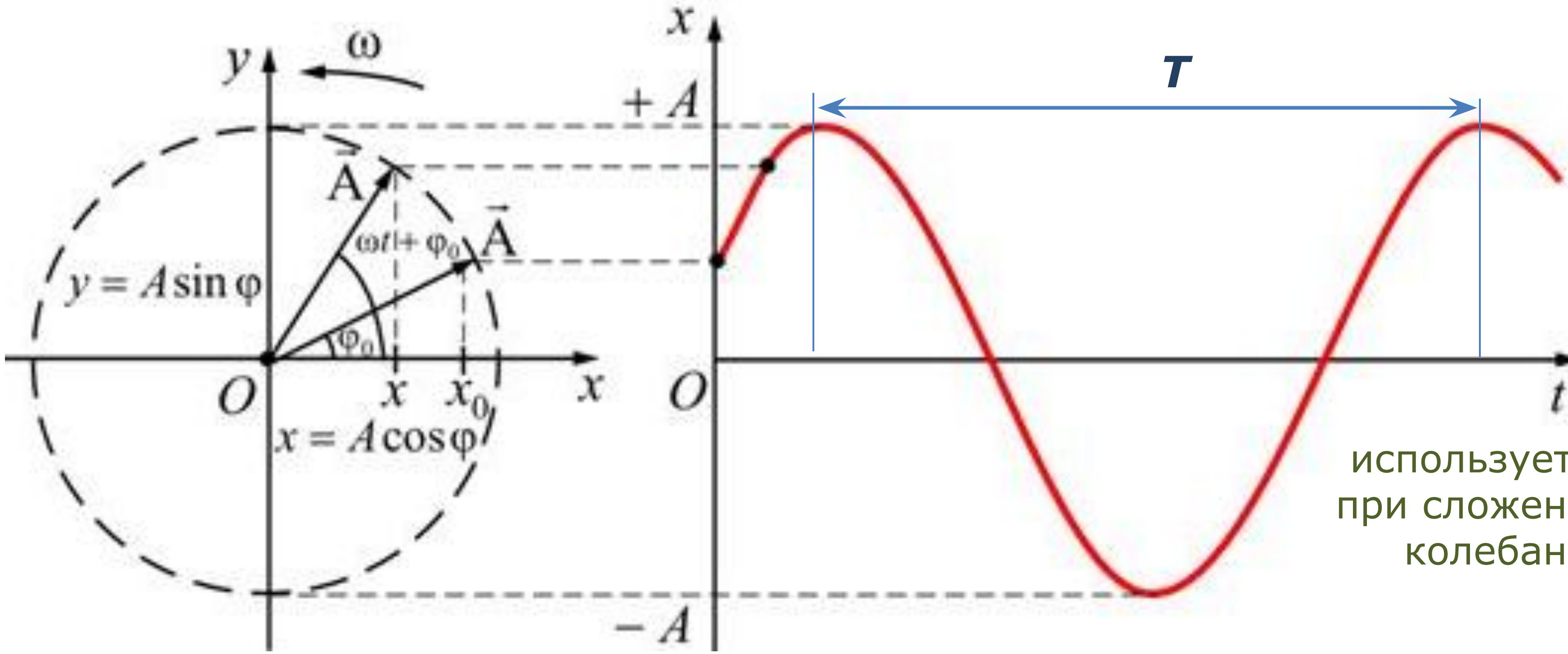
Векторная диаграмма



Связь вращательного движения с колебаниями

Пусть вектор длиной *A* вращается с угловой скоростью *ω*

Метод векторных диаграмм



используется при сложении колебаний

При *t*=0 вектор образует угол φ_0 с осью *x*

значения проекций на оси:

В произвольный момент времени: $\varphi = \omega t + \varphi_0$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

