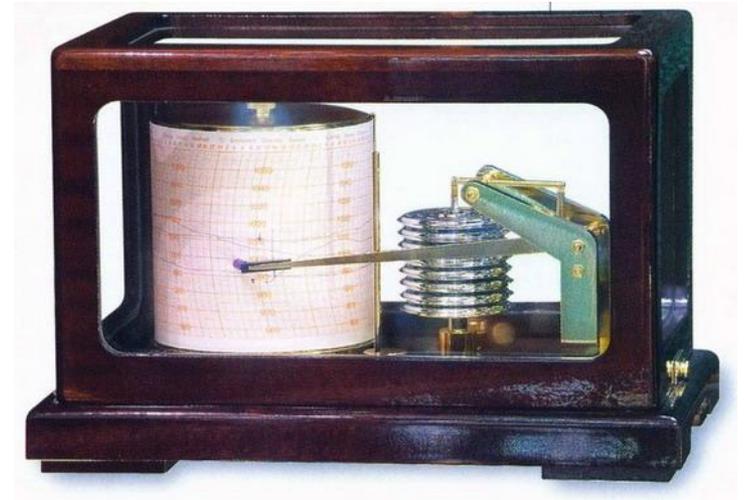
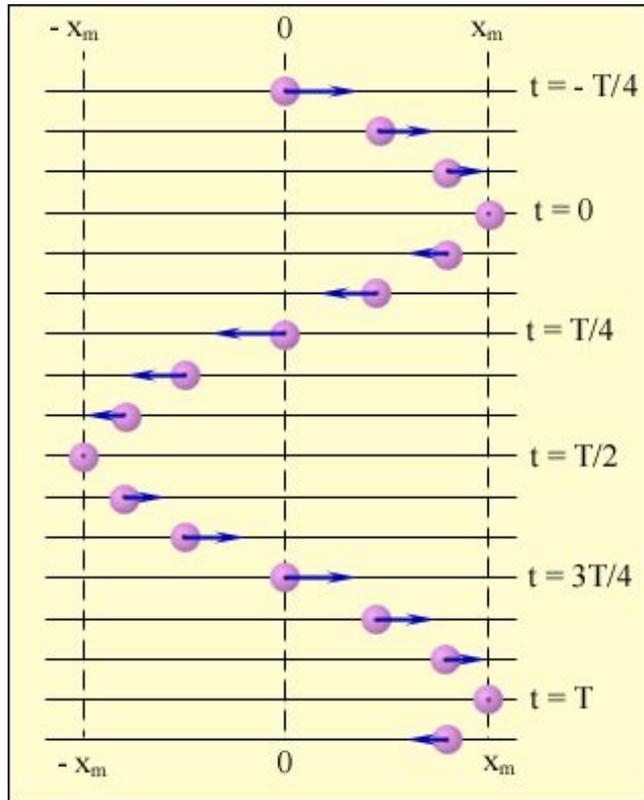


# Гармонические колебания



**Колебания** – это физические процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени.



# Колебания

**Колебание**

процесс изменения состояний системы, повторяющийся в той или иной степени

**Периодический процесс**

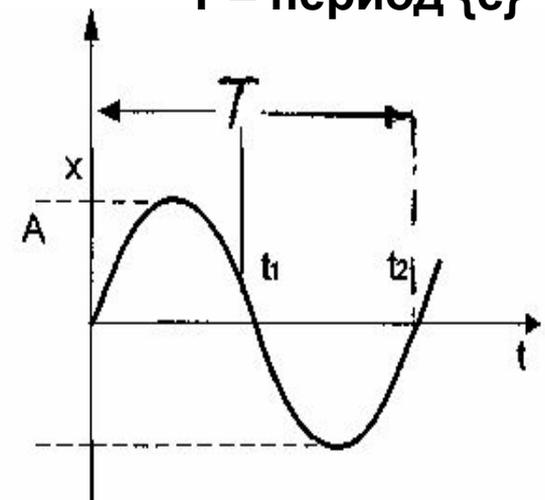
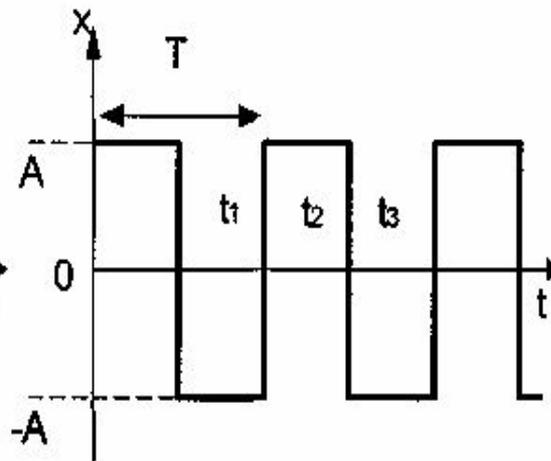
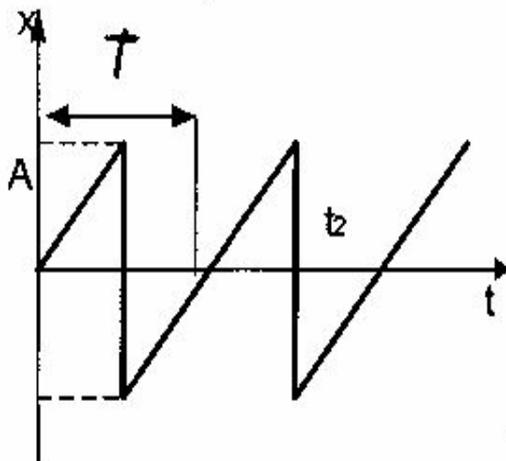
Если состояние системы или значение какой-либо физической величины повторяется через равные промежутки времени, то такие колебания называются периодическими.

закон движения тела, совершающего колебания

$$x(t) = x(t + nT)$$

Некоторая периодическая функция времени

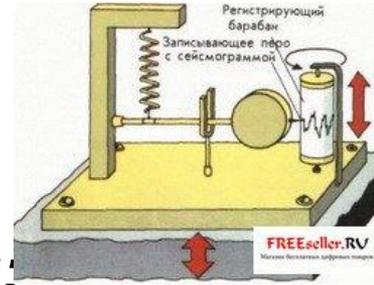
$T$  – период {с}



# Классификация колебаний по типу колеблющейся величины

- **1. Механические колебания:**

$X$ ,  $V$ ,  $a$ , угол  $\varphi$ ,



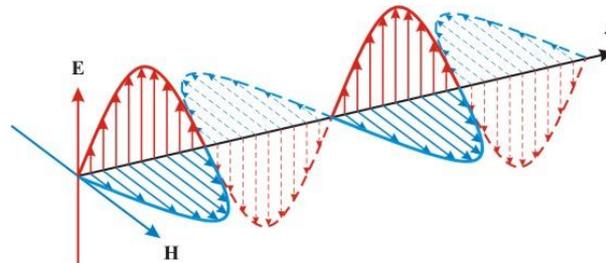
- **2. Электрические колебания:**

заряд  $q$ , сила тока  $I$ , напряжение  $U$ .



- **3. Электромагнитные колебания:**

$\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  (свет).



- **4. Упругие колебания:**

плотность  $\rho$ , давление  $P$ ,  
(звук).



# Классификация колебаний

По характеру воздействия на колеблющуюся систему



# Гармонический осциллятор

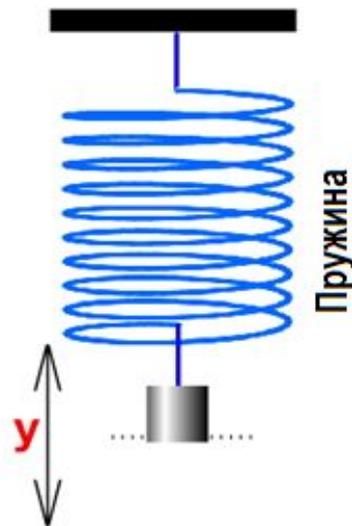
**Осциллятор**

**Колебательная система**

– это физическая система, совершающая колебания

**Примеры гармонического осциллятора:**

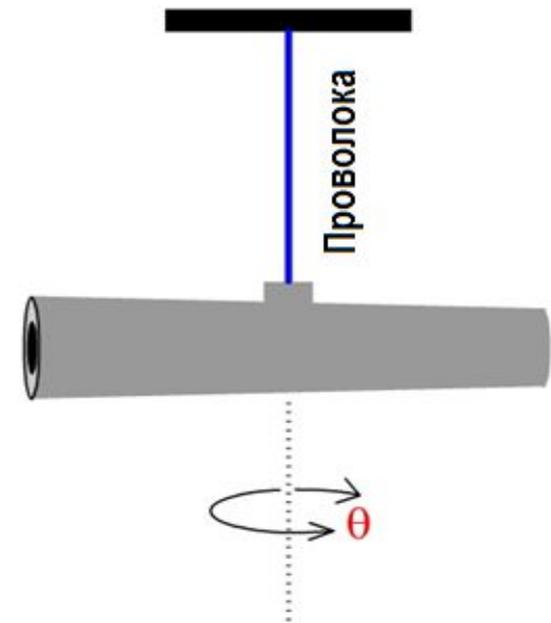
- пружинный маятник
- физический маятник
- математический маятник
- колебательный контур
- ...



