

# Кручение прямого бруса

*Кручение – это вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений под действием крутящих моментов, действующих в этих сечениях.*

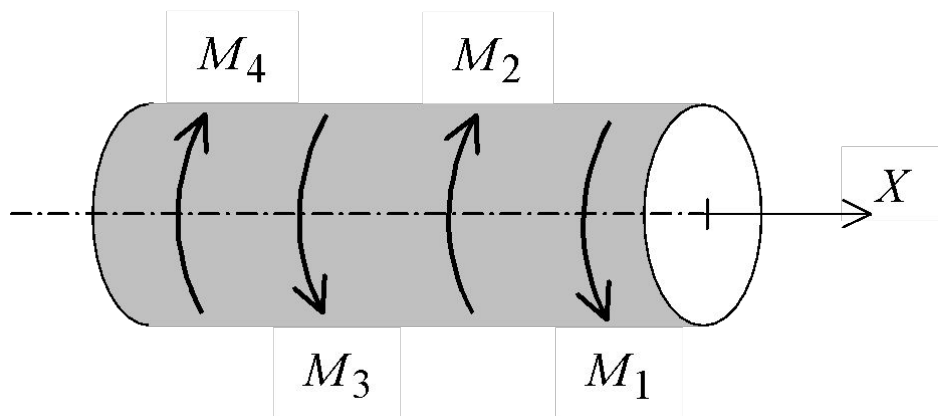
При кручении в поперечных сечениях возникают только внутренние крутящие моменты.

$$M_x \neq 0$$

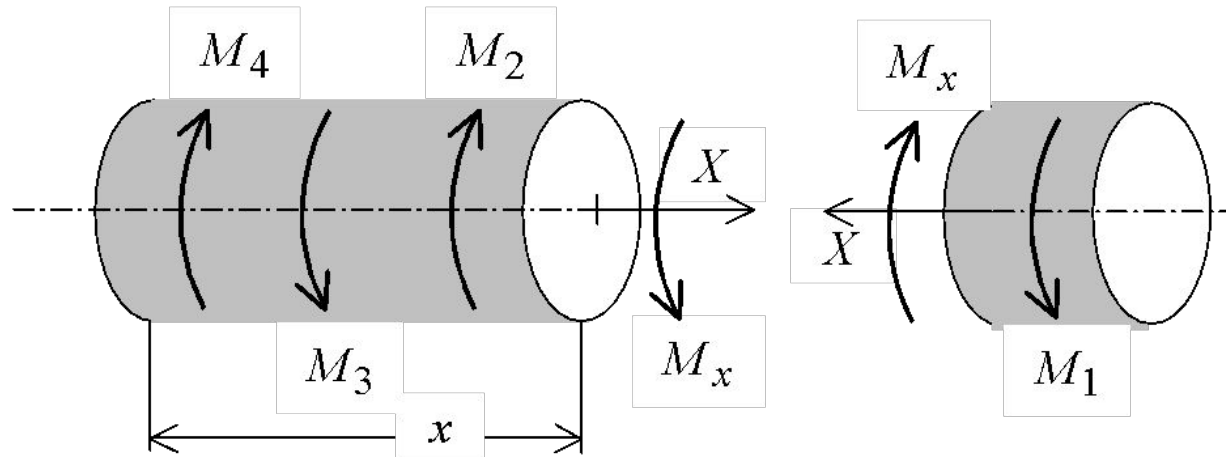
Остальные пять силовых факторов равны нулю.

# Кручение круглого вала. Правило знаков

Рассмотрим вал, нагруженный системой внешних крутящих моментов и находящийся в равновесии.



# Кручение. Метод сечений



Запишем условие равновесия левой части вала:

$$\begin{aligned} -M_4 + M_3 - M_2 + M_x &= 0; \\ M_x &= M_4 - M_3 + M_2 = M_1, \end{aligned}$$

так как вал находится в равновесии, т.е.

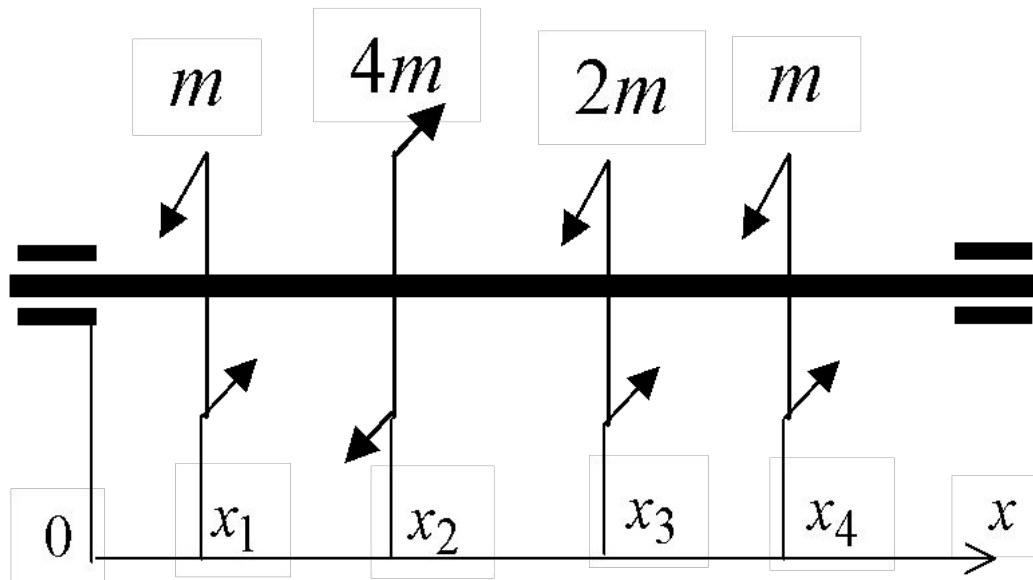
$$-M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = 0$$