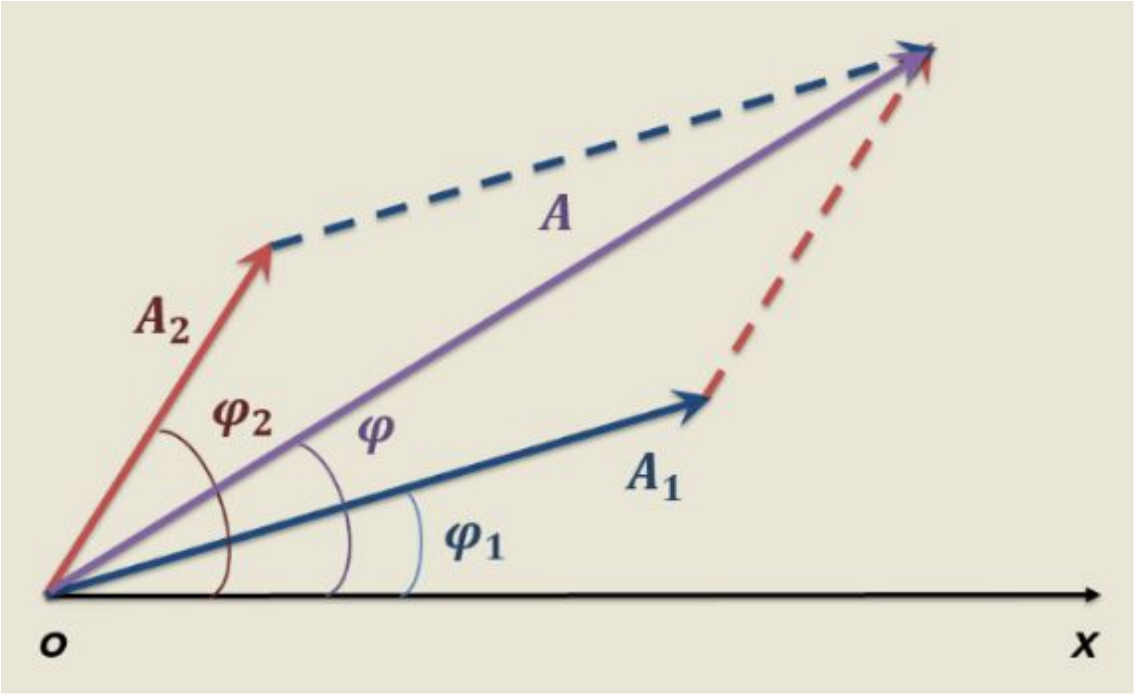
Сложение колебаний одного направления (коллинеарных) одинаковой частоты

$$x_1 = A_1 cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 cos(\omega t + \varphi_2)$$

Результирующее колебание:

$$x_{рез} = A_{рез} cos(\omega t + \varphi\ )$$



Сложение колебаний

Сложение колебаний одинакового направления система с ОДНОЙ степенью свободы

удобно проводить с помощью **метода векторных диаграмм**

1. $$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Результирующее колебание:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Амплитуда

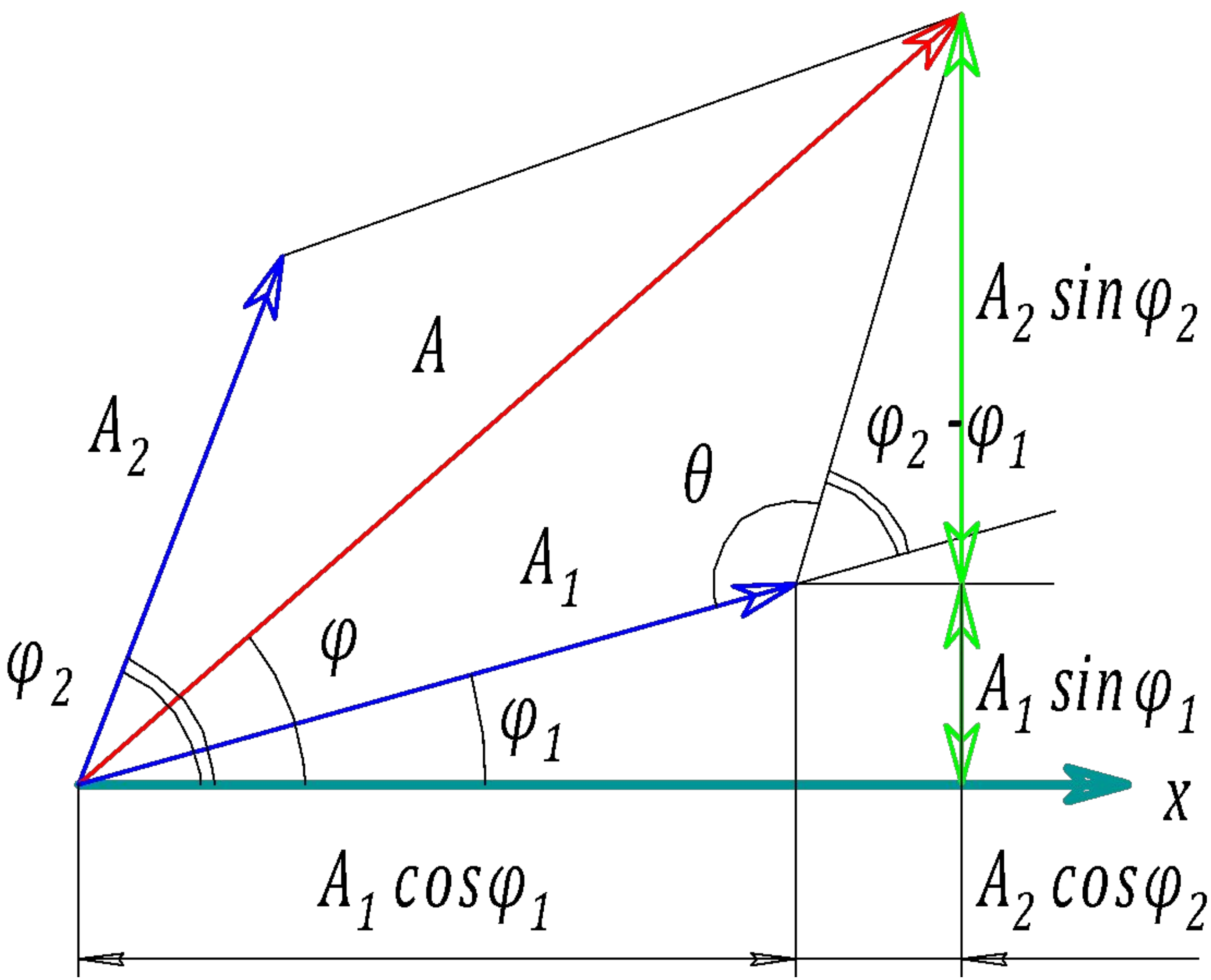
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \boxed{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

