Кручение прямого бруса

Кручение – это вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений под действием крутящих моментов, действующих в этих сечениях.

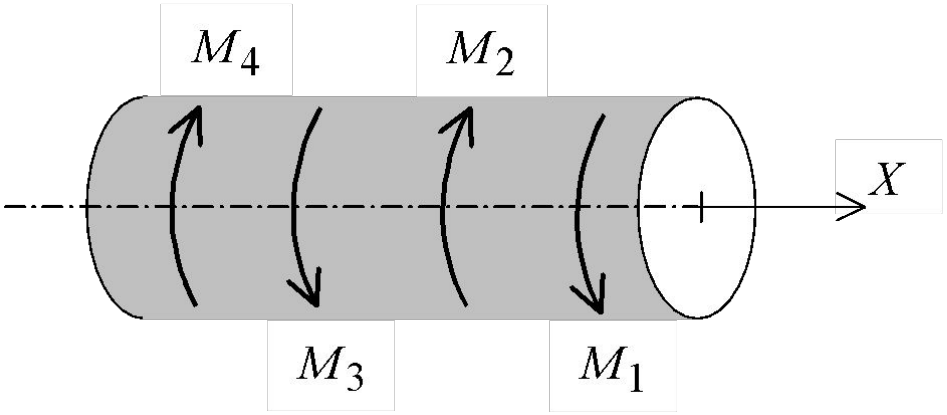
При кручении в поперечных сечениях возникают только внутренние крутящие моменты.

$$M_x \neq 0$$

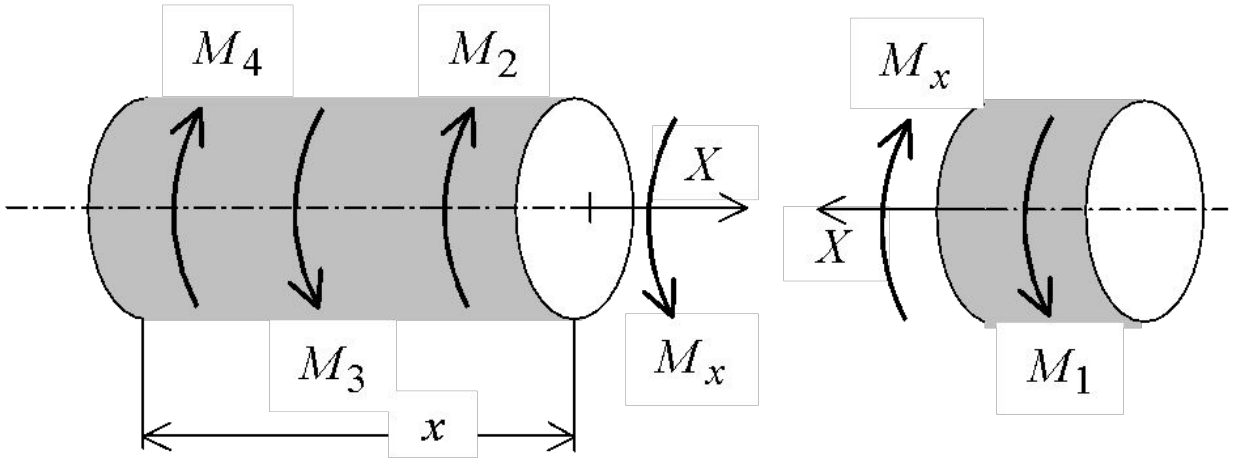
Остальные пять силовых факторов равны нулю.

Кручение круглого вала. Правило знаков

Рассмотрим вал, нагруженный системой внешних крутящих моментов и находящийся в равновесии.



Кручение. Метод сечений



Запишем условие равновесия левой части вала:

$$-M_4 + M_3 - M_2 + M_x = 0;$$
$$M_x = M_4 - M_3 + M_2 = M_1,$$

так как вал находится в равновесии, т.е.

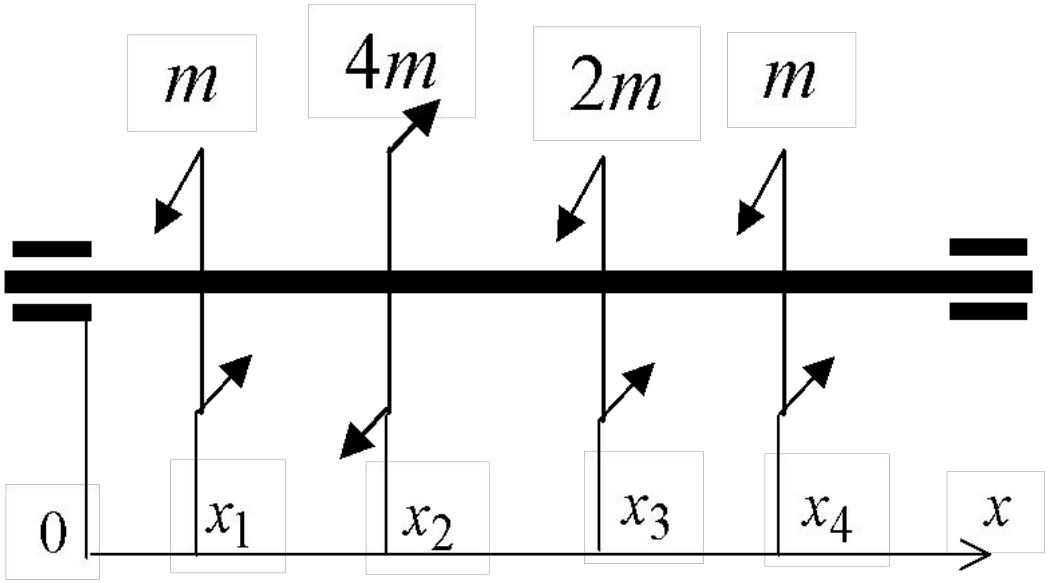
$$-M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = 0$$

Построение эпюр крутящих моментов

Практическое правило. Крутящий момент M_x в любом поперечном сечении вала равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, действующих с одной стороны от сечения, взятой с обратным знаком.