# Построение эпюр крутящих моментов

*Практическое правило.* Крутящий момент  $M_x$  в любом поперечном сечении вала равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, действующих с одной стороны от сечения, взятой с обратным знаком.

*Рассмотрим вал, находящийся в равновесии:*

$$m - 4m + 2m + m = 0$$



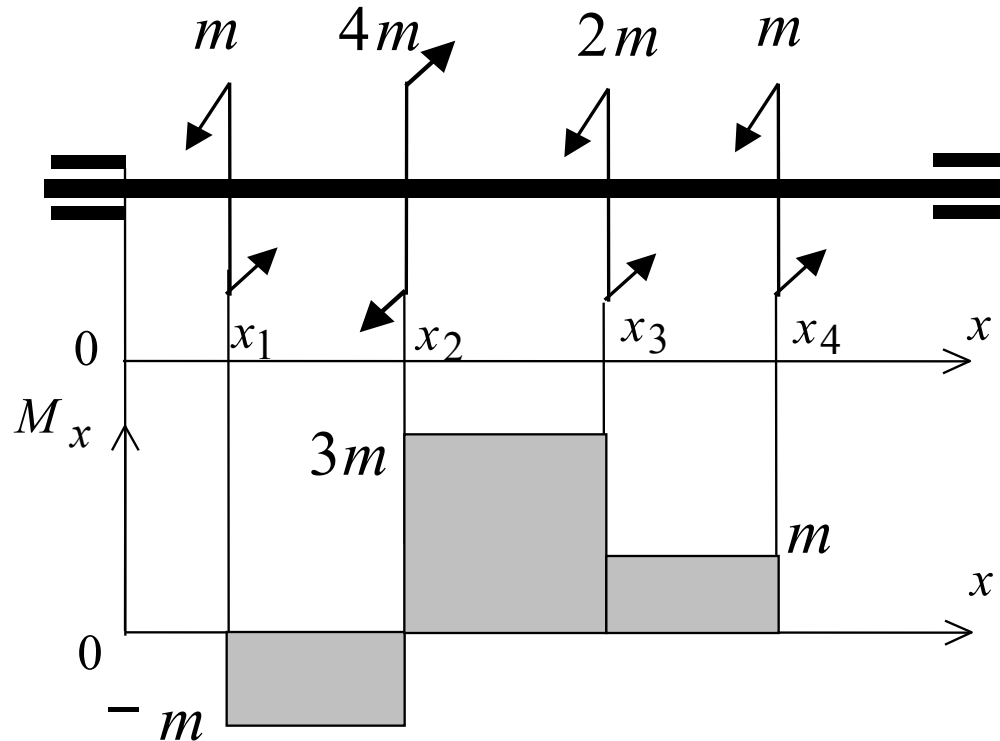
# Построение эпюр крутящих моментов (продолжение)

Воспользуемся практическим правилом.

$$M_x = -m \quad \text{при} \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$M_x = -m + 4m = 3m \quad \text{при} \quad x_2 \leq x \leq x_3$$

$$M_x = -m + 4m - 2m = m \quad \text{при} \quad x_3 \leq x \leq x_4$$



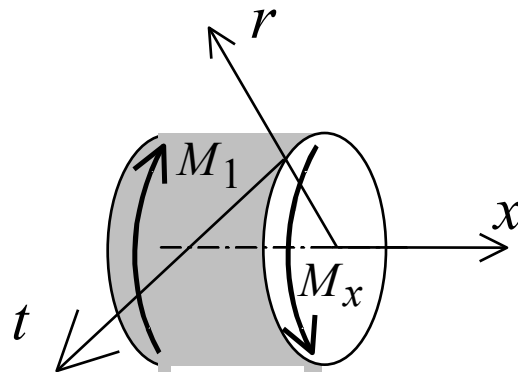
# Напряжения и деформации при кручении

Задача решается при следующих

допущениях:

- 1. Вал остается прямолинейным. Его ось не искривляется.*
- 2. Справедлива гипотеза плоских сечений: Поперечное сечение нагруженного крутящими моментами, поворачивается в плоскости, как жесткий диск. Радиусы сечения не искривляются.*
- 3. Расстояния между поперечными сечениями вала не изменяются. Расстояние между сечениями бруса при кручении остается неизменной.*