max: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$ при $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$

min: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$ при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

Начальная фаза

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



$A_2 \sin\varphi_2$
A
A_2
$\varphi_2 - \varphi_1$
θ
A_1
φ
φ_2
$A_1 \sin\varphi_1$
φ_1
x
$A_1 \cos\varphi_1$
$A_2 \cos\varphi_2$

Сложение колебаний в одной фазе

Колебания одинакового направления (коллинеарные)

1. $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Четное количество π

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \Rightarrow$$

Амплитуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$A = A_1 + A_2$ т.е. **Колебания усиливают друг друга**

Условие МАКСИМУМА

Сложение колебаний в противофазе

Колебания одинакового направления (коллинеарные)

2. $\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

НЕчетное количество π

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \Rightarrow$$

Амплитуда

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

$A = A_1 - A_2$ т.е. **Колебания ослабляют друг друга**

при $A_1 = A_2$ $A = 0$ **колебания «гасят» друг друга**

Условие МИНИМУМА

Сложение колебаний

Колебания одинакового направления (коллинеарные) (Система с ОДНОЙ степенью свободы)

3. Частоты складываемых колебаний мало отличаются

$$\omega_1 \approx \omega_2 \qquad A_1 = A_2$$

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

Результирующее колебание:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\frac{(2\omega + \Delta\omega)}{2}t$$

т.к. $\Delta\omega \ll \omega$ то $$x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$$

можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω, **амплитуда** которого медленно **изменяется по** некоторому **периодическому закону** (пульсирует)

биения

Частота биений

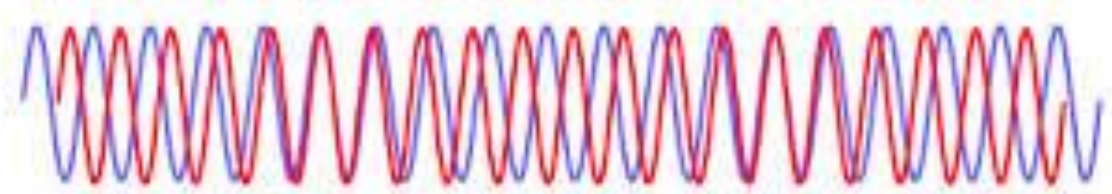
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