Линейный осциллятор



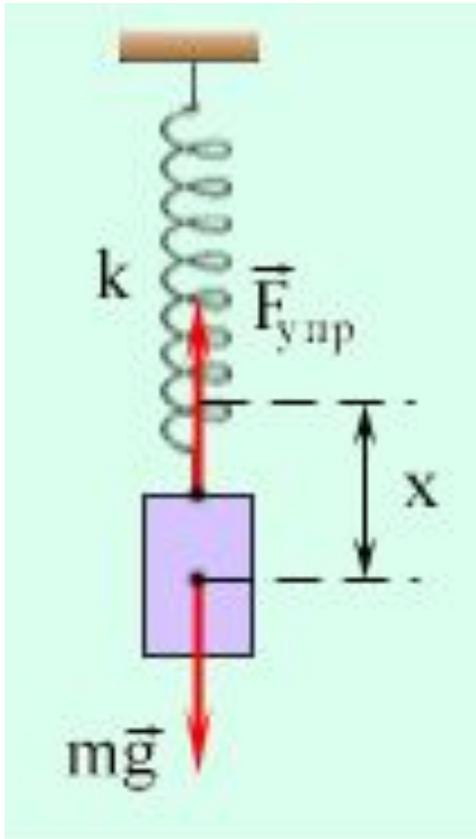
Смещение от положения равновесия



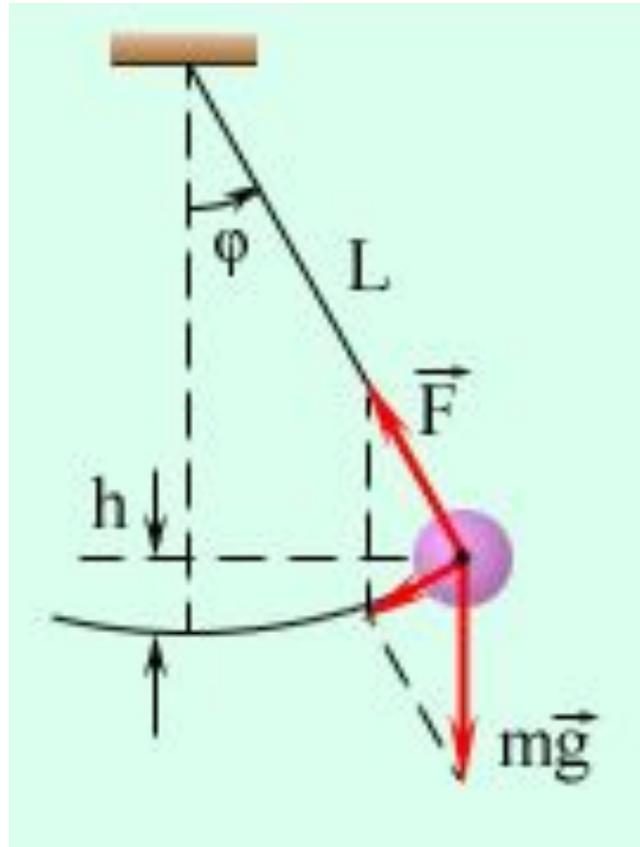
Вращающийся осциллятор

# Механические колебательные системы

## Примеры простых механических колебательных систем

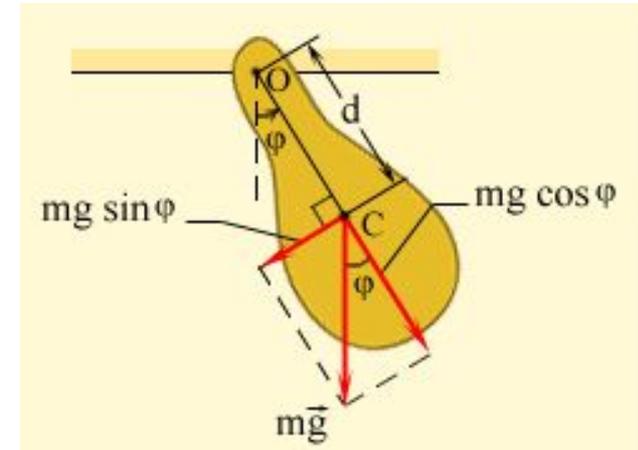


**Пружинный маятник – груз на пружине**



**Математический маятник – груз на невесомой нерастяжимой нити**

*идеализация*



**Физический маятник**

# Гармонические колебания

Колебания, совершающиеся по закону **sin** или **cos**



Гармоническое колебание определяется заданием трех постоянных:  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi_0$ , причем,

$A$ ,  $\varphi_0$  - определяются начальными условиями,

$\omega$  - определяется параметрами системы

# Характеристики колебательного движения

$x$  смещение тела от положения равновесия

$x_m, A$  Амплитуда колебаний максимальное смещение тела от положения равновесия

$\omega$  циклическая (круговая) частота колебаний

$t$  время колебаний

$\varphi = \omega t + \varphi_0$  фаза колебаний

$\varphi_0$  начальная фаза колебаний (при  $t=0$ )

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$T$  Период колебаний время, в течение которого происходит одно полное колебание фаза колебания получает приращение  $2\pi$

$$\omega T = 2\pi$$

$\nu, f$  Частота колебаний количество колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$[T]=c$

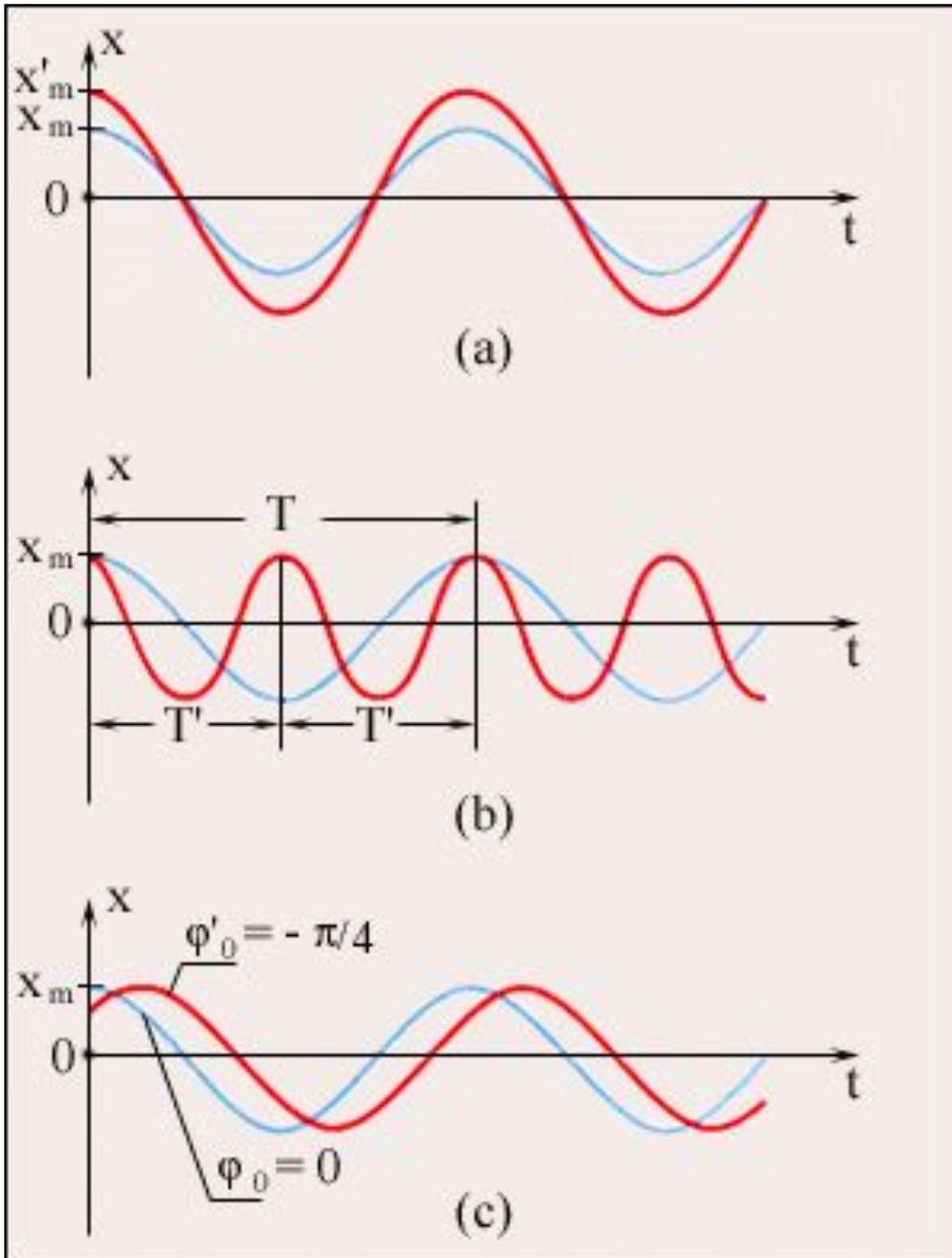
$[\nu]=c^{-1}=\text{Гц}$

**Графики отличаются:**

**амплитудой**

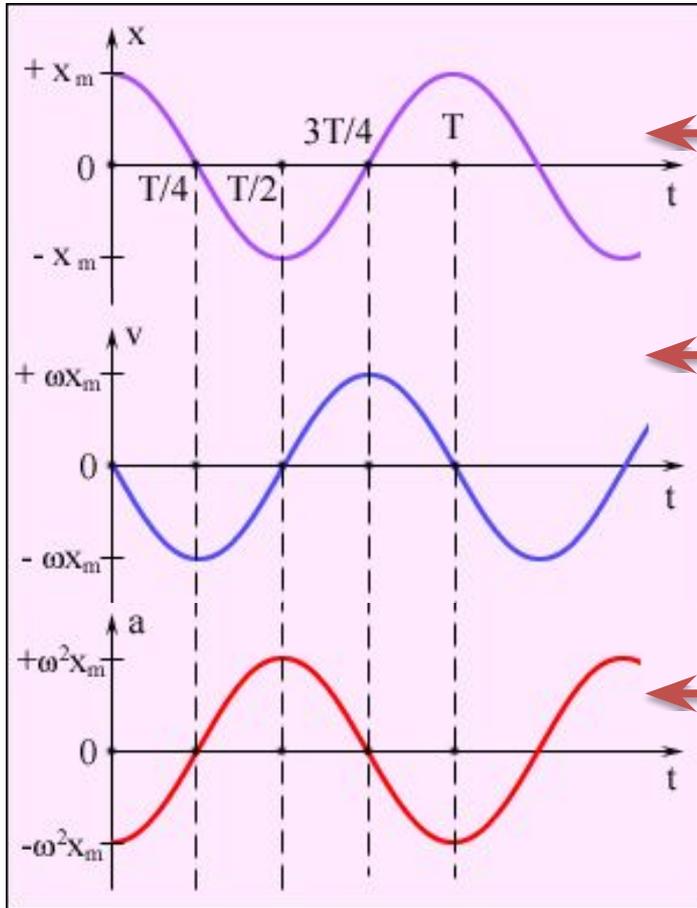
**периодом**

**начальной  
фазой**



# Графики гармонического колебания

## Графики при $\varphi_0 = 0$



для тела, совершающего гармонические колебания

← **координаты**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

← **скорости**  $v(t) =$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

← **ускорения**  $a(t) =$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

**Знак «-»:**

**ускорение**

**всегда имеет знак,  $\uparrow\downarrow$  знаку смещения  $x(t)$**



**сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, направлена всегда в сторону положения равновесия**

# Квазиупругие силы

Теорема: **Чтобы система совершала гармонические колебания необходимо и достаточно, чтобы единственная сила, действующая в ней была КВАЗИУПРУГАЯ**, т.е. сила

- стремящаяся вернуть тело в положение равновесия
- пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний
- направленная в сторону,  $\uparrow\downarrow$  смещению

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Таким свойством обладает **упругая сила в пределах применимости закона Гука**  $F_{упр} = -kx = -m\omega_0^2 x$

**Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию называют квазиупругими**

с другой стороны, по II з-ну Ньютона  $F = ma = -m\omega_0^2 x$   $a = -\omega_0^2 x$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$F = -m\omega_0^2 x = -kx = -kA \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

# Гармонические колебания

Общая черта всех колебаний:

при выведении системы из положения равновесия возникает возвращающая сила  $F$  (**квазиупругая**):