# Система координат



*Ось  $t$  - это касательная к окружности в точке пересечения радиуса с окружностью.*

*Из принятых допущений следует, что все деформации, за исключением деформации сдвига  $\gamma_{xt}$ , равны нулю.*

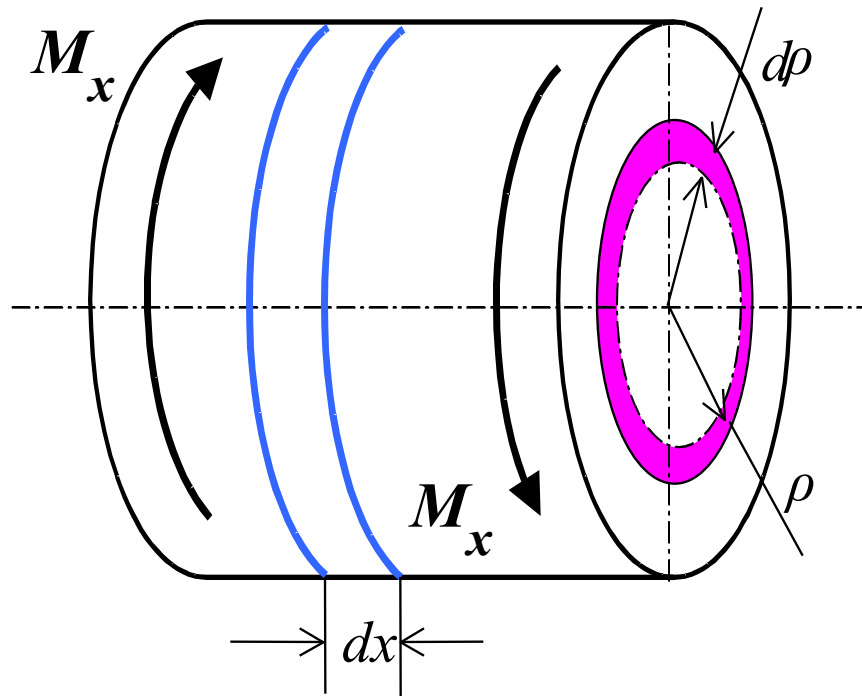
*При кручении изменяются прямые углы между направлениями  $x$  и  $t$*

$$\gamma_{xt} = \gamma_{tx} \neq 0.$$

$$\tau_{xt} = \tau_{tx} \neq 0$$

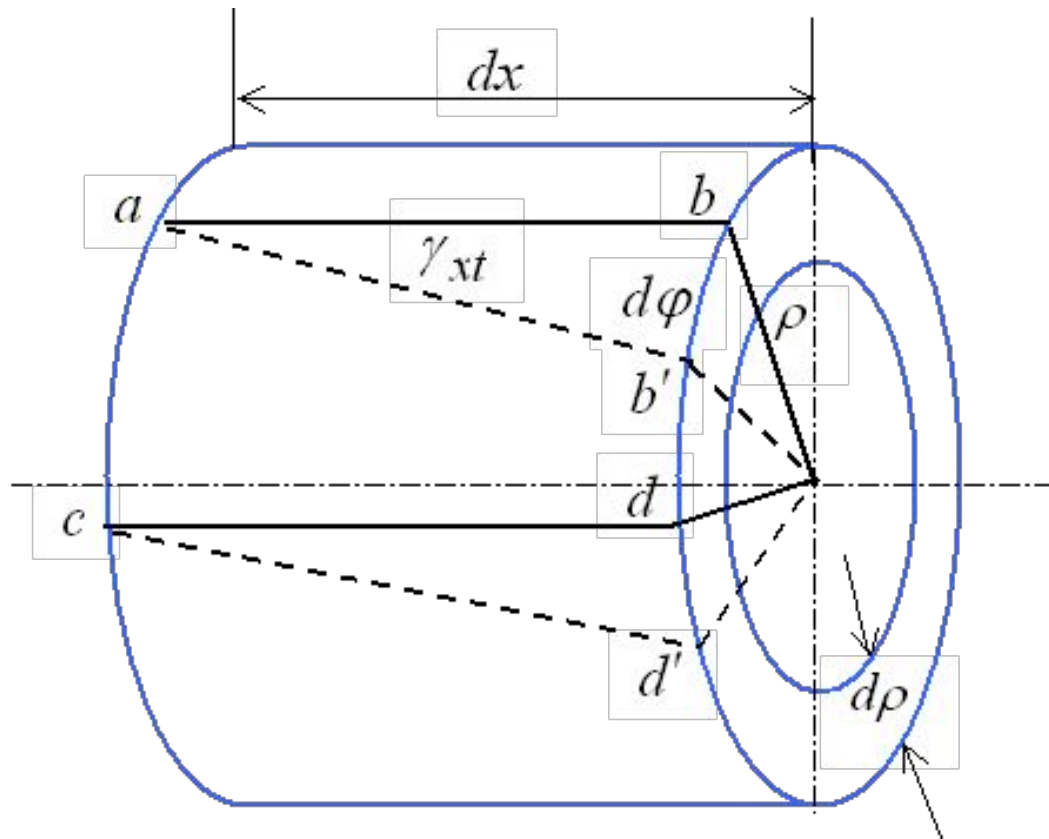
# Кольцевой элемент

Двумя плоскостями, нормальными к оси бруса, вырезаем диск толщиной  $dx$ . Двумя соосными цилиндрическими поверхностями, отстоящими на  $d\rho$ , вырежем из диска кольцо радиусом  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ .