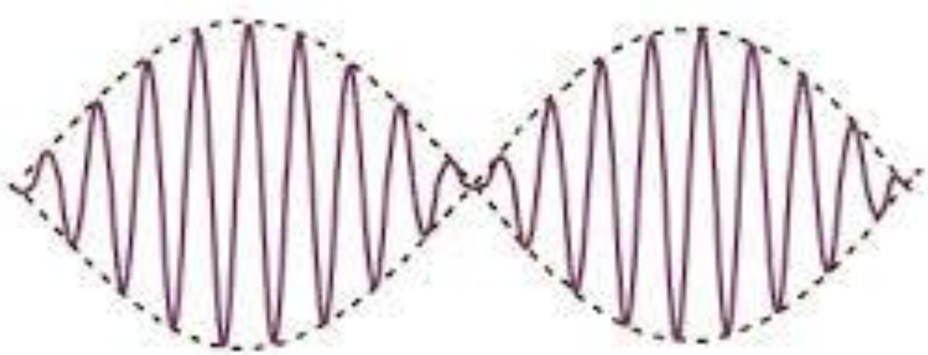
Биения

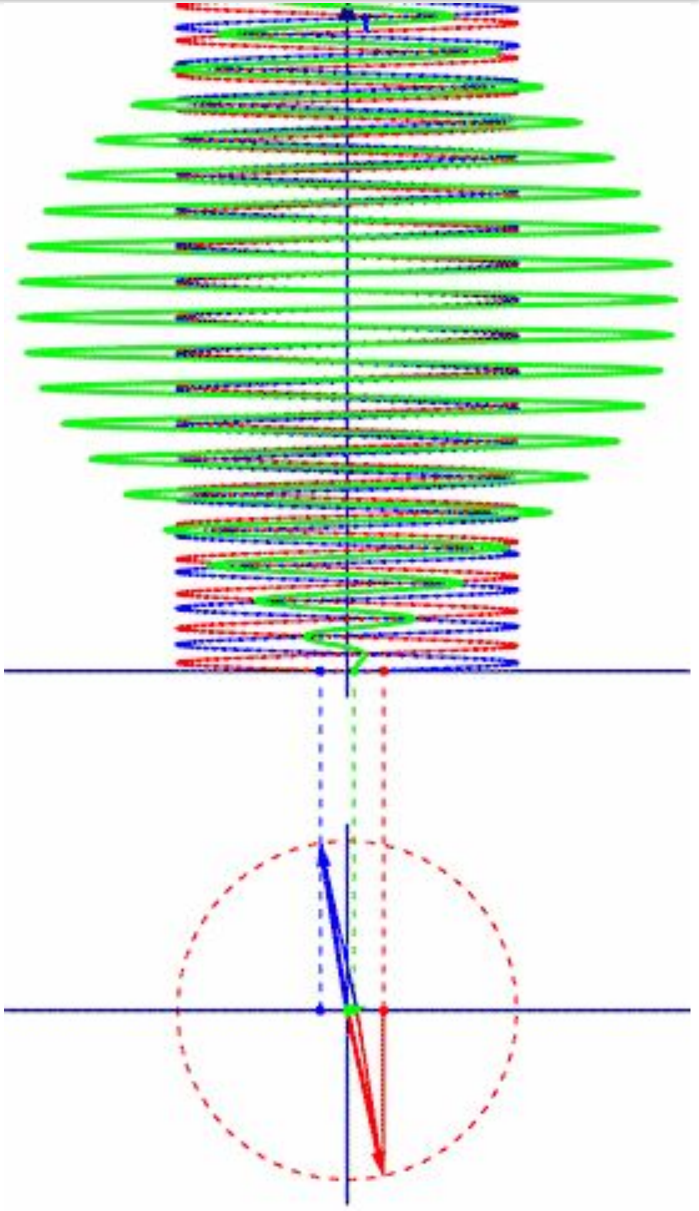
Биения явление, возникающее при наложении гармонических колебаний с близкими частотами, в результате которого возникает

гармоническое колебание частоты ω, **амплитуда** которого медленно **изменяется по** некоторому **периодическому закону** (пульсирует)

$$x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$$







Биения

Результирующее колебание

$$x \approx \boxed{2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}} \cdot \cos\omega t$$

Переменная амплитуда

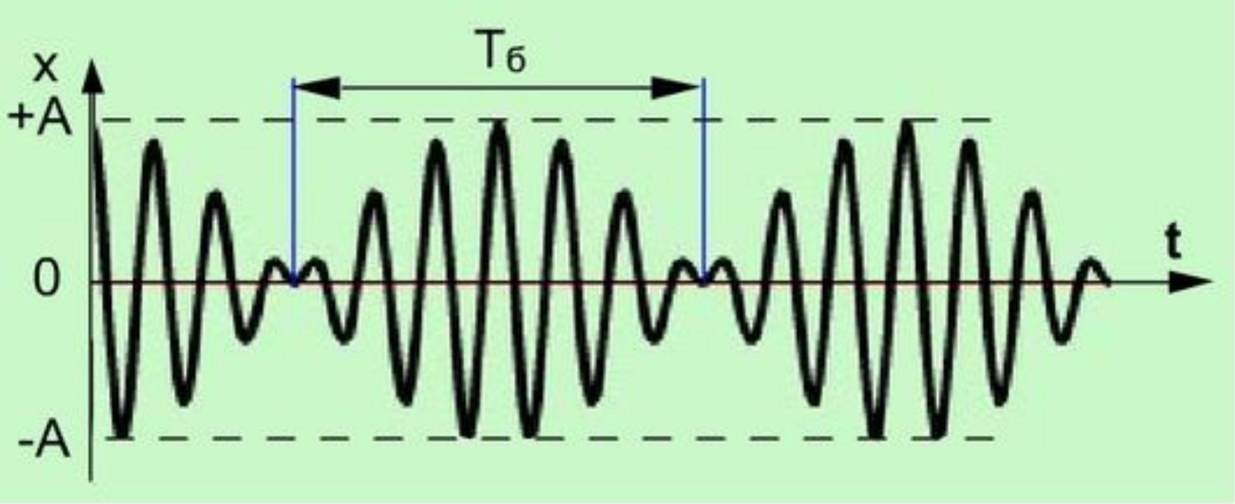
$$A(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