- стремящаяся возвратить тело в положение равновесия
- пропорциональная смещению тела из положения равновесия колебаний
- направленная в сторону,  $\uparrow\downarrow$  смещению

Если

возвращающая сила  
**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ**

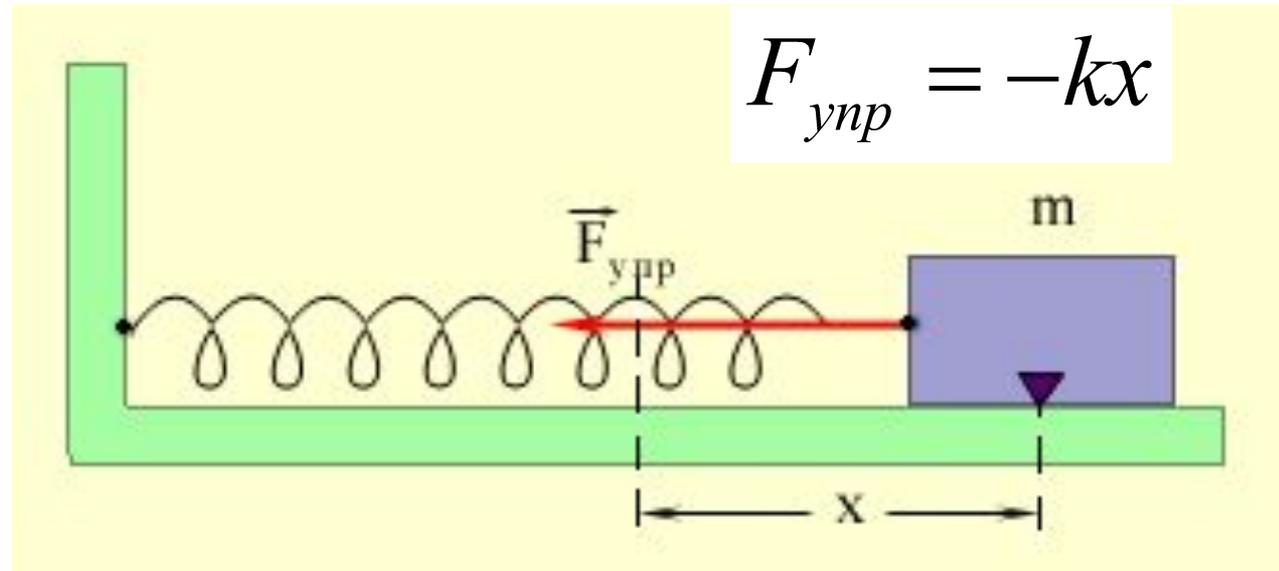
то

колебания  
**ГАРМОНИЧЕСКИЕ**

# Пружинный маятник

Груз массой  $m$ , прикрепленный к пружине жесткости  $k$

Колебания происходят под действием упругой силы



При горизонтальном расположении  
(груз скользит по поверхности)

$F_{тяж}$  компенсируется  
силой реакции опоры

При вертикальном  
расположении  
(груз висит на пружине)

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

$F_{тяж}$  направлена  
по линии движения груза

В положении равновесия  
пружина растянута на  $x_0$

# Пружинный маятник

Закон Гука  $F = -kx$

II з-н

Ньютона  $ma = -kx$

$$mx'' = -kx$$

$$mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

Дифференциальное уравнение:

$$\rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$$

где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Решение  
диф.уравн.

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Круговая частота  
колебаний  $\omega_0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период гармонических колебаний  
груза на пружине

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

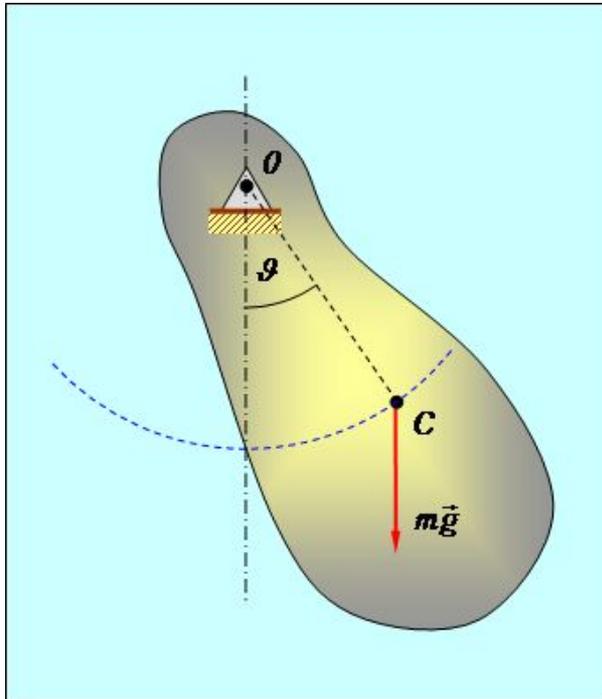
Потенциальная энергия

$$E_n = \frac{kx^2}{2}$$

# Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием  $F_{\text{тяж}}$  колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через т.О, НЕ совпадающую с центром масс С

Основной закон динамики вращательного движения:



$a = OC$  - расстояние от центра масс С до оси вращения О

$$M = J\varepsilon$$

направления  $\vec{F}_\tau$  и  $\vec{\varphi}$  всегда  $\uparrow\downarrow$

$$M = [l \times F_\tau] = -a \cdot mg \sin \theta$$

$M$  – момент возвращающей силы (силы тяжести)

$J$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса О

# Физический маятник

$$\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

Круговая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{J}}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg}{J} \sin \theta = 0$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg}}$$

для малых углов

$$\sin \theta \approx \theta$$

приведенная длина физического маятника

$$\ddot{\theta} + \frac{mg}{J} \theta = 0$$

длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$T_{\text{mat}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = T_{\text{физ}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg}}$$

$$L = \frac{J}{m}$$

# Математический маятник

Материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, колеблющаяся под действием  $F_{\text{тяж}}$

**Идеализированная система !**

В положении равновесия (маятник висит по отвесу), сила тяжести

$$\vec{F} = mg$$

уравновешивается силой натяжения нити

$$\vec{F}_{\text{упр}}$$

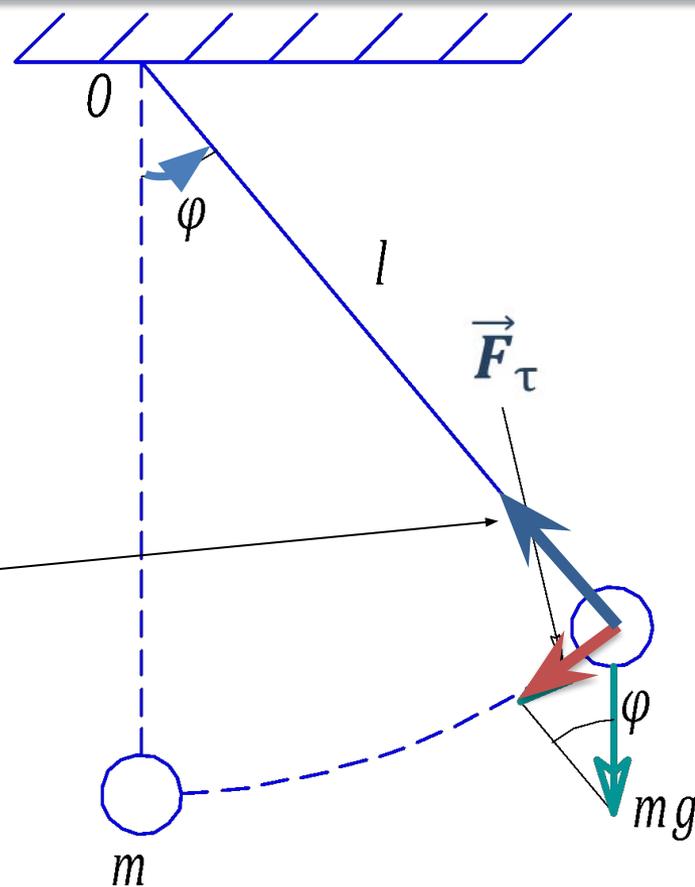
При отклонении маятника на  $\varphi$  появляется

касательная составляющая  $\vec{F}_{\tau}$

$$F_{\tau} = -mg \sin \varphi$$

Знак «-»:

направления  $\vec{F}_{\tau}$  и  $\vec{\varphi}$  всегда  $\uparrow\downarrow$



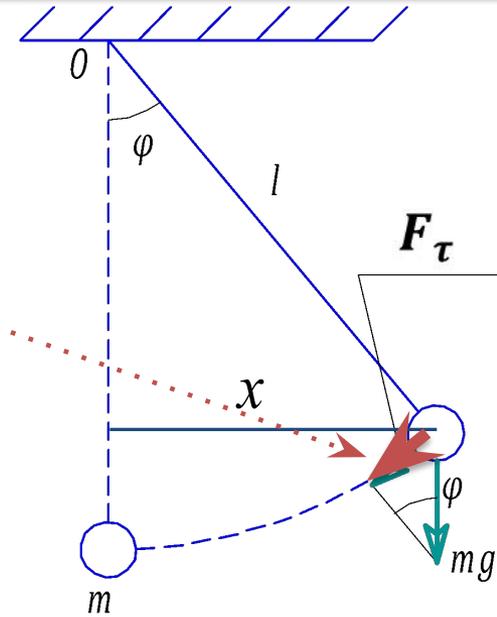
Линейное смещение маятника  $x$

Угловое смещение маятника  $\varphi$

# Математический маятник

По II закону  
Ньютона

$$ma = F_\tau = -mg \sin \varphi$$



при малых углах

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{l}$$

$$m\ddot{x} = -mg \frac{x}{l}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$$

Круговая  
частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период  
колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