# Деформация кольца



$$bb' = \gamma_{xt} dx = \rho d\varphi$$

$$\gamma_{xt} = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.1)$$

# Деформации и напряжения при кручении

*Введем относительный угол закручивания*

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.2)$$

*Тогда*

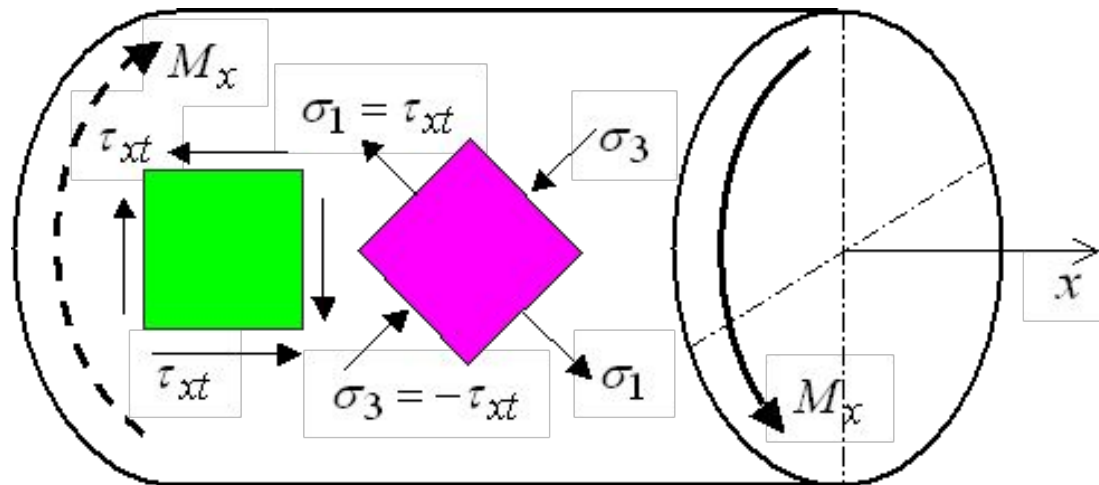
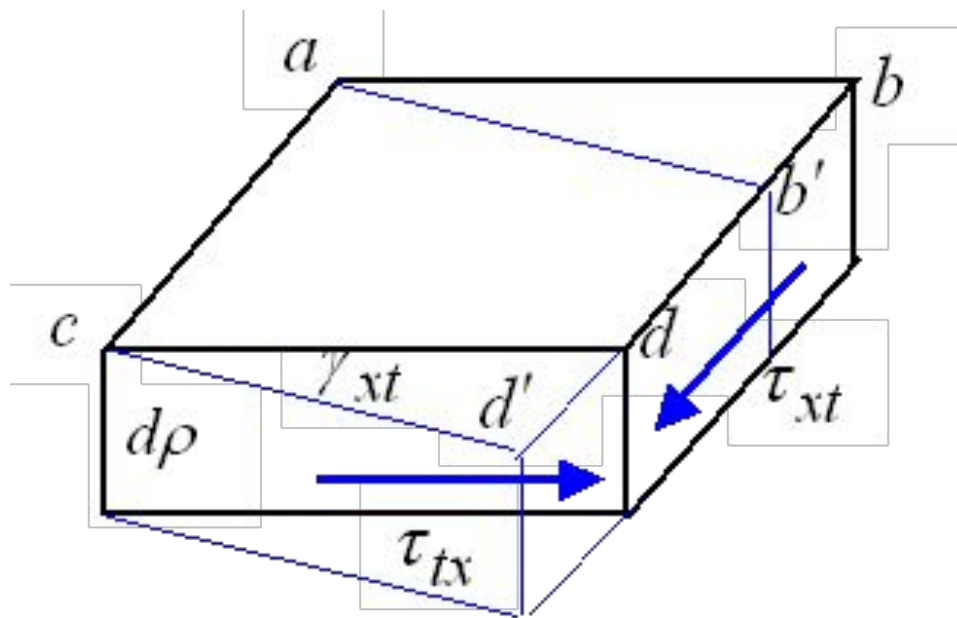
$$\gamma_{xt} = \rho \vartheta \quad (5.3)$$