Период биений

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Частота биений

$$\Delta\,\omega = \omega_1 - \omega_2$$

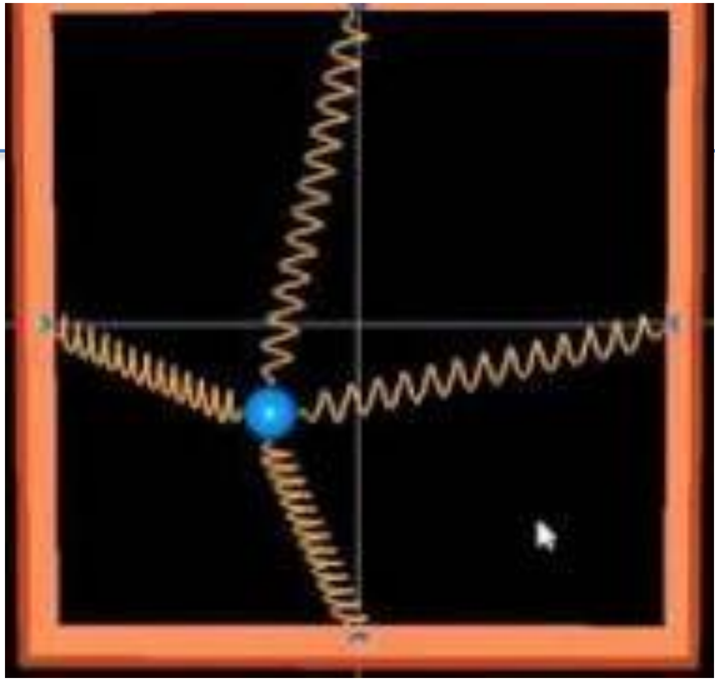


$OX \perp OY$

Сложение колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания (ортогональные)

Система с ДВУМЯ степенями свободы



- **Смещения малые** (выполняется закон Гука)

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi_2)$$

- **Частоты равны** $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ➡

Результирующее колебание:

$$\frac{x^2}{\boxed{A^2}} + \frac{y^2}{\boxed{B^2}} - 2\frac{xy}{\boxed{AB}}\cos\boxed{(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sin^2\boxed{(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

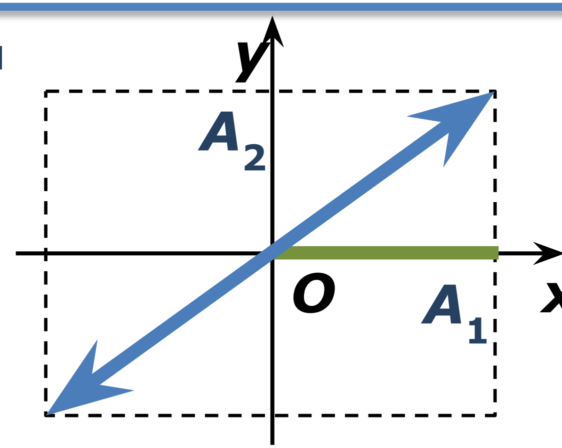
- в общем случае, точка будет совершать **периодические движения по эллиптической траектории**
- направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей зависят от разности фаз

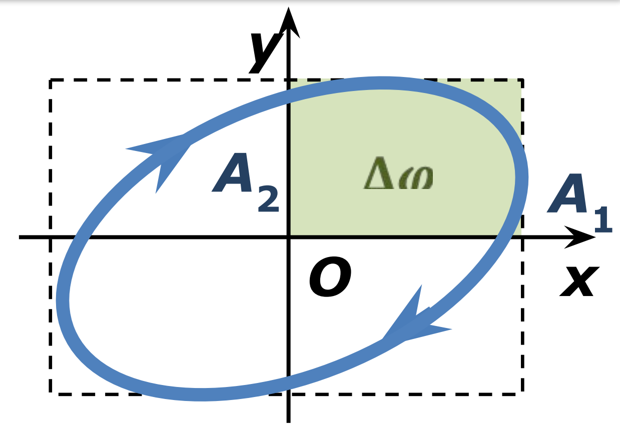
$OX \perp OY$

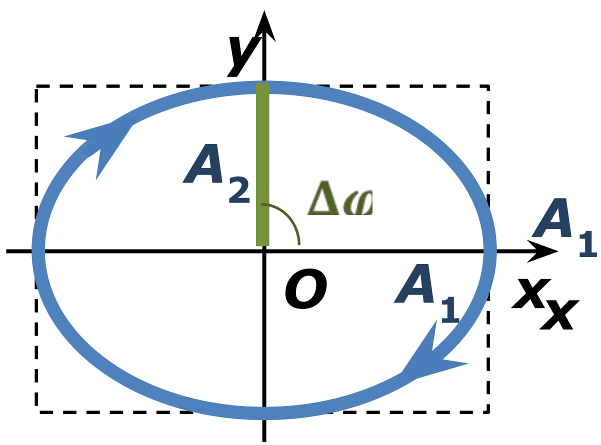
Сложение колебаний

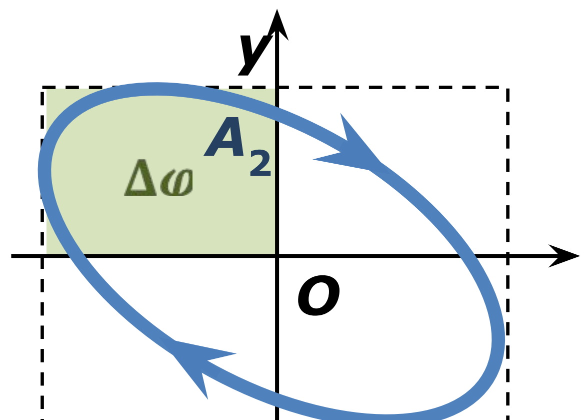
Итак, если складываются **взаимно перпендикулярные** колебания с раВными частотами