Рассмотрим вал, находящийся в равновесии:

$$m - 4m + 2m + m = 0$$



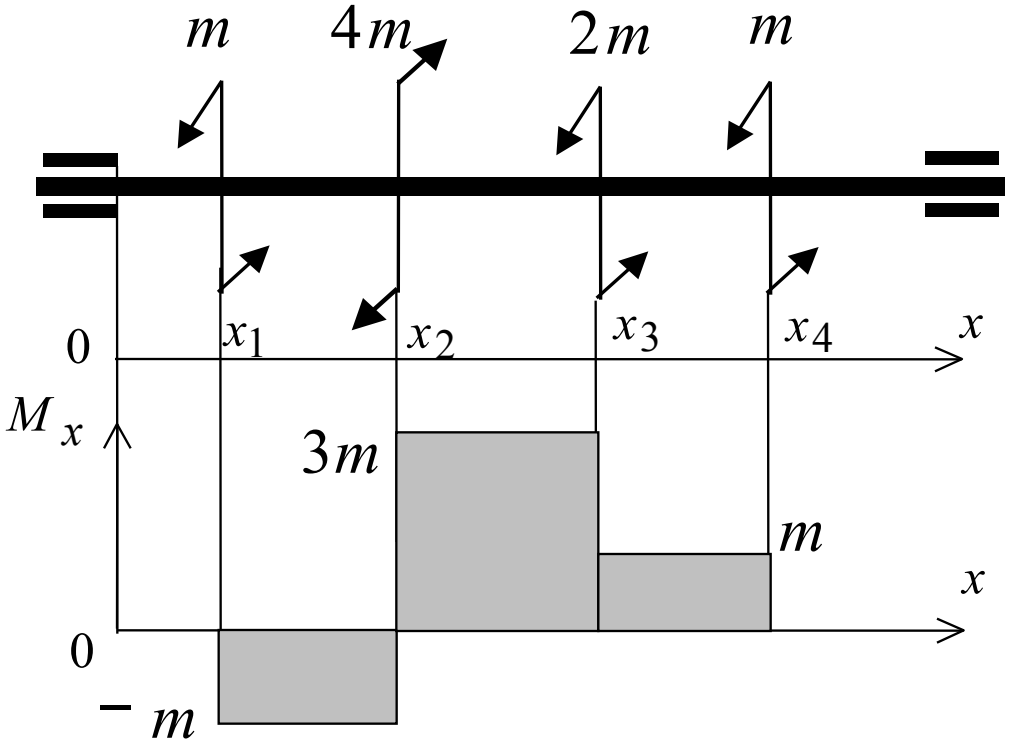
Построение эпюр крутящих моментов (продолжение)

Воспользуемся практическим правилом.

$M_x = -m$ при $x_1 \le x \le x_2$

$M_x = -m + 4m = 3m$ при $x_2 \le x \le x_3$

$M_x = -m + 4m - 2m = m$ при $x_3 \le x \le x_4$

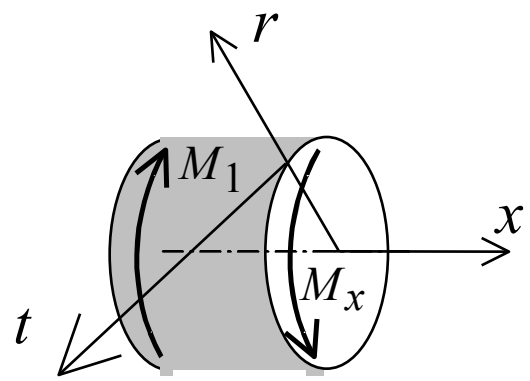


Напряжения и деформации при кручении

Задача решается при следующих допущениях:

1. ***Вал остается прямолинейным. Его ось не искривляется.***
2. ***Справедлива гипотеза плоских сечений: Поперечное сечение нагруженного крутящими моментами, поворачивается в плоскости, как жесткий диск. Радиусы сечения не искривляются.***
3. ***Расстояния между поперечными сечениями вала не изменяются, длина бруса при кручении остается неизменной.***

Система координат



Ось* t *- это касательная к окружности в точке пересечения радиуса с окружностью.

Из принятых допущений следует, что все деформации, за исключением деформации сдвига γ_{xt} ***, равны нулю.***

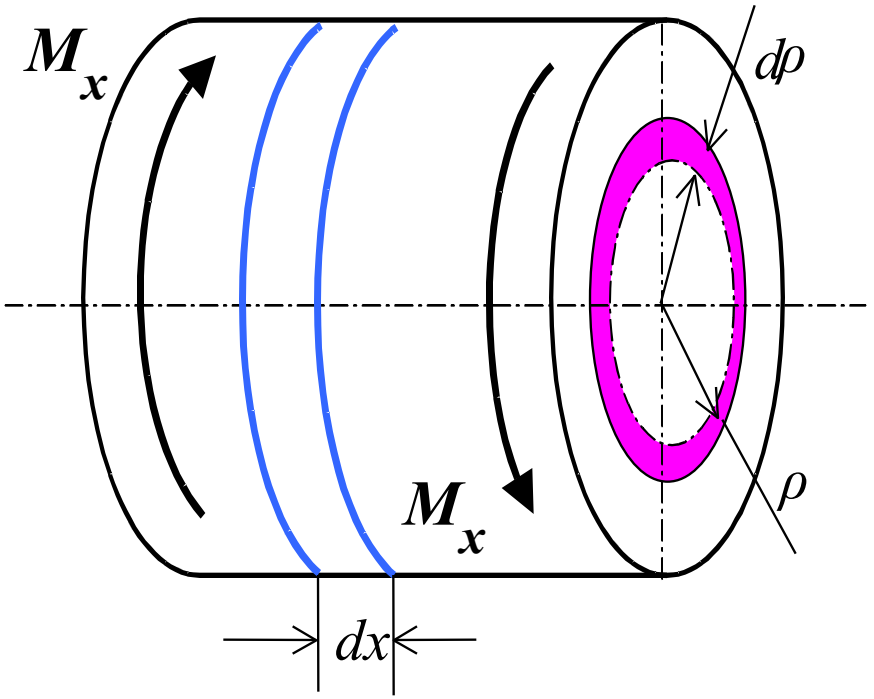
При кручении изменяются прямые углы между направлениями x ***и*** t