*Теперь, с учетом закона Гука  $\tau_{xt} = G\gamma_{xt}$ , запишем*

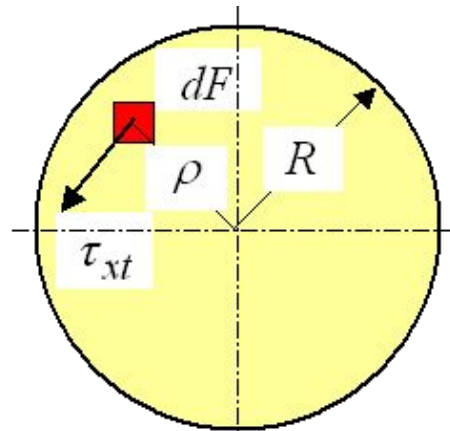
$$\tau_{xt} = G\rho\vartheta \quad (5.4)$$

Из уравнений (5.3) и (5.4) следует, что касательные напряжения  $\tau_{xt}$  и сдвиги  $\gamma_{xt}$  **прямо пропорциональны** расстоянию  $\rho$  от оси вала до рассматриваемой точки сечения.

# Деформации и напряжения, продолжение



# Вычисление крутящего момента в сечении



$$dM_x = \tau_{xt} dF \rho$$

*Суммарный крутящий момент равен*

$$M_x = \int_F \rho \tau_{xt} dF = \int_F \vartheta G \rho^2 dF = \vartheta G I_p, \quad (5.5)$$

*где  $I_p$  - полярный момент инерции сечения, равный*

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (5.6)$$

## Вычисление угла закручивания вала

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p}, \quad (5.7)$$

$GI_p$  - жесткость сечения при кручении.

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x dx}{GI_p}, \quad (5.8)$$

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p}. \quad (5.9)$$

# Вычисление напряжений при кручении

$$\vartheta G = \frac{\tau_{xt}}{\rho} = \frac{M_x}{I_p}$$

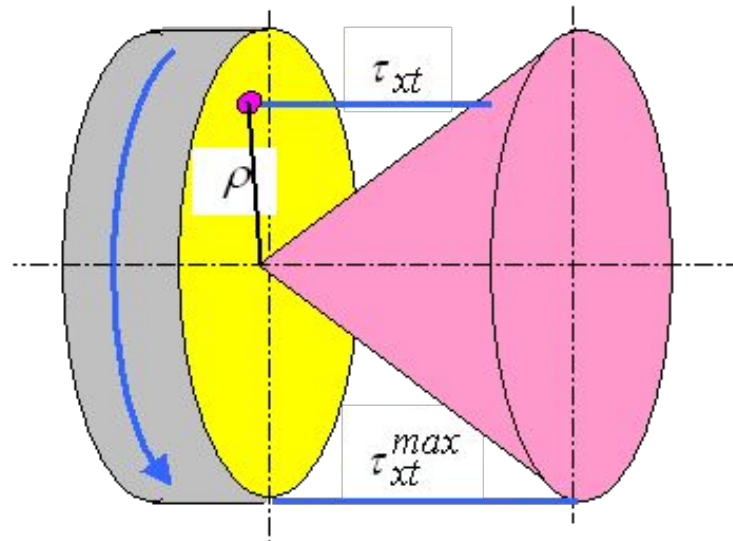
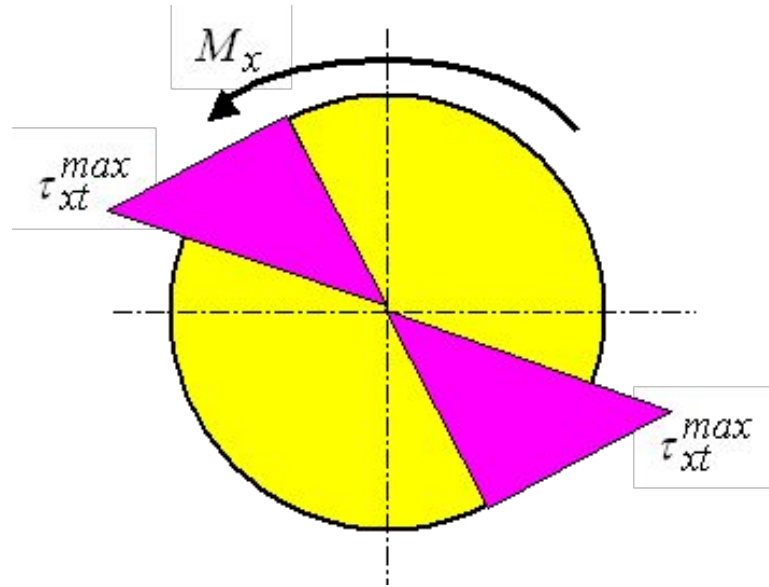
$$\tau_{xt} = \frac{M_x}{I_p} \rho . \quad (5.10)$$