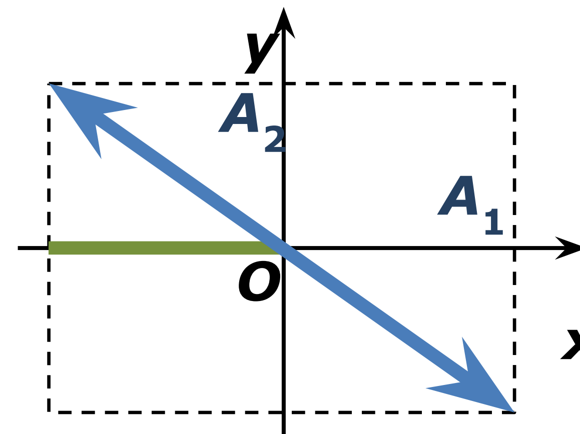
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

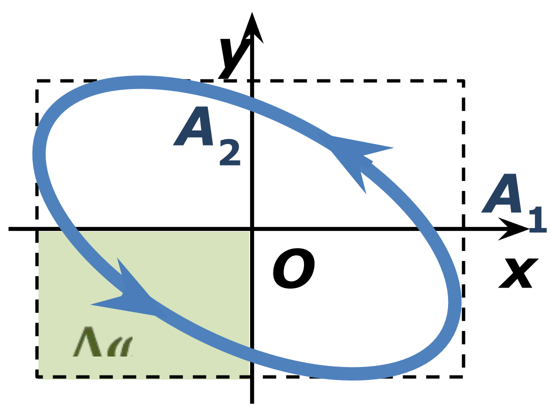


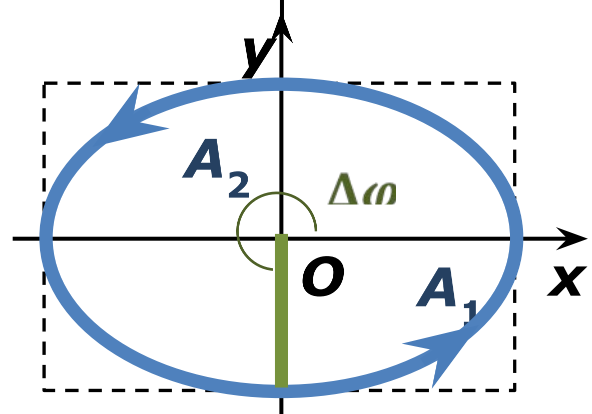


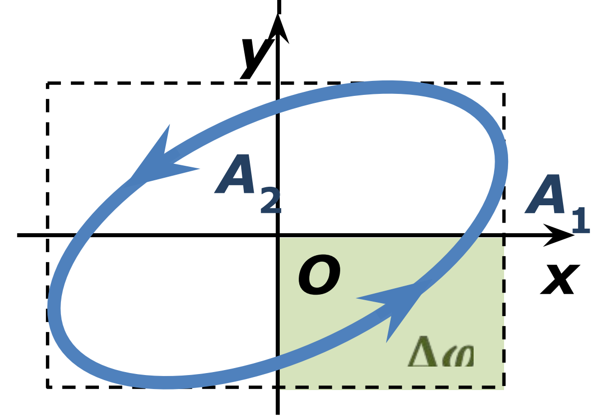