$$\gamma_{xt} = \gamma_{tx} \neq 0.$$

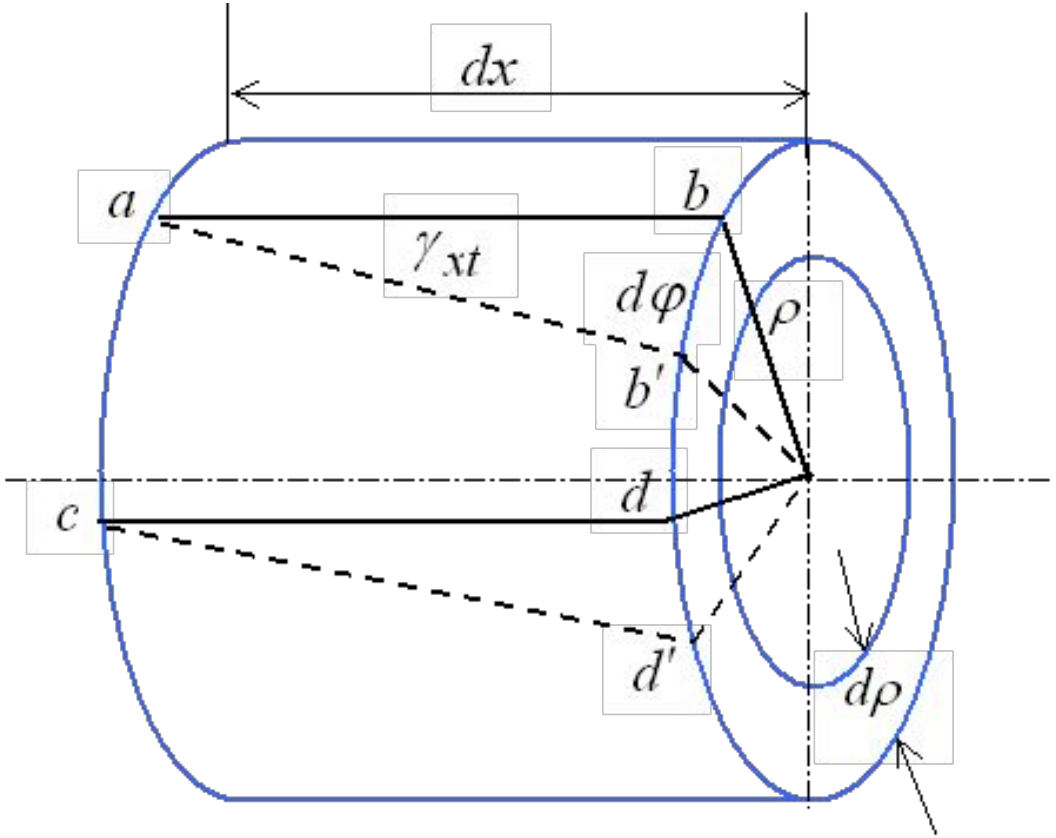
$$\tau_{xt} = \tau_{tx} \neq 0$$

Кольцевой элемент

Двумя плоскостями, нормальными к оси бруса, вырежем диск толщиной dx. Двумя соосными цилиндрическими поверхностями, отстоящими на $d\rho$, вырежем из диска кольцо радиусом ρ и толщиной $d\rho$.



Деформация кольца



$$bb' = \gamma_{xt} dx = \rho d\varphi$$

$$\gamma_{xt} = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (5.1)$$

Деформации и напряжения при кручении

Введем относительный угол закручивания

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (5.2)$$

Тогда

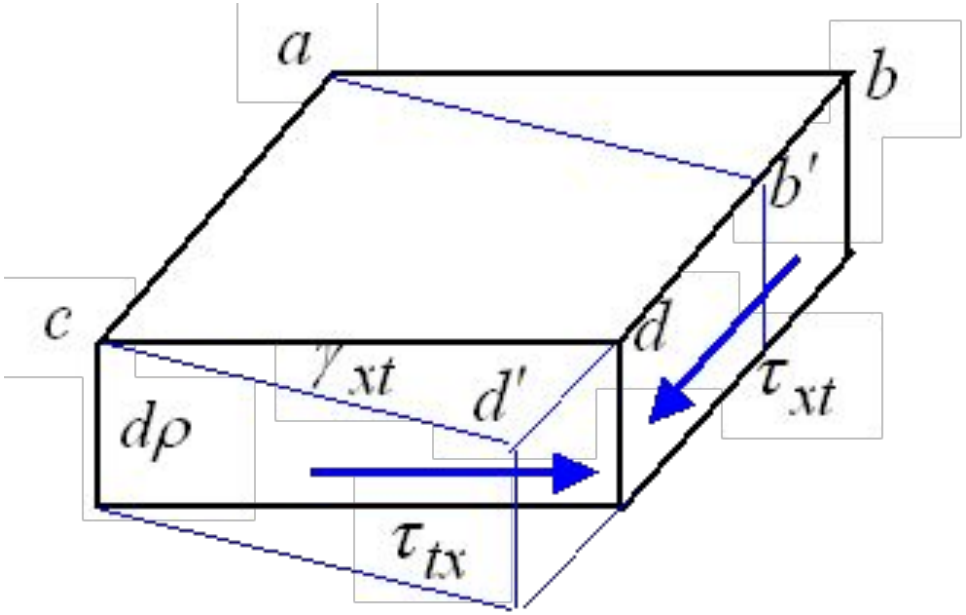
$$\gamma_{xt} = \rho\vartheta. \qquad (5.3)$$