$$\tau_{xt}^{max} = \frac{M_x}{I_p} R = \frac{M_x}{W_p} , \quad (5.11)$$

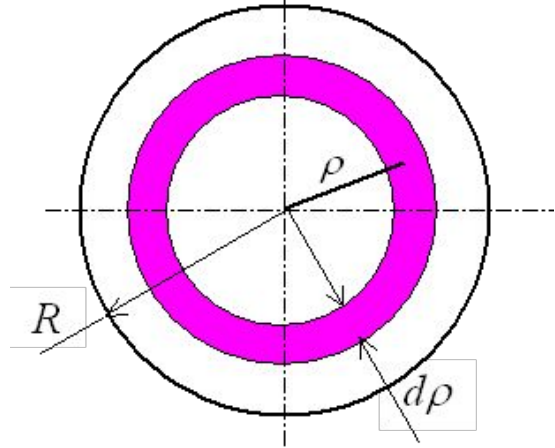
$W_p$  - полярный момент сопротивления кручению

$$W_p = \frac{I_p}{R} . \quad (5.12)$$

# Эпюра касательных напряжений



# Полярные моменты инерции



$$dF = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (5.13)$$

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \quad (5.14)$$

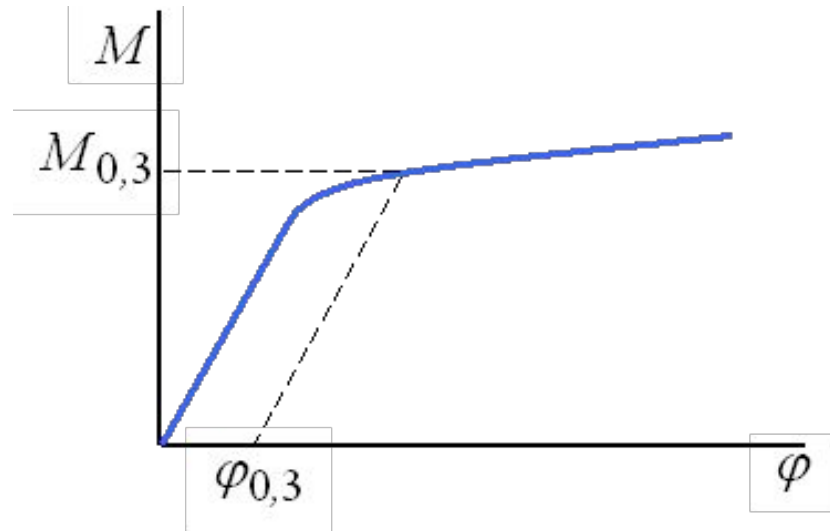
Для трубы

$$I_p^\oplus = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}, \quad (5.15)$$

$$W_p^\oplus = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \quad (5.16)$$



# Условный предел текучести при кручении



$$\gamma_{xt} = \rho \vartheta \quad \gamma_{0,3} = \frac{D}{2} \vartheta_{0,3} = \frac{D}{2} \frac{\varphi_{0,3}}{L} \quad \gamma_{0,3} = 0,003$$

$$\varphi_{0,3} = \frac{6L}{D} 10^{-3} \quad \tau_{0,3} = \frac{M_{0,3}}{W_p} .$$