**НЕ зависит от массы!**

**Дифференциальное  
уравнение** колебаний  
математического  
маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

# ЭМ колебательный контур

## II закон Кирхгофа

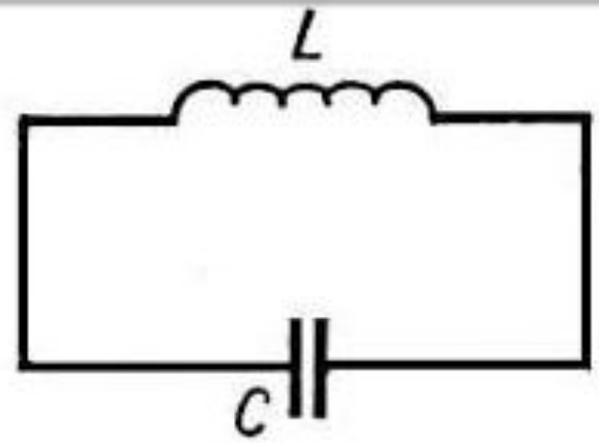
$$U_c = \mathcal{E}ДС_{\text{самоинд.}}$$

$$\frac{q}{C} = -L\dot{I} = -L\dot{q}$$

$$\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$



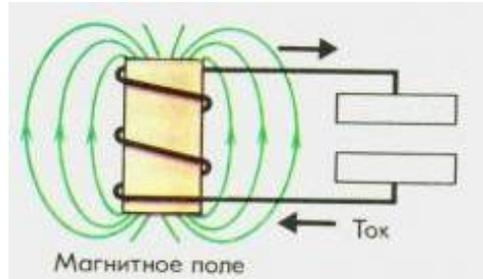
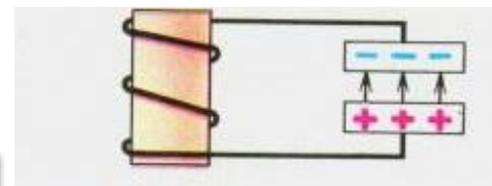
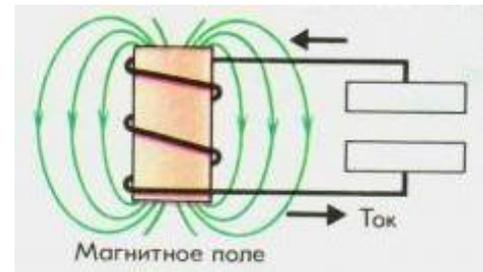
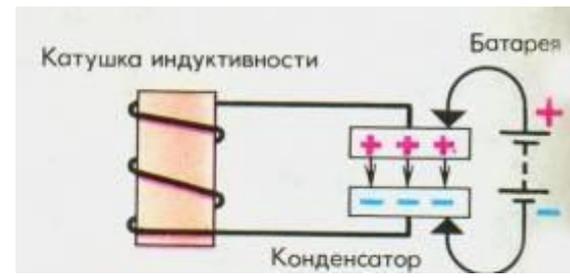
Круговая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

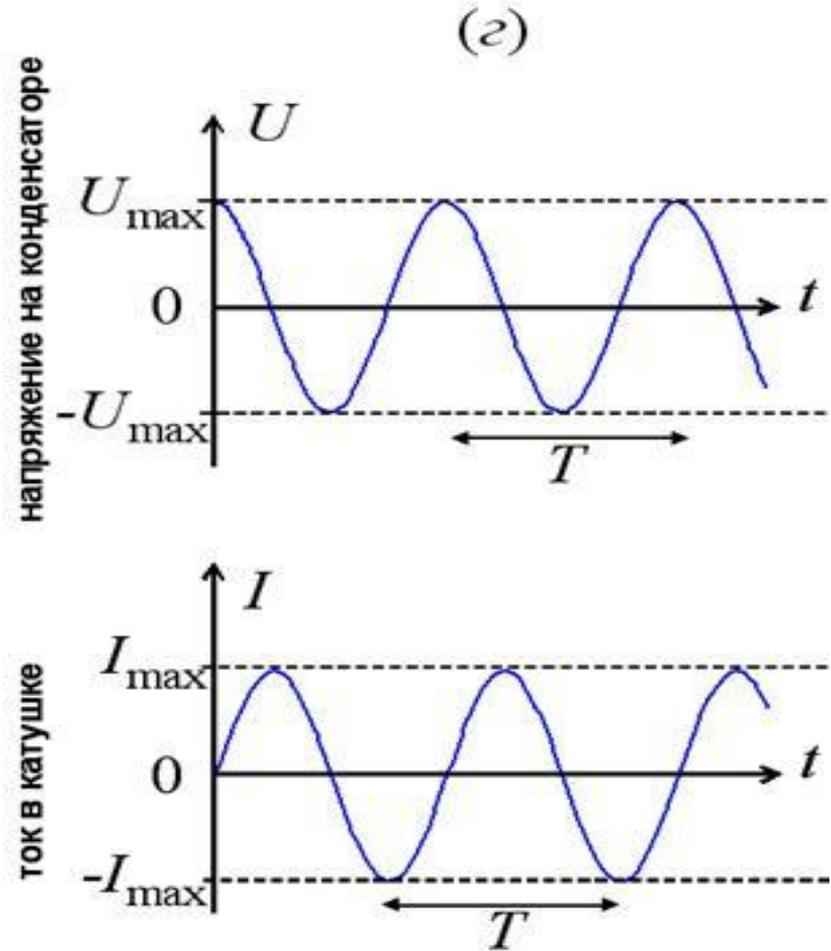
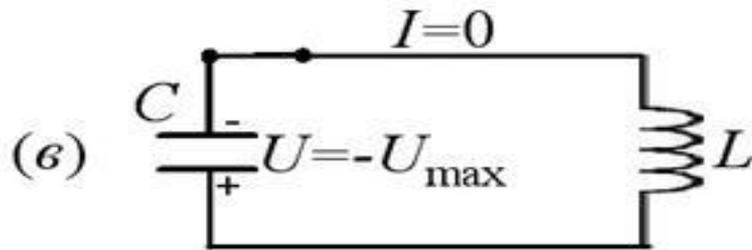
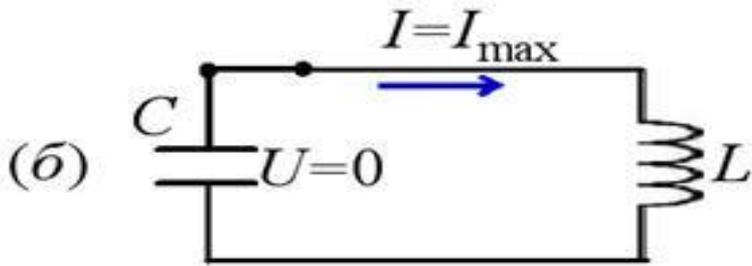
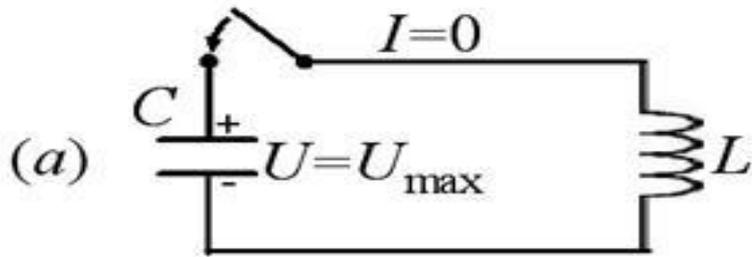
Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона, 1853 г.



# Электромагнитный колебательный контур



# ЗСЭ: ЭМ колебания

Колебания  
заряда

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания  
тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Колебания  
напряжения

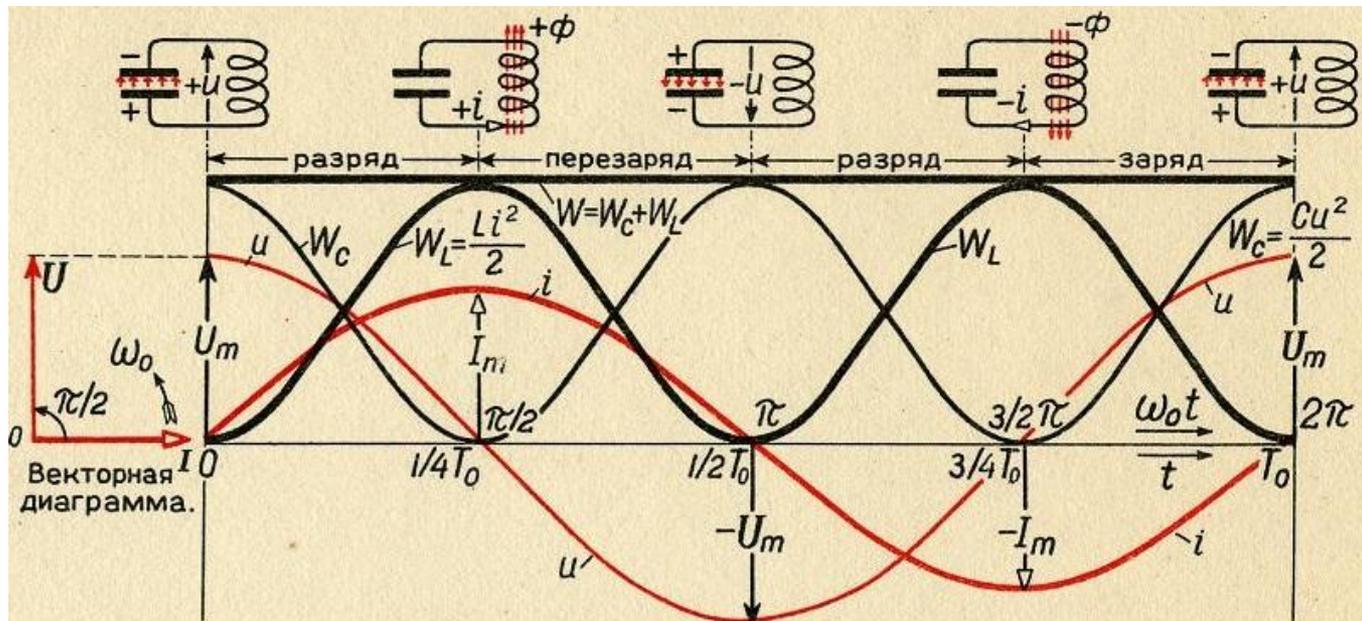
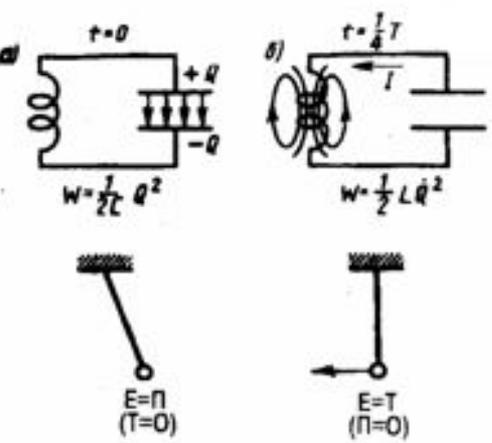
$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E = E_{\text{эл}} + E_{\text{магн}} = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$$