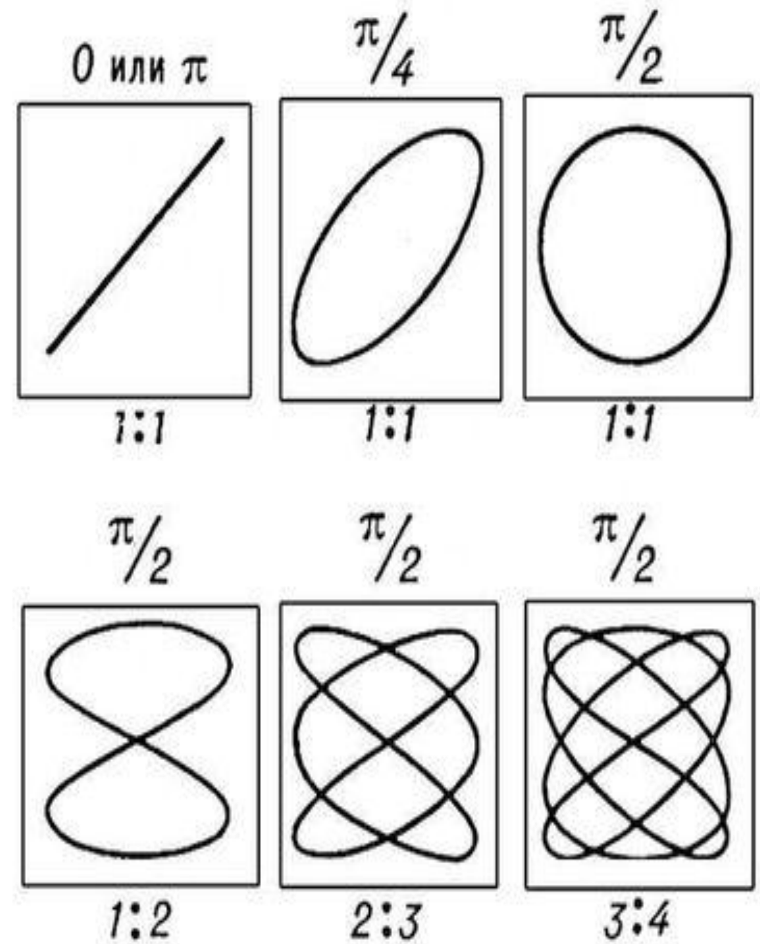


Сложение ортогональных колебаний.

Фигуры Лиссажу

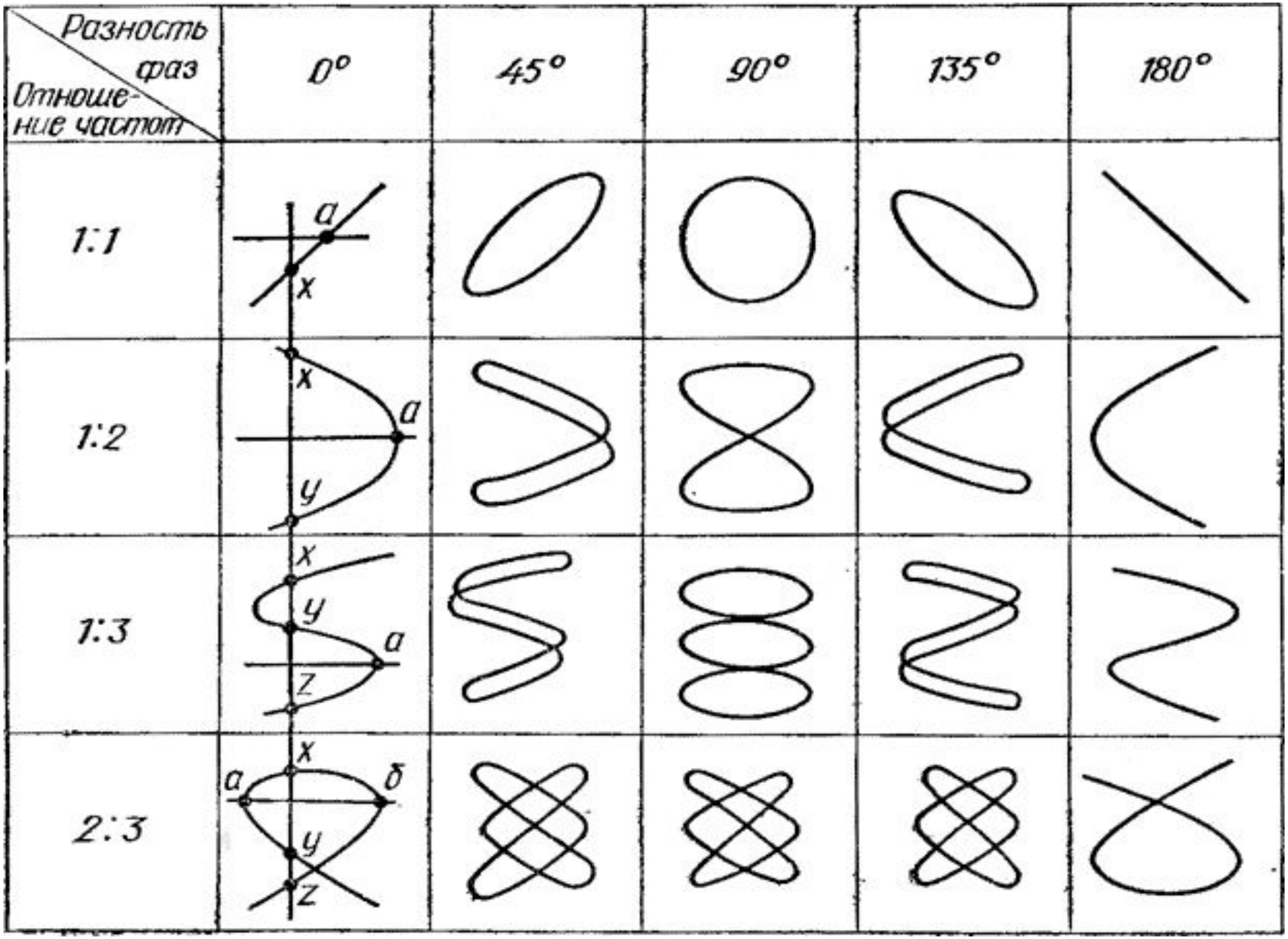
$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = sin^2\alpha$$