# Расчет на прочность и жесткость при кручении

Расчет на прочность

$$[\tau] = \frac{\tau_{0,3}}{n}$$

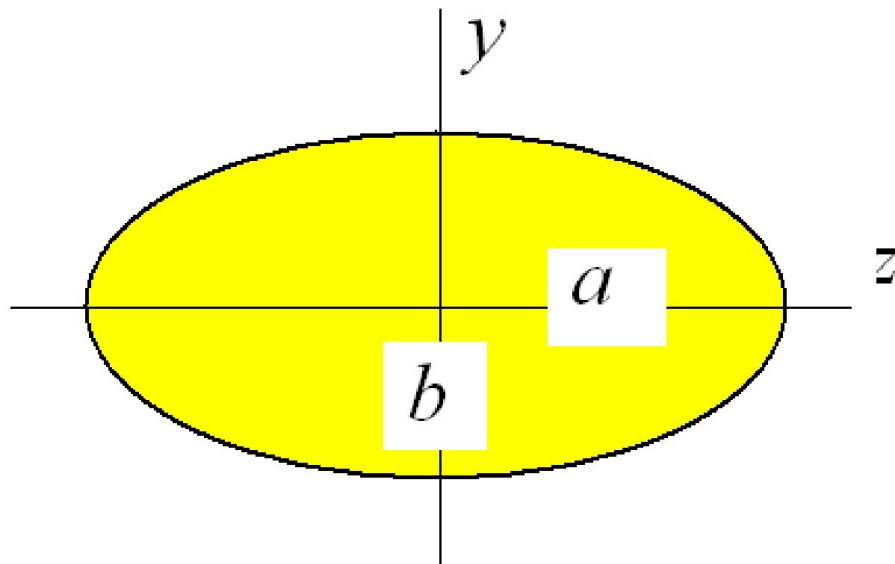
$$\tau_{max} \leq [\tau]$$

Расчет на жесткость

$$\varphi \leq [\varphi] \quad \text{или} \quad \vartheta \leq [\vartheta],$$

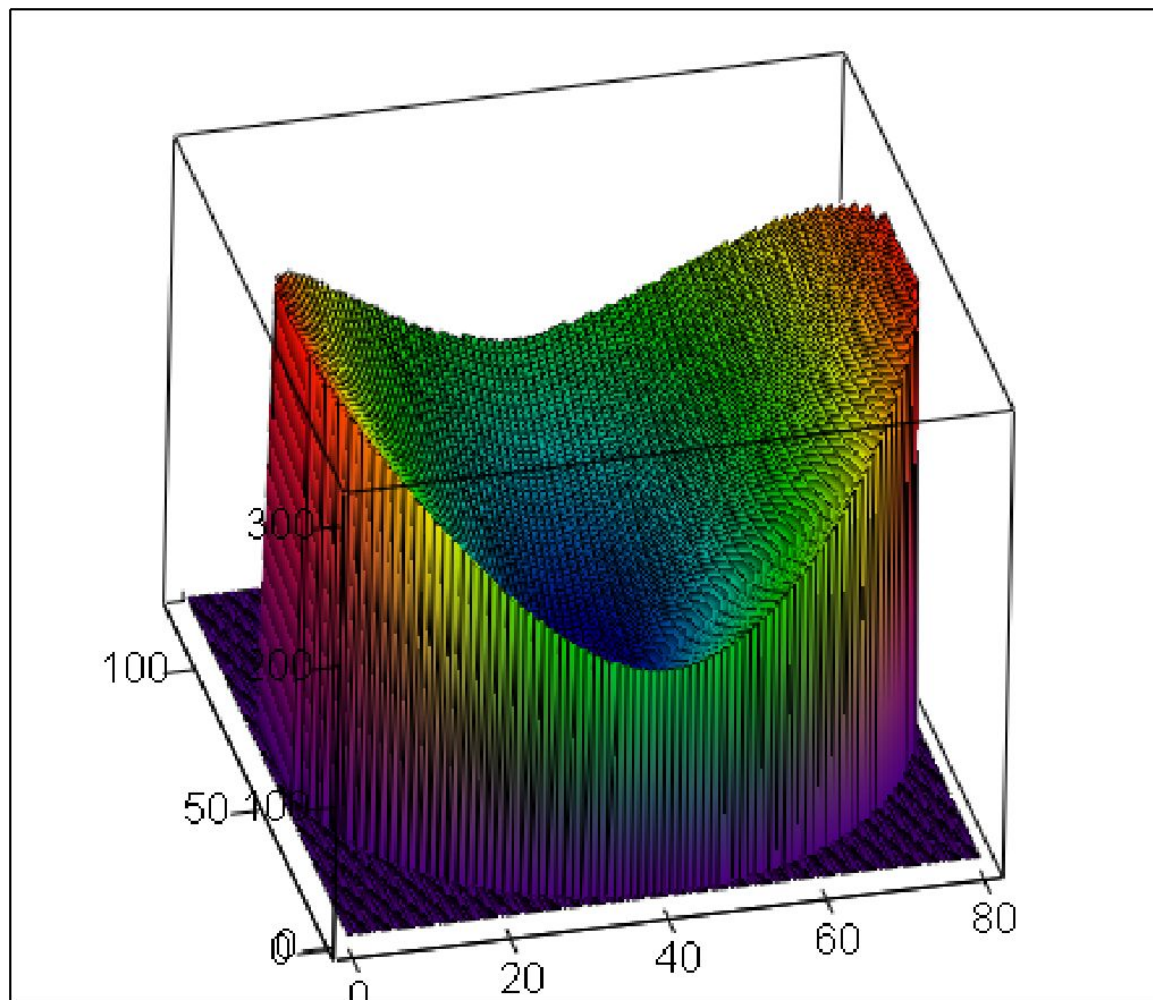
где  $[\varphi]$  и  $[\vartheta]$  - допускаемый в конструкции абсолютный или относительный угол закручивания.