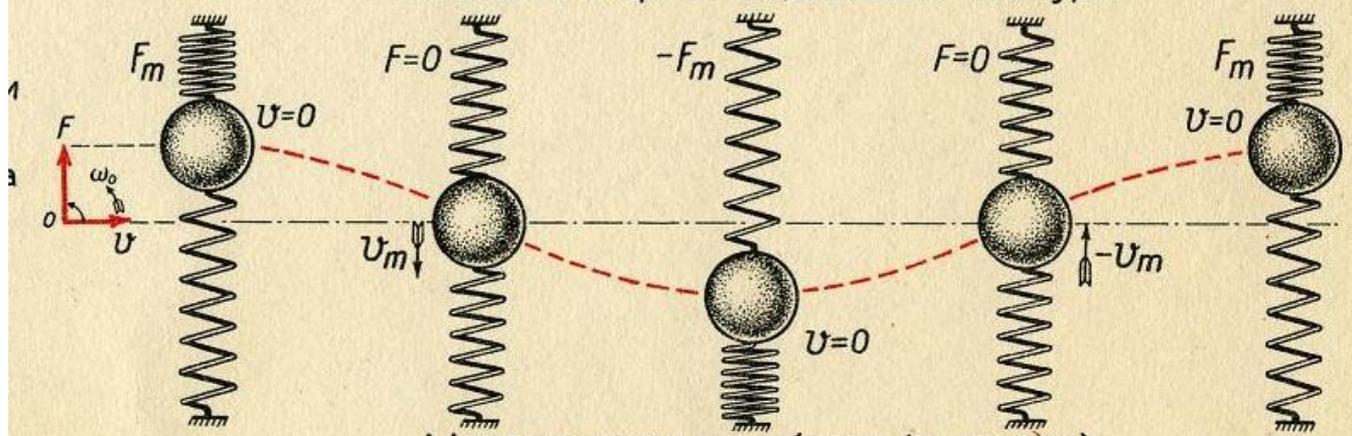
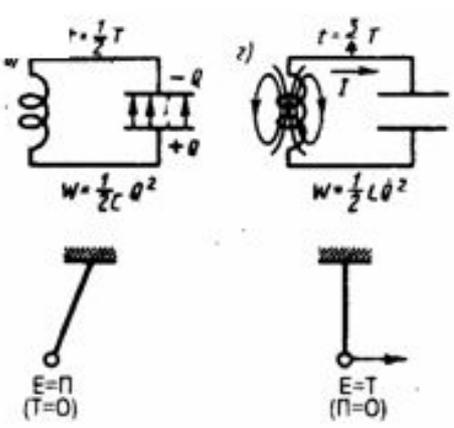
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E = \frac{q_{\max}^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{Lq_{\max}^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2} \Rightarrow \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{Lq_{\max}^2 \omega_0^2}{2}$$

# Аналогии гармонических колебаний



Колебание энергии в идеальном контуре.



Механические колебания (аналогия).

# Аналогия между механическими и электрическими колебаниями

Механические колебания

1.  $x, \varphi$  – смещение
2.  $V$  – линейная скорость
3.  $m$  – масса
4.  $k$  – коэффициент жесткости

Электрические колебания

1.  $q, U$  – заряд, напряжение
2.  $I$  – сила тока
3.  $L$  – индуктивность
4.  $1/C$ .

# Гармонический осциллятор

Итак, **дифференциальное уравнение гармонического осциллятора:**

Другие виды записи

$$\cancel{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

Решение  
этого  
уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

**Уравнение гармонических колебаний**

# Собственная частота колебаний

---

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

пружинный  
маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

математический  
маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

электромагнитный  
колебательный  
контур

- **Собственная частота колебаний**  
**НЕ** зависит от начальных условий,  
а определяется только  
внутренними свойствами  
осциллятора

# Энергия колебаний гармонического осциллятора

**Кинетическая  
энергия**

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

**Потенциальная  
энергия**

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$k = \omega_0^2 m$$

пружинный

**Закон сохранения энергии**

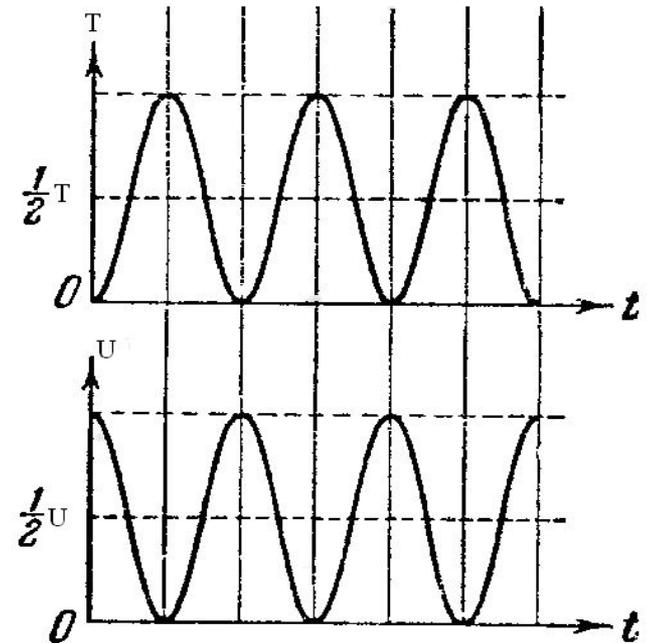
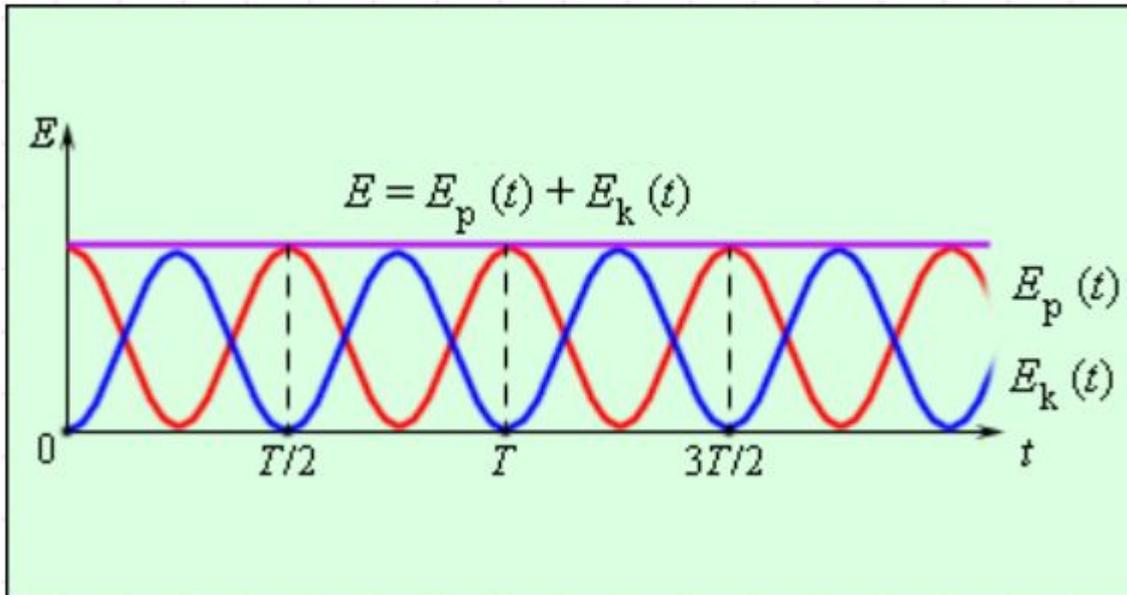
**Полная  
энергия**

$$E = E_k + E_n = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const}$$

# Энергия колебаний

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно.

В моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия  $E$  равна максимальной потенциальной, а при прохождении положения равновесия максимальной кинетической.

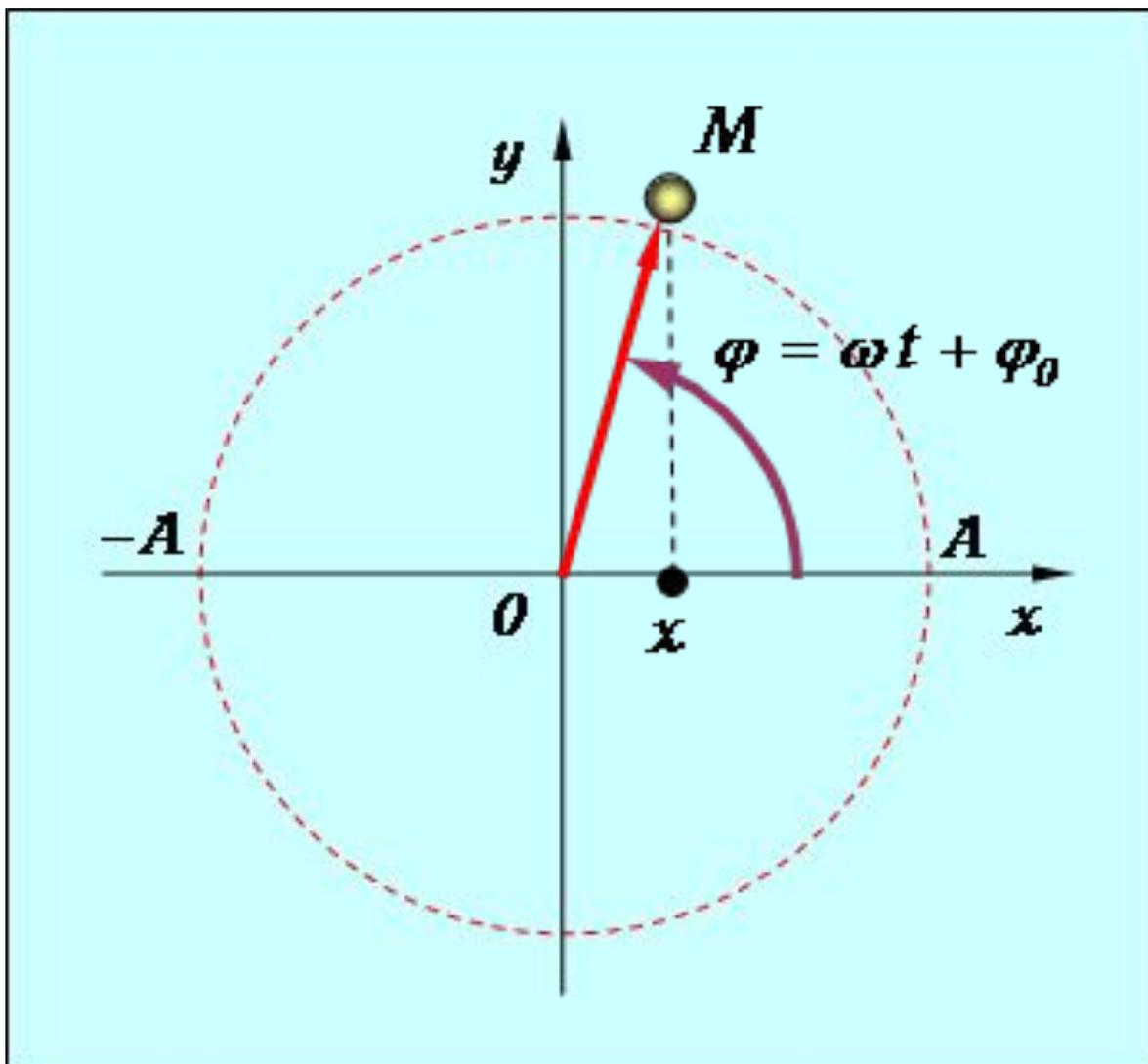


# Сложение колебаний

Еще одним методом изучения гармонических колебаний является метод векторных диаграмм.