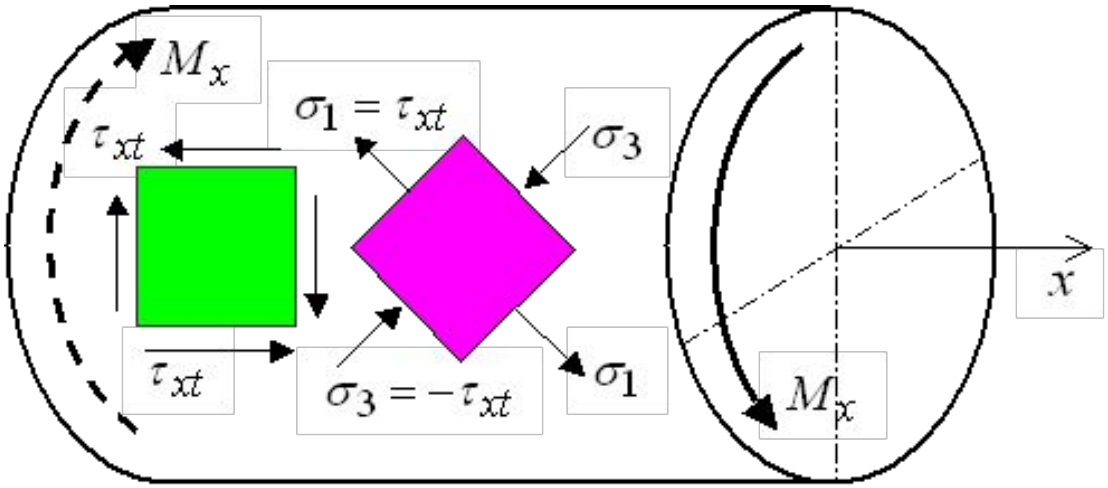
Теперь, с учетом закона Гука $\tau_{xt} = G\gamma_{xt}$ ***, запишем***

$$\tau_{xt} = G\rho\vartheta. \qquad (5.4)$$

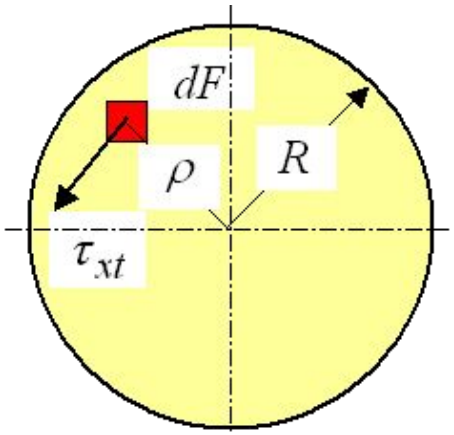
Из уравнений (5.3) и (5.4) следует, что касательные напряжения τ_{xt} и сдвиги γ_{xt} **прямо пропорциональны** расстоянию ρ от оси вала до рассматриваемой точки сечения.

Деформации и напряжения, продолжение





Вычисление крутящего момента в сечении



$$dM_x = \tau_{xt} dF \rho$$

Суммарный крутящий момент равен

$$M_x = \int_F \rho \tau_{xt} dF = \int_F \vartheta G \rho^2 dF = \vartheta G I_p, \qquad \textbf{(5.5)}$$

где I_p ***- полярный момент инерции сечения, равный***

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \qquad (5.6)$$

Вычисление угла закручивания вала

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p}, \qquad (5.7)$$

GI_p - жесткость сечения при кручении.

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x dx}{GI_p}, \qquad (5.8)$$

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p}. \qquad (5.9)$$

Вычисление напряжений при кручении

$$\vartheta G = \frac{\tau_{xt}}{\rho} = \frac{M_x}{I_p}$$

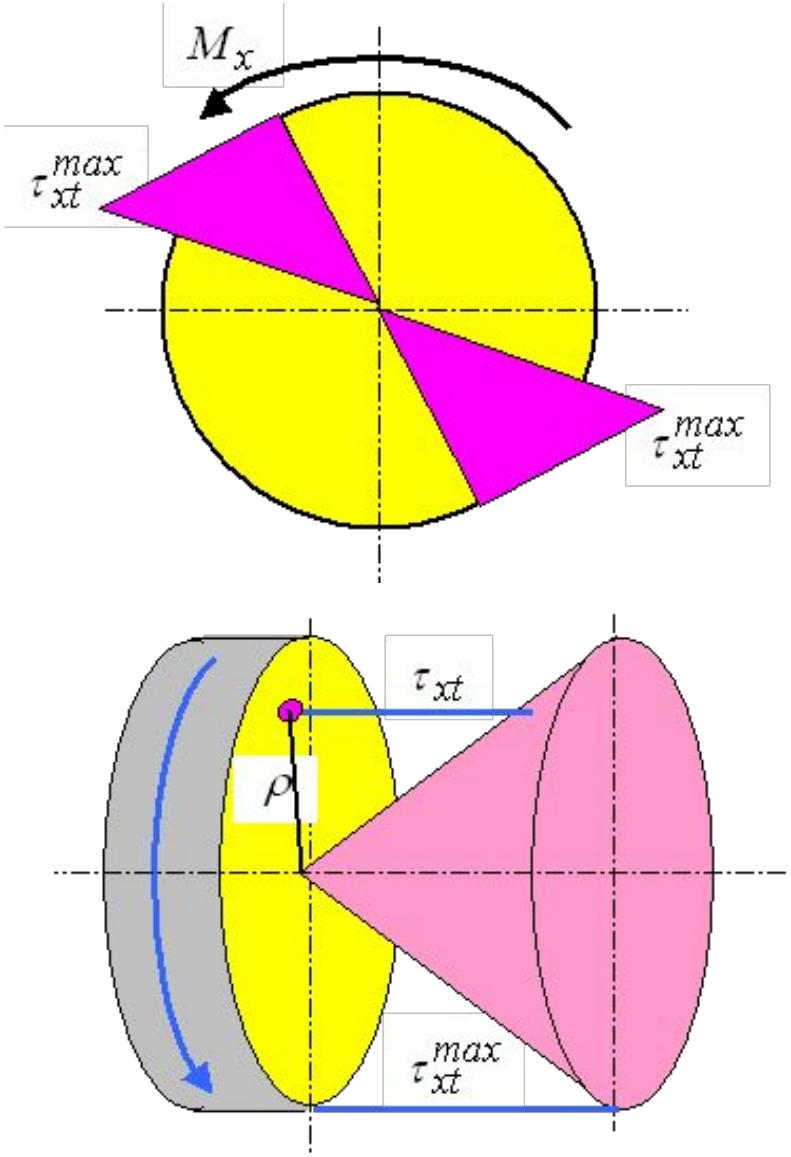
$$\tau_{xt} = \frac{M_x}{I_p}\rho \ . \qquad (5.10)$$