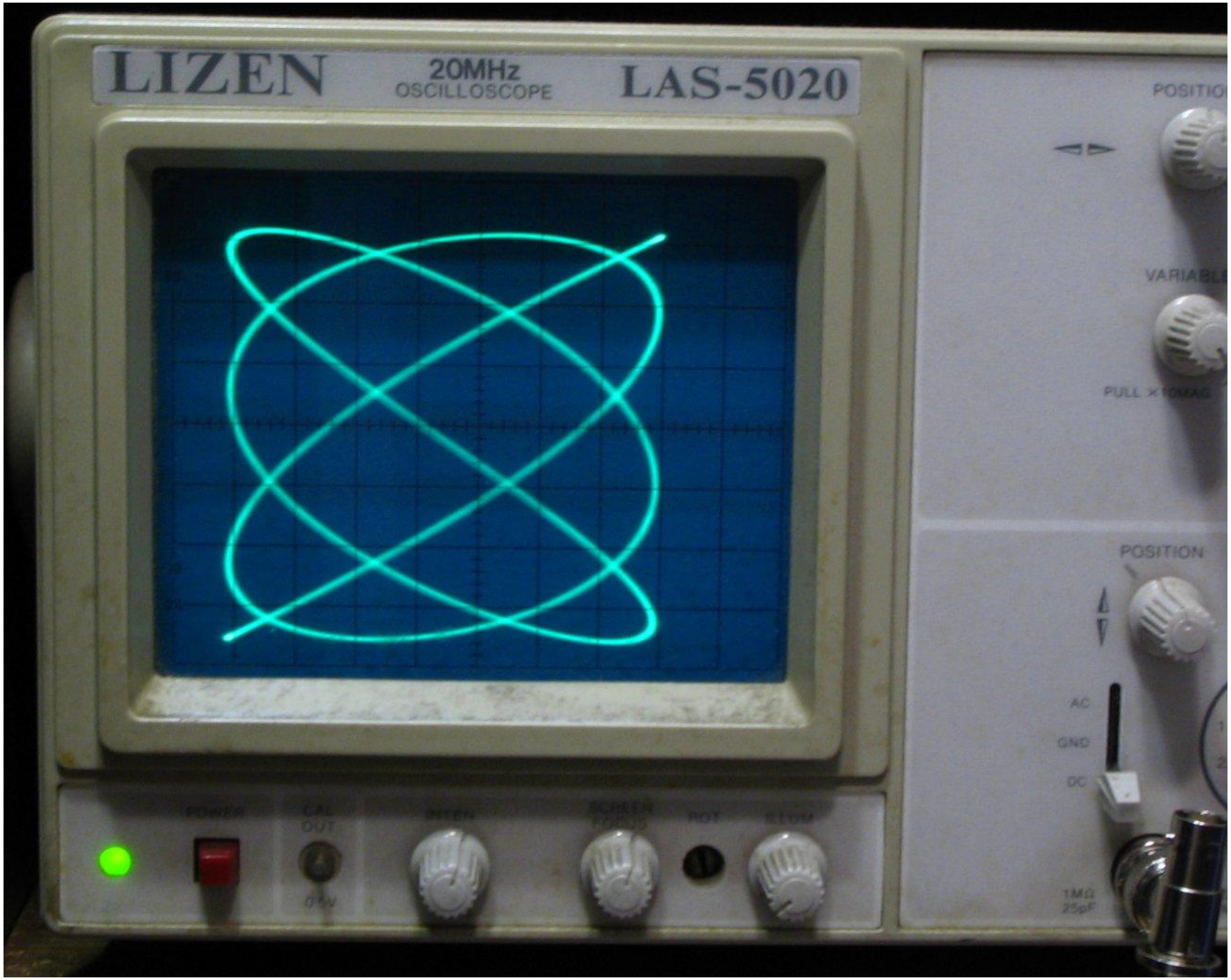
Сложение колебаний: Фигуры Лиссажу

$OX \perp OY$



отношение частот равно отношению
числа точек касания фигуры
сторон прямоугольника,
в который она списана

Если **частоты не кратны**, то траектории движения – **НЕзамкнутые кривые**



LIZEN
20MHz
OSCILLOSCOPE
LAS-5020
POSITION
VARIABLE
POSITION
AC
GND
DC
POWER
CAL
OUT
INTEN
ROT
ILLUM