1. Рисуем произвольную ось,
2. на ней выбираем начало отсчета,
3. затем рисуем вектор, длина которого равна амплитуде колебаний,
4. а его положение относительно выбранной оси задается углом, равным начальной фазе колебаний.
5. Циклическая частота колебаний равна угловой скорости вращения вектора амплитуды.

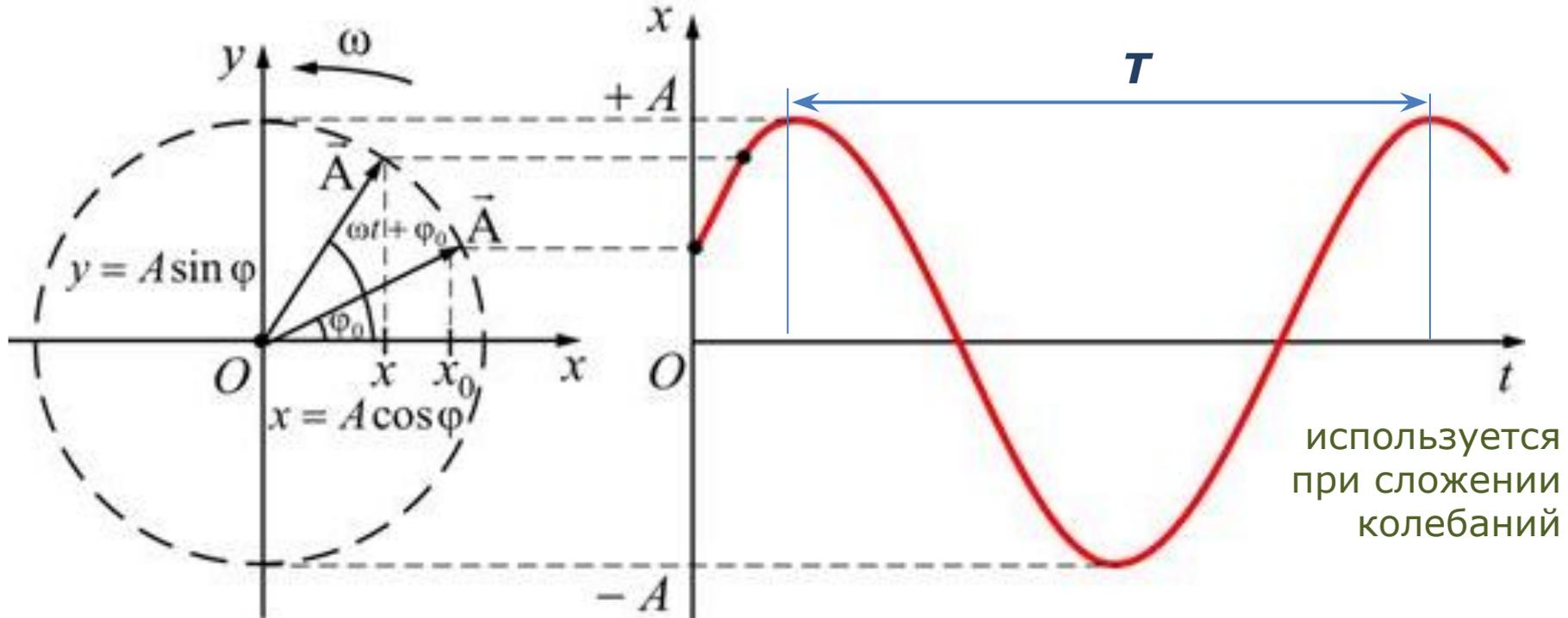
# Векторная диаграмма



# Связь вращательного движения с колебаниями

Пусть вектор длиной  $A$   
вращается с угловой скоростью  $\omega$

Метод  
векторных диаграмм



При  $t=0$  вектор образует угол  $\varphi_0$  с осью  $x$   
значения проекций на оси:

В произвольный момент времени:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{и} \quad y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

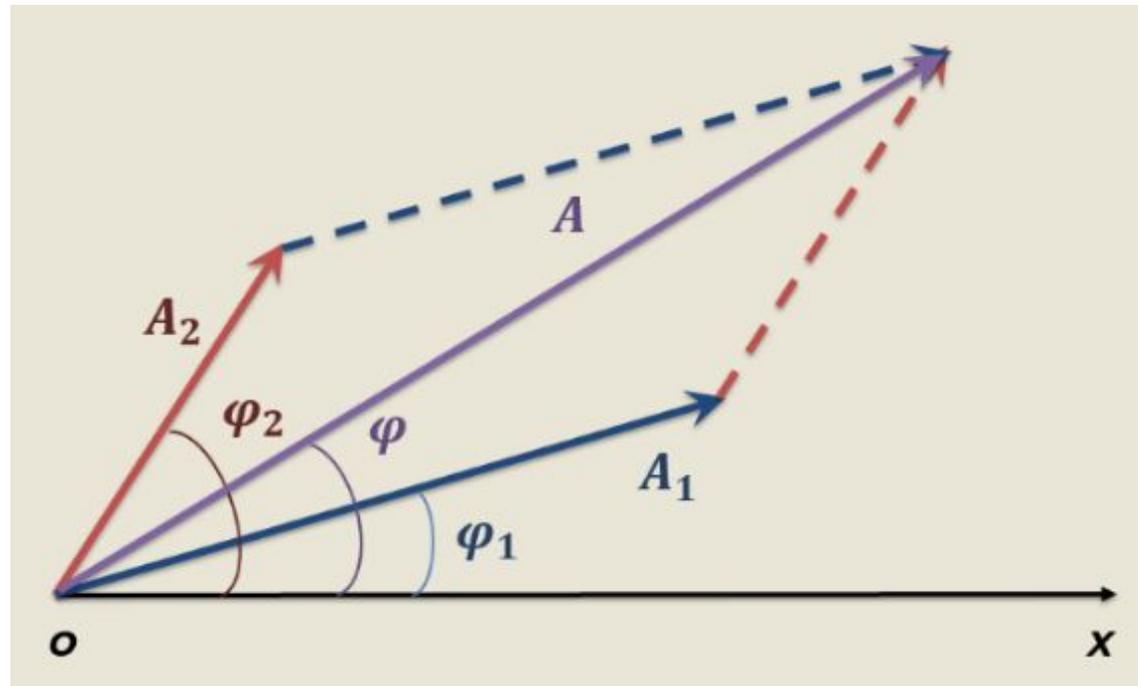
Сложение колебаний **одного**  
**направления** (коллинеарных) одинаковой  
частоты

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Результирующее колебание:

$$x_{рез} = A_{рез} \cos(\omega t + \varphi)$$



# Сложение колебаний

Сложение колебаний  
одинакового направления  
система с ОДНОЙ степенью свободы

удобно  
проводить  
с помощью

метода  
векторных  
диаграмм →

1.  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$   
 $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

Результирующее колебание:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

**Амплитуда**

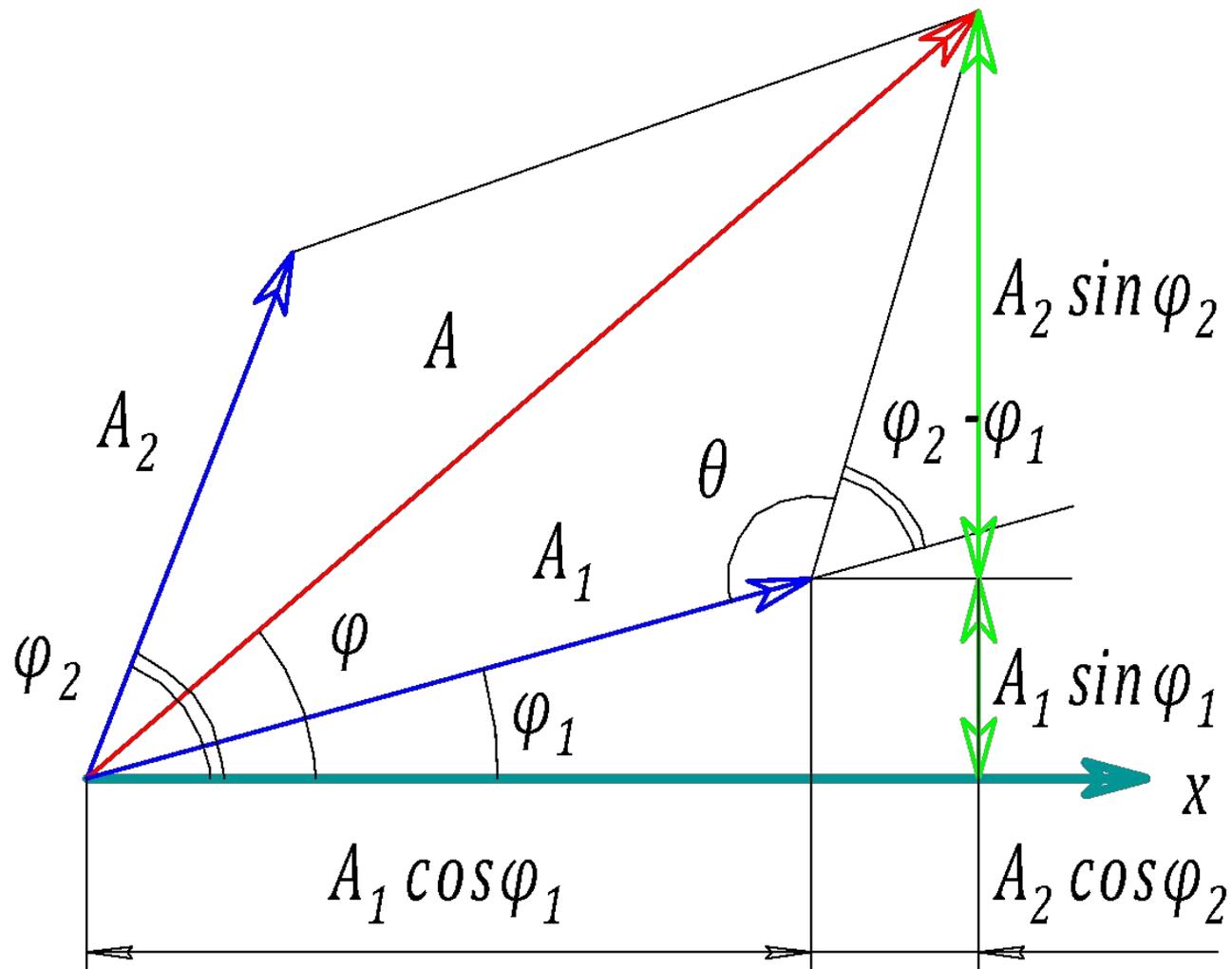
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

max:  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2$  при  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  →

min:  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$  при  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$  →

**Начальная фаза**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



# Сложение колебаний в одной фазе

← Колебания одинакового направления

(коллинеарные)

1.  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$   $n = 0, 1, 2, \dots$