$$\tau_{xt}^{max} = \frac{M_x}{I_p}R = \frac{M_x}{W_p} \ , \qquad (5.11)$$

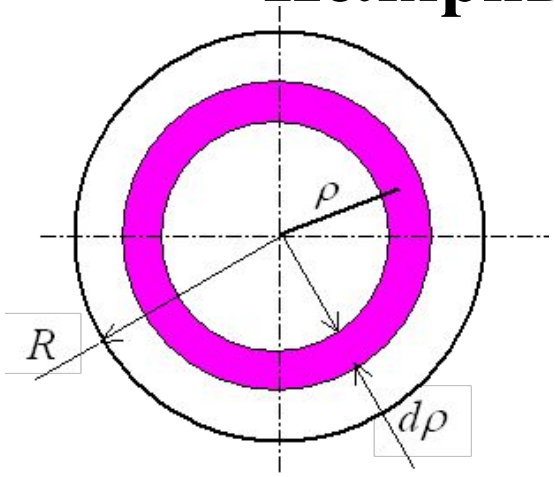
W_p - полярный момент сопротивления кручению

$$W_p = \frac{I_p}{R} \ . \qquad (5.12)$$

Эпюра касательных напряжений



Полярные моменты инерции



$$dF = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}. \quad (5.13)$$

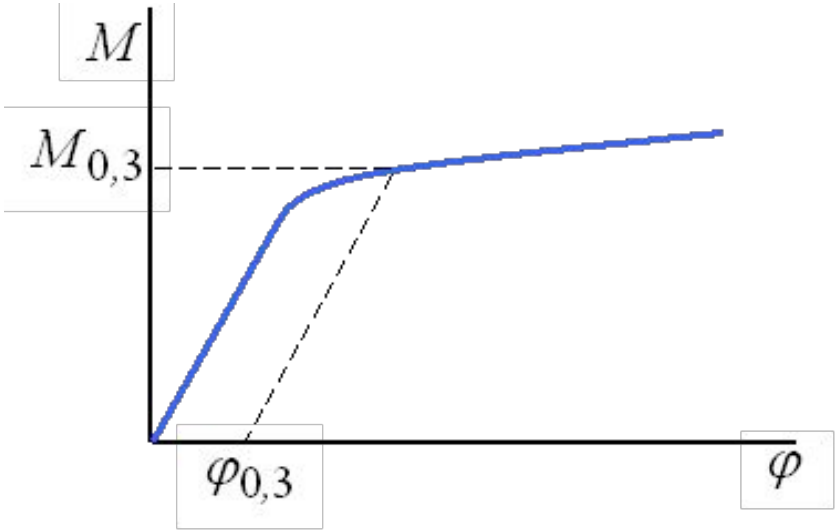
$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (5.14)$$

Для трубы

$$I_p^{\oplus} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}, \quad (5.15)$$

$$W_p^{\oplus} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16D}. \quad (5.16)$$

Условный предел текучести при кручении



$$\gamma_{xt} = \rho\vartheta \qquad \gamma_{0,3} = \frac{D}{2}\vartheta_{0,3} = \frac{D}{2}\frac{\varphi_{0,3}}{L} \qquad \gamma_{0,3} = 0{,}003$$

$$\varphi_{0,3} = \frac{6L}{D}10^{-3} \qquad \tau_{0,3} = \frac{M_{0,3}}{W_p}\,.$$