Четное количество  $\pi$

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \Rightarrow$$

**Амплитуда**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$A = A_1 + A_2$  т.е. **Колебания усиливают друг друга**

**Условие МАКСИМУМА**

# Сложение колебаний в противофазе

← Колебания одинакового направления

(коллинеарные)

2.  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$   $n = 0, 1, 2, \dots$

Нечетное количество  $\pi$

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \Rightarrow$$

**Амплитуда**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2$$

$A = A_1 - A_2$  т.е. **Колебания ослабляют друг друга**

при  $A_1 = A_2$   $A = 0$  **колебания «гасят» друг друга**

**Условие МИНИМУМА**

# Сложение колебаний

Колебания **одинакового направления** (Система **коллинеарные**) с **ОДНОЙ** степенью свободы)

## 3. Частоты складываемых колебаний **мало отличаются**

$$\omega_1 \approx \omega_2 \quad A_1 = A_2$$

$$x_1 = A \cos \omega t$$

$$x_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega)t$$

Результирующее колебание:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \frac{(2\omega + \Delta\omega)}{2} t$$

т.к.  $\Delta\omega \ll \omega$  то

$$x \approx 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cdot \cos \omega t$$

можно рассматривать как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , **амплитуда** которого медленно **изменяется по** некоторому **периодическому закону** (пульсирует)

**биения**

**Частота биений**

$$\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$$

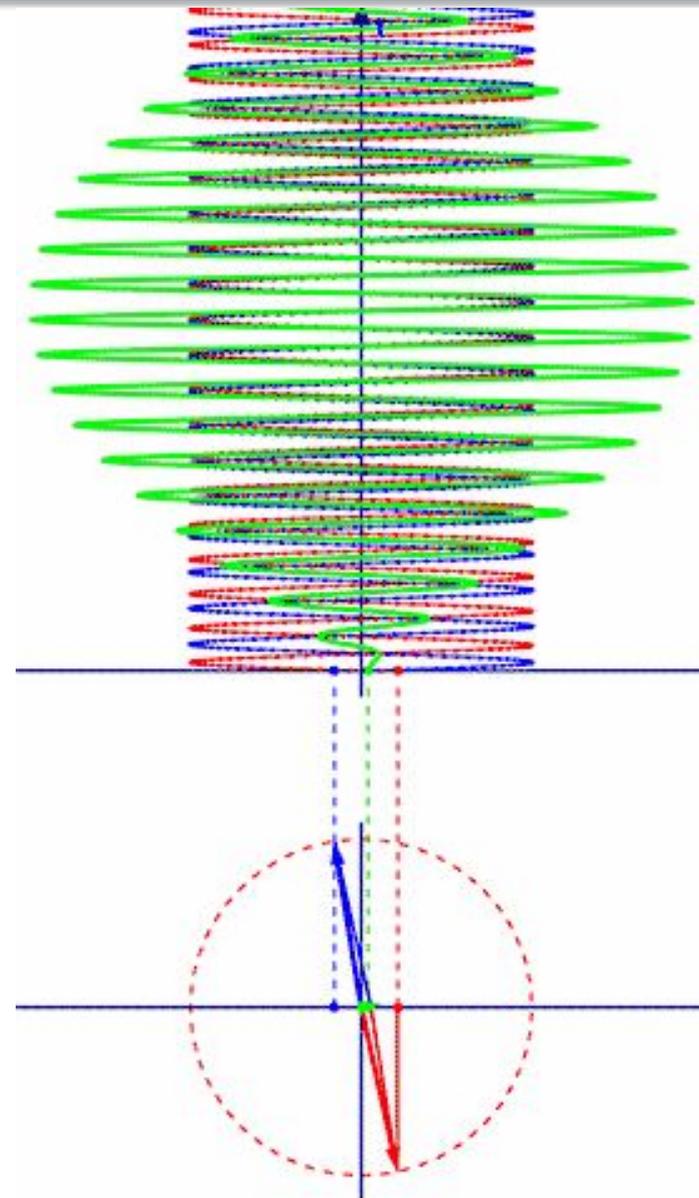
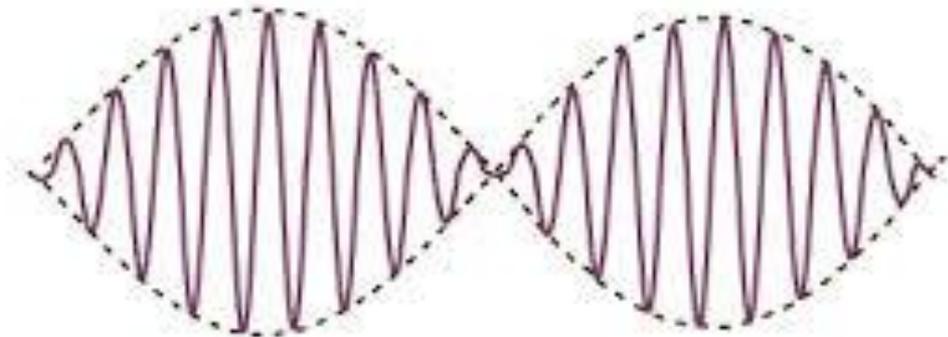
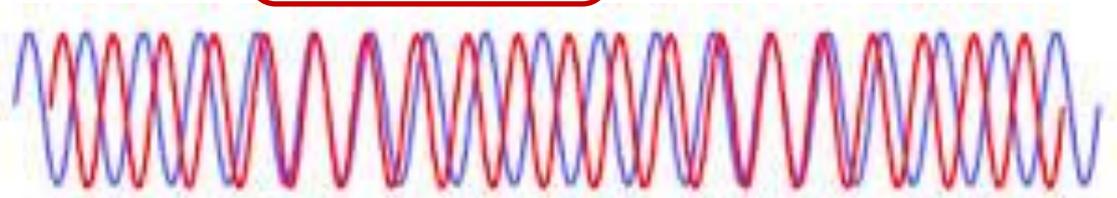
# Биения

## Биения

явление, возникающее при наложении гармонических колебаний с близкими частотами, в результате которого возникает

гармоническое колебание частоты  $\omega$ , **амплитуда** которого медленно **изменяется по некоторому периодическому закону** (пульсирует)

$$x \approx 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t$$



# Биения

Результирующее колебание

$$x \approx 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t$$

Переменная амплитуда

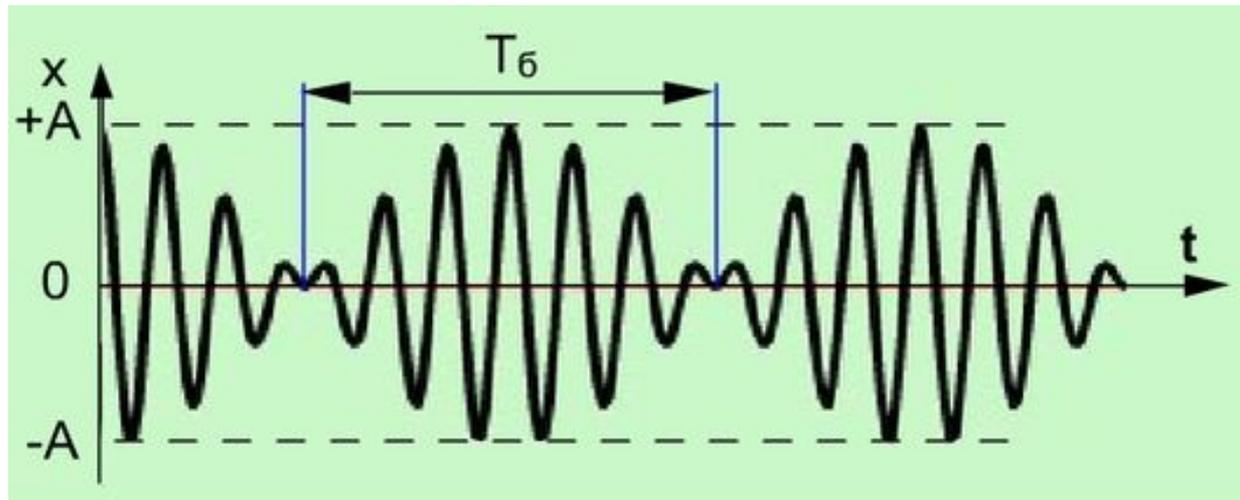
$$A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$$

Период биений

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Частота биений

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$



$Ox \perp Oy$

# Сложение колебаний

## Взаимно перпендикулярные колебания

(ортогональные)

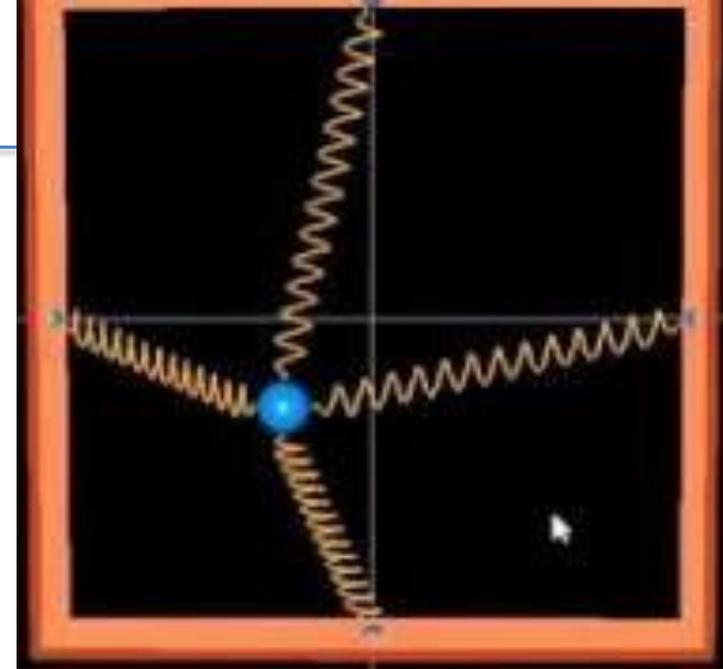
Система с ДВУМЯ степенями свободы

- **Смещения малые**  
(выполняется закон Гука)

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = B \cos(\omega t + \varphi_2)$$