Расчет на прочность и жесткость при кручении

Расчет на прочность

$$[\tau] = \frac{\tau_{0,3}}{n}$$

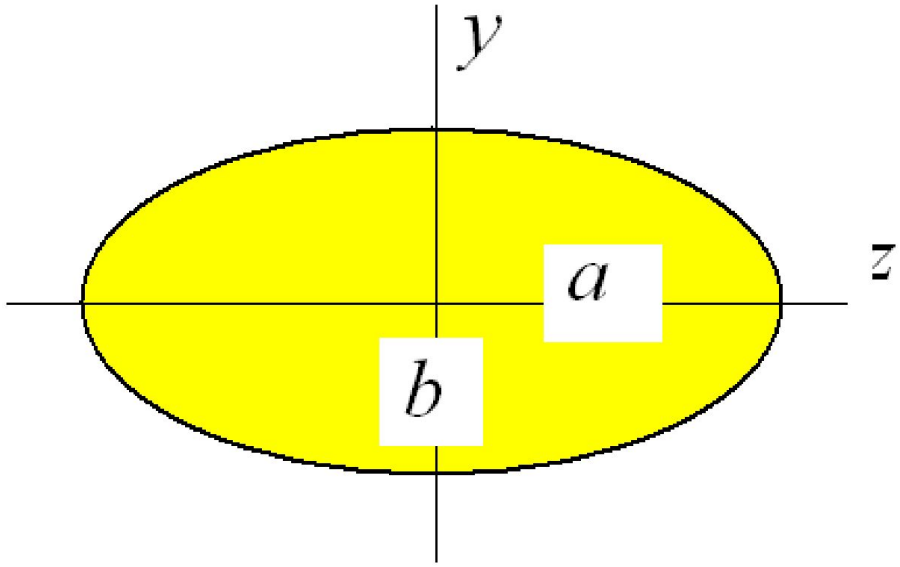
$$\tau_{max} \le [\tau]$$

Расчет на жесткость

$$\varphi \le [\varphi] \quad \text{или} \quad \vartheta \le [\vartheta],$$

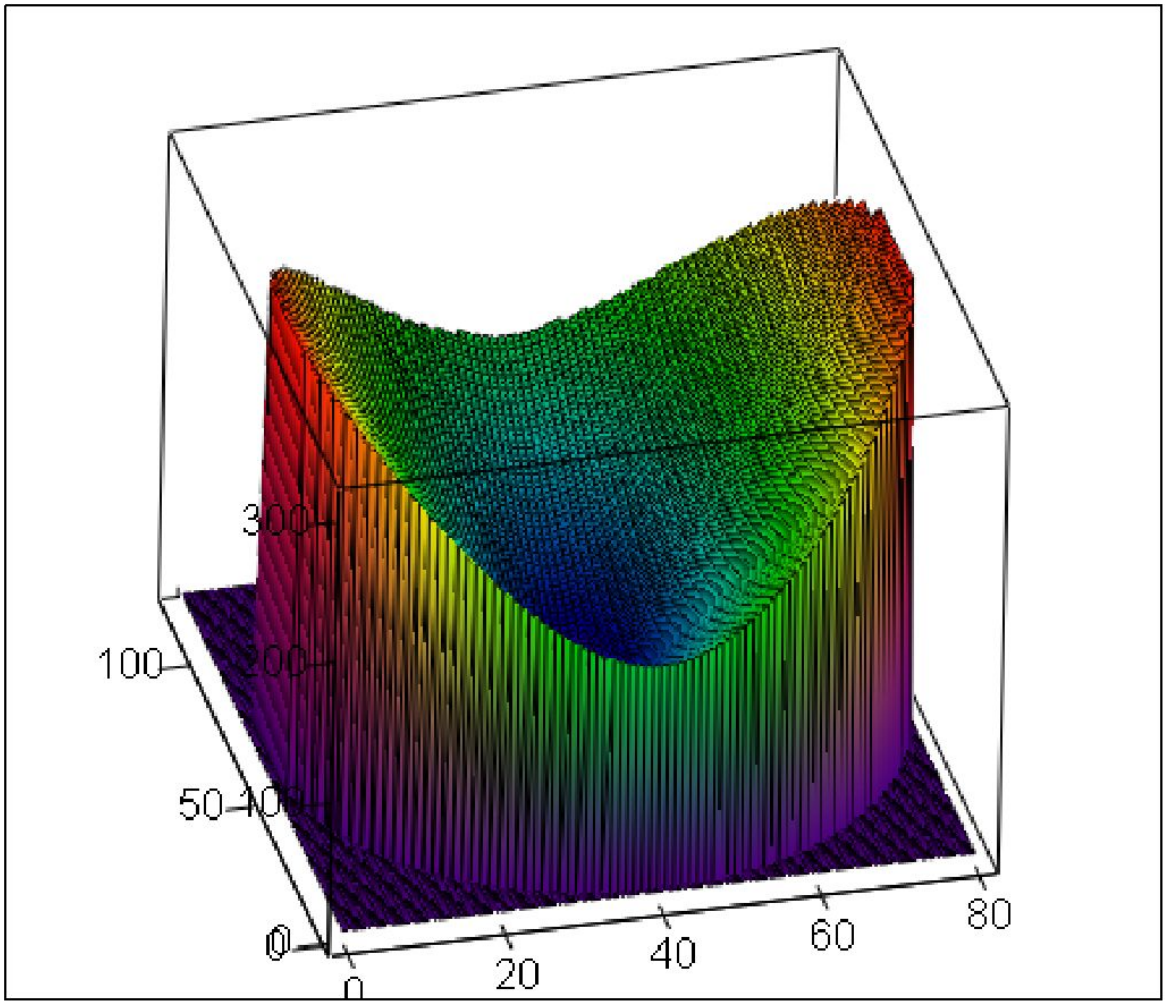
где $[\varphi]$ и $[\vartheta]$ - допускаемый в конструкции абсолютный или относительный угол закручивания.