- **Частоты равны**  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  ➔



Результирующее колебание:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

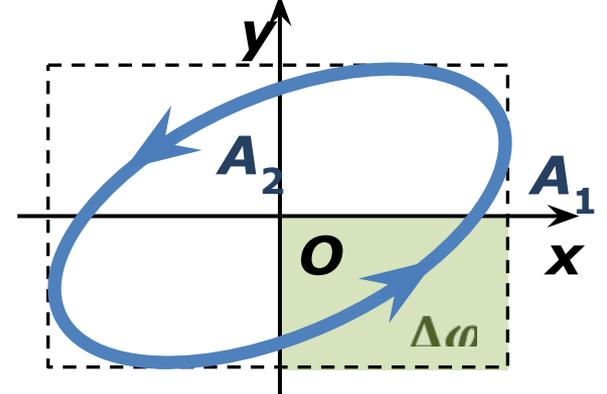
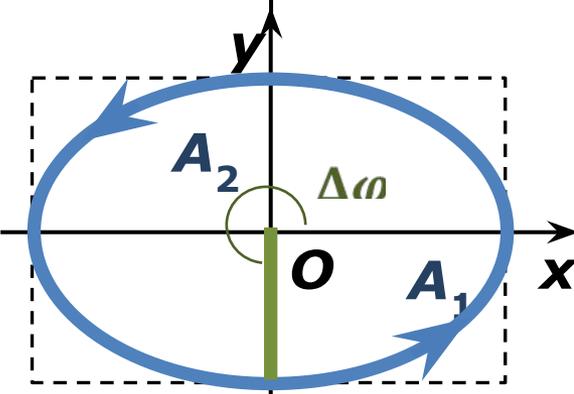
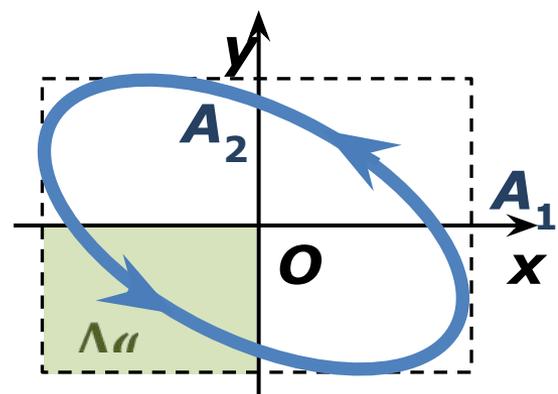
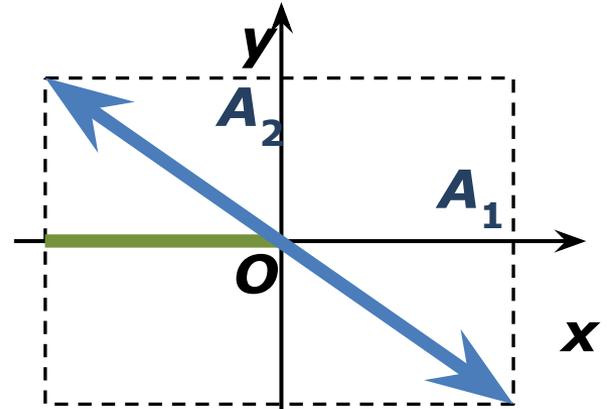
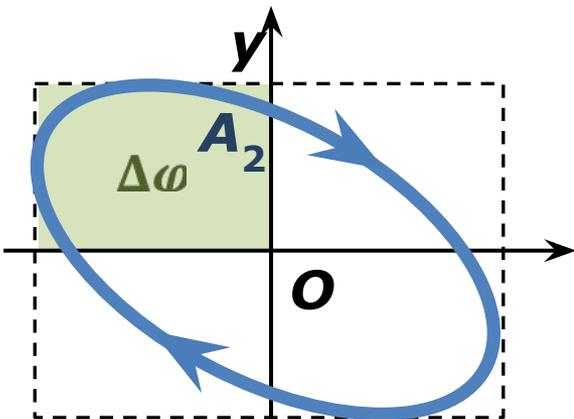
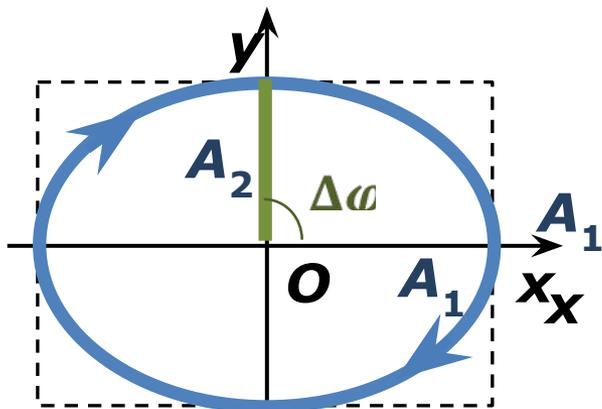
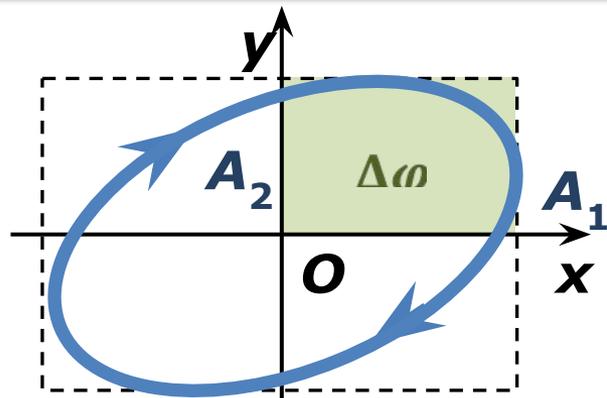
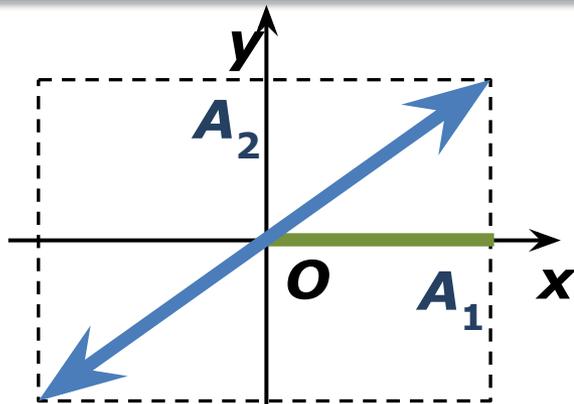
- в общем случае, точка будет совершать **периодические движения по эллиптической траектории**
- направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей зависят от разности фаз

$Ox \perp Oy$

# Сложение колебаний

Итак, если складываются  
**взаимно**  
**перпендикулярные**  
колебания с  
равными частотами

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

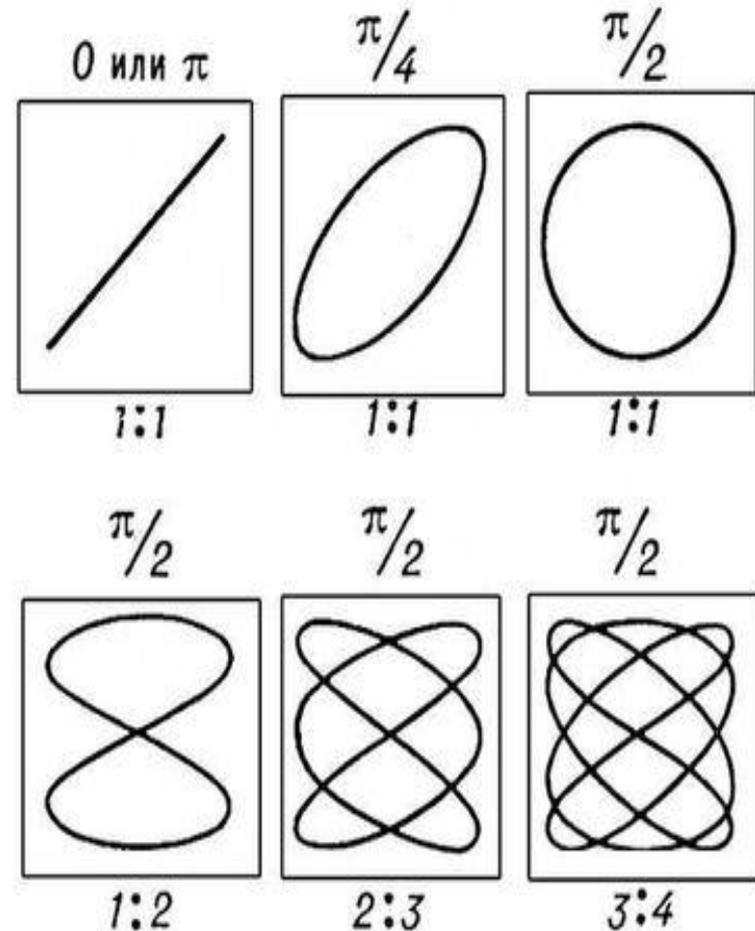


# Сложение ортогональных колебаний.

## Фигуры Лиссажу

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t \\ y &= B \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$$



# Сложение колебаний: Фигуры Лиссажу

$Ox \perp Oy$

отношение частот равно отношению  
числа точек касания фигуры  
сторон прямоугольника,  
в который она списана

Разность фаз Отноше- ние частот	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
1:1					
1:2					
1:3					
2:3					

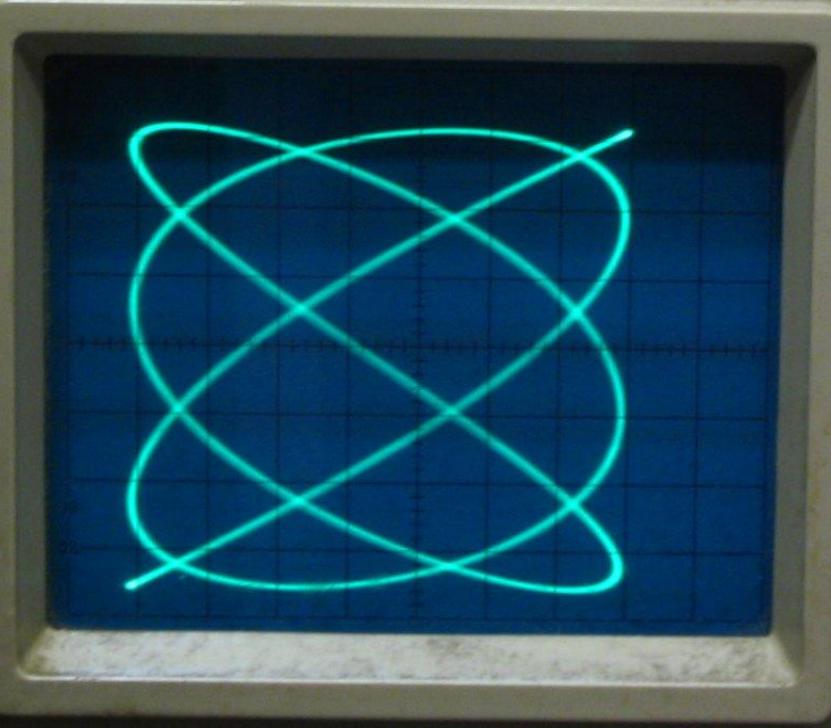
Если частоты не кратны, то

траектории движения –  
**Незамкнутые кривые**

LIZEN

20MHz  
OSCILLOSCOPE

LAS-5020



POSITION



VARIABLE



PULL X10MAG

POSITION



AC

GND

DC



1MΩ  
25pF



CAL  
OUT  
0.1V



NOT