Кручение эллиптического вала



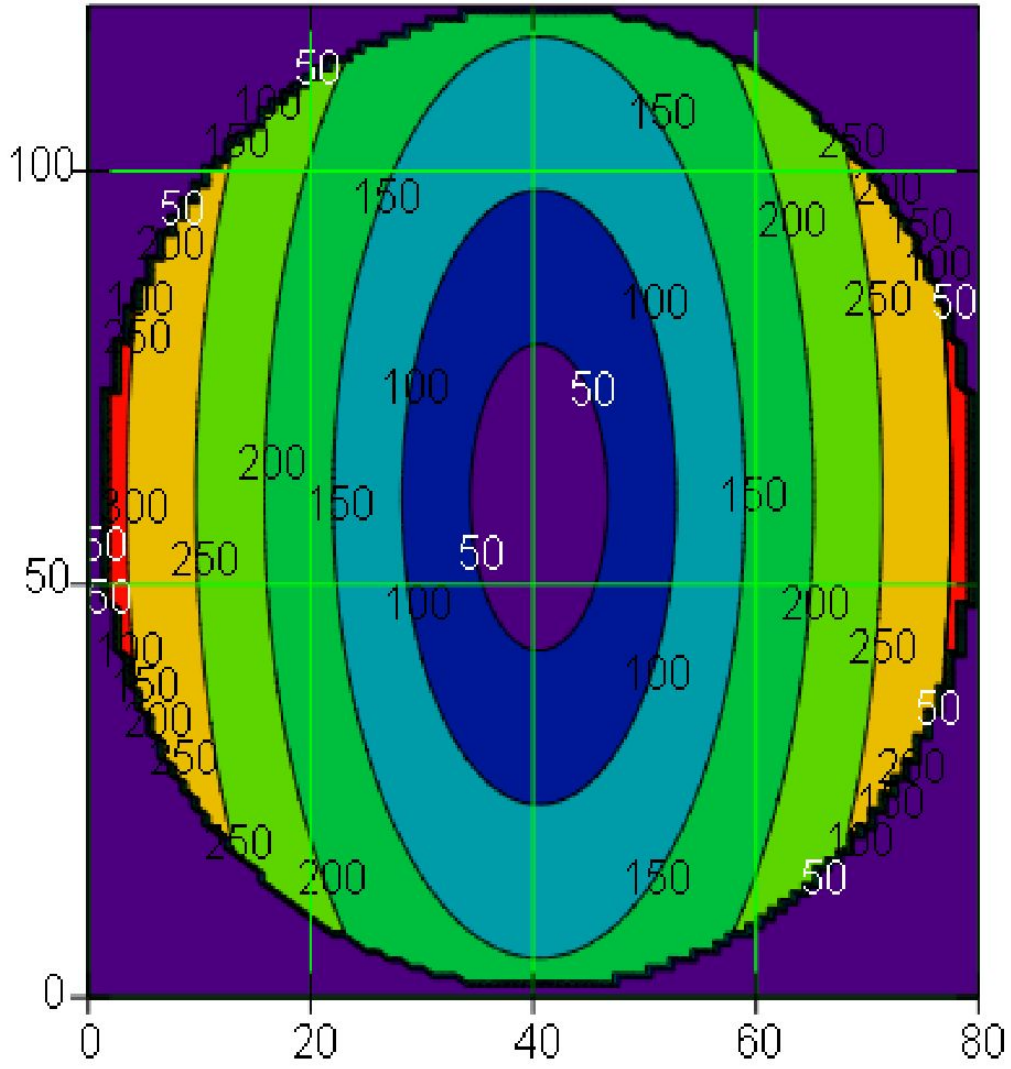
a> b

Напряжения при кручении эллиптического вала – трехмерный график

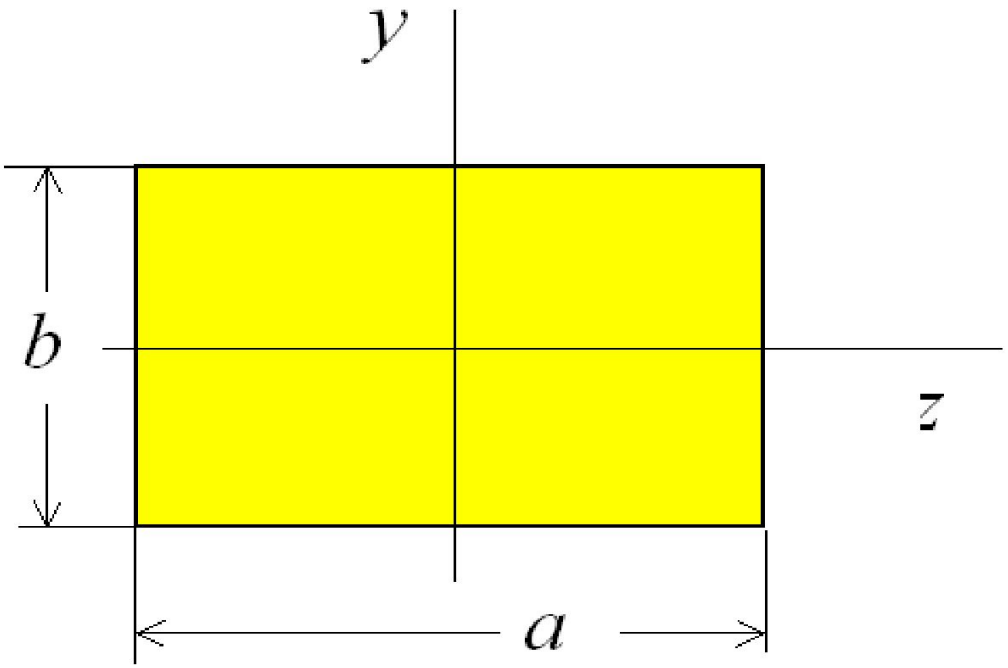


T

Напряжения при кручении эллиптического вала – контурный график

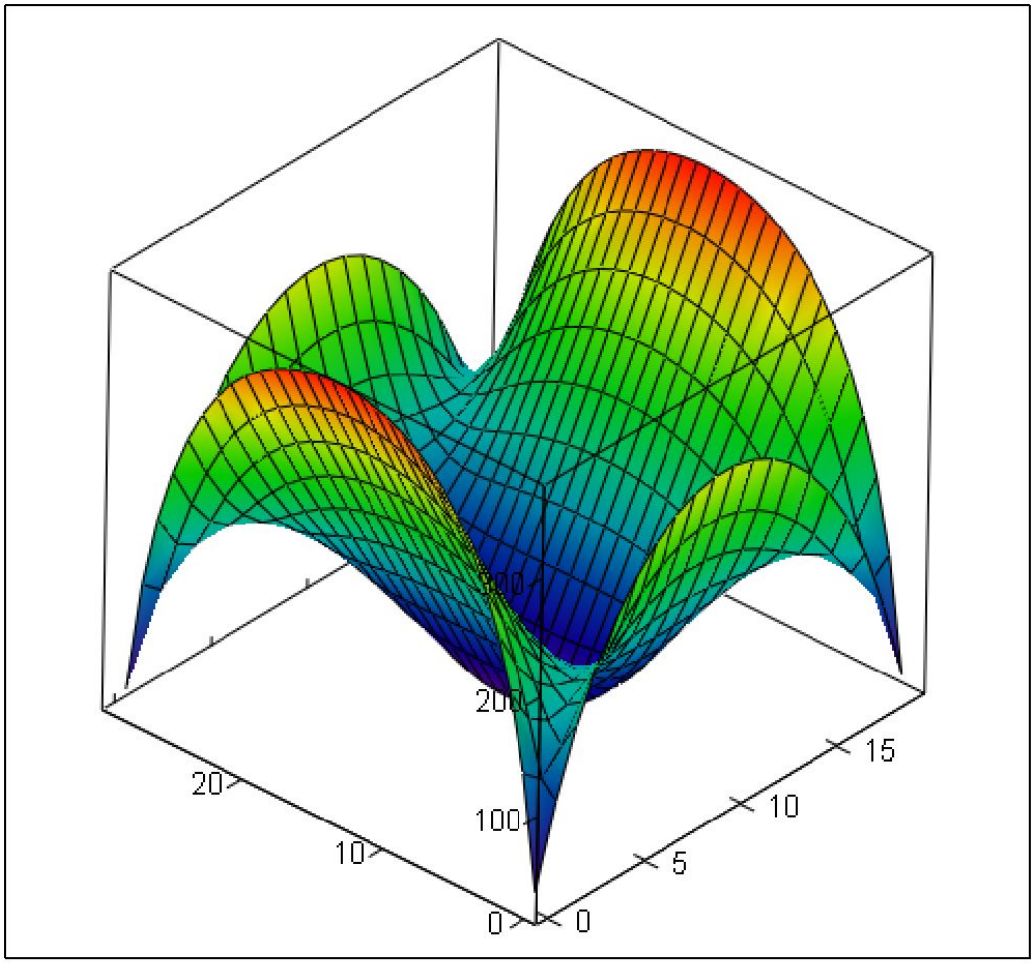


Кручение вала прямоугольного сечения



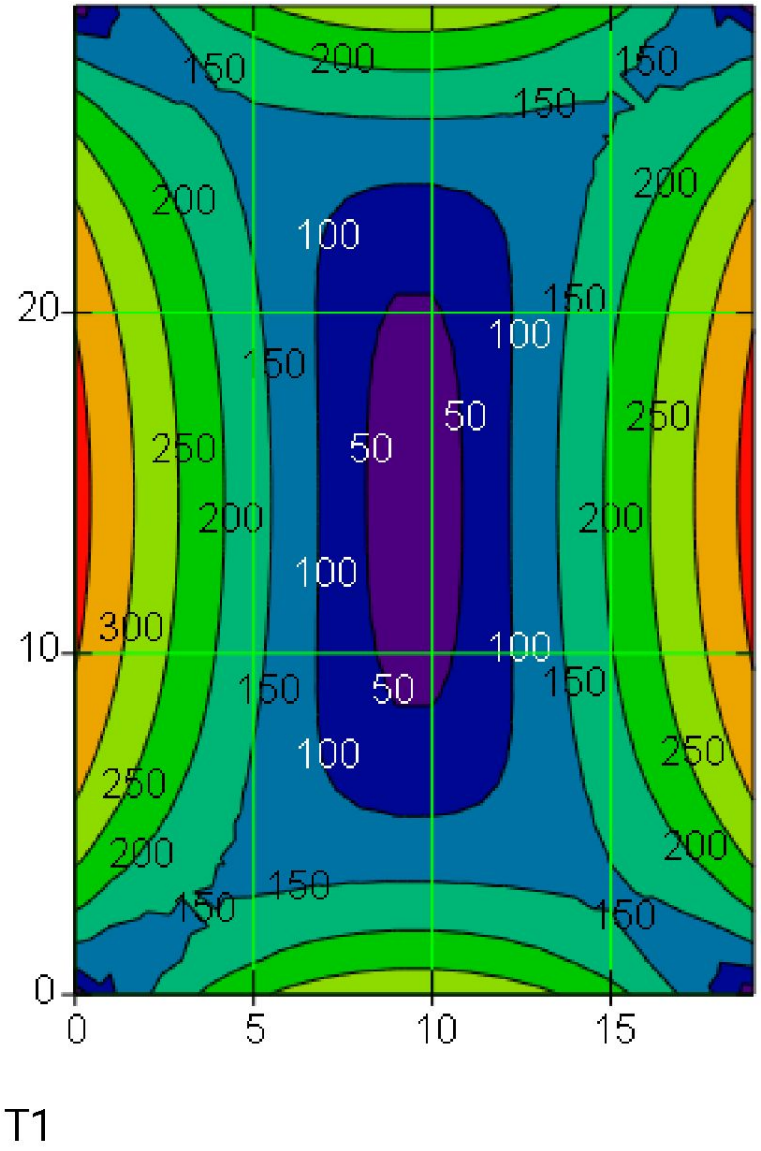
a>b

Напряжения при кручении прямоугольного вала – трехмерный график



T1

Напряжения при кручении прямоугольного вала –контурный график



Максимальные напряжения в прямоугольном сечении при кручении

Максимальные касательные напряжения возникают по контуру в середине большей стороны и равны

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_{кр}} \quad \text{где} \quad W_{кр} = \alpha b a^2$$

На контуре середины меньшей стороны действует напряжение

$$\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}$$

Деформация равна

$$\varphi_x = \int_0^L \frac{M_x dx}{G I_{кр}} \quad \text{где} \quad I_{кр} = \beta b a^3$$