# Кручение эллиптического вала



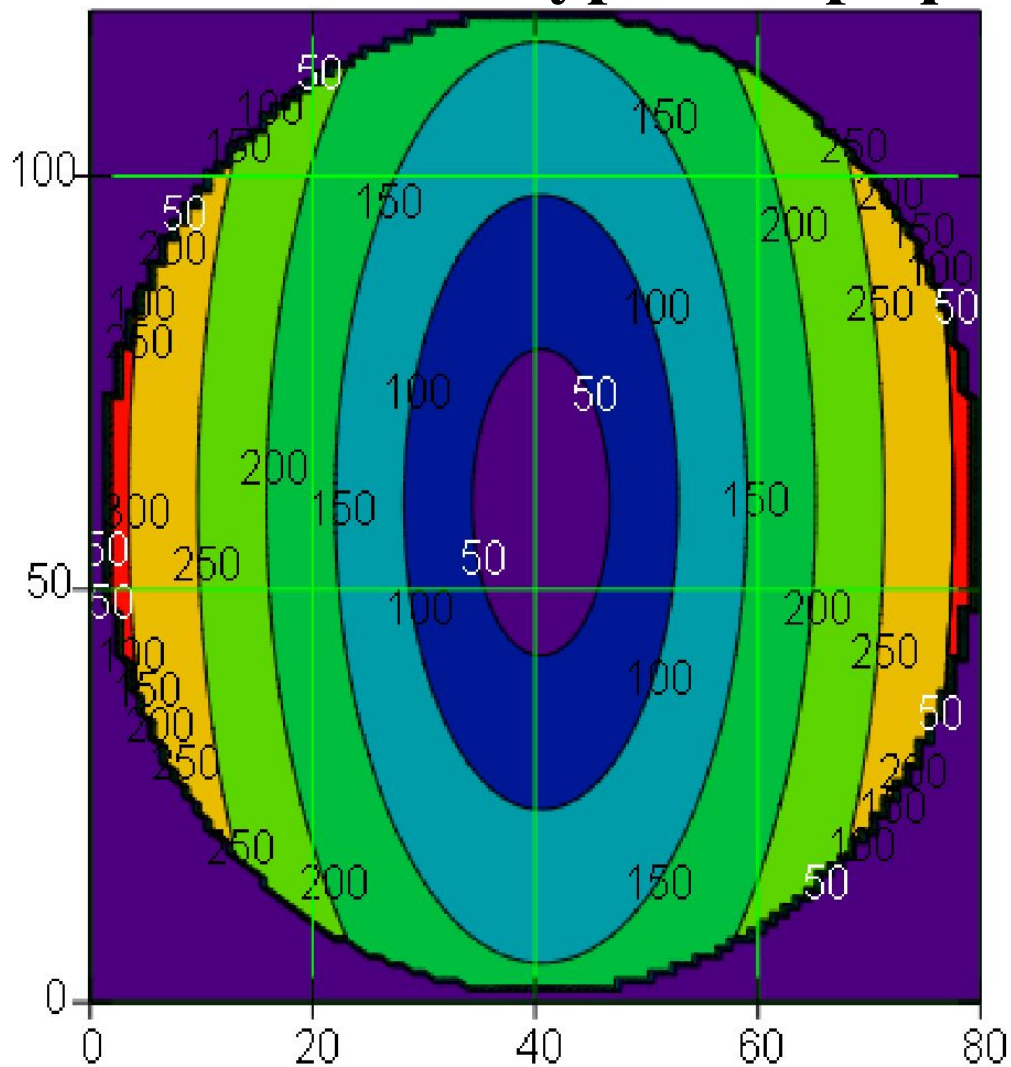
$$a > b$$

# Напряжения при кручении эллиптического вала – трехмерный график



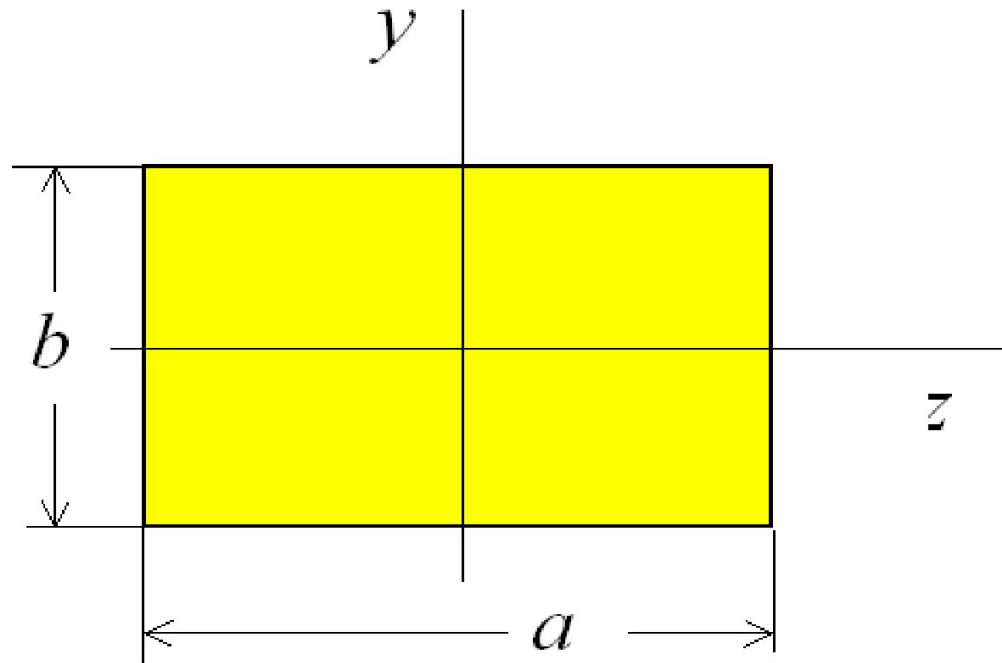
T

# Напряжения при кручении эллиптического вала – контурный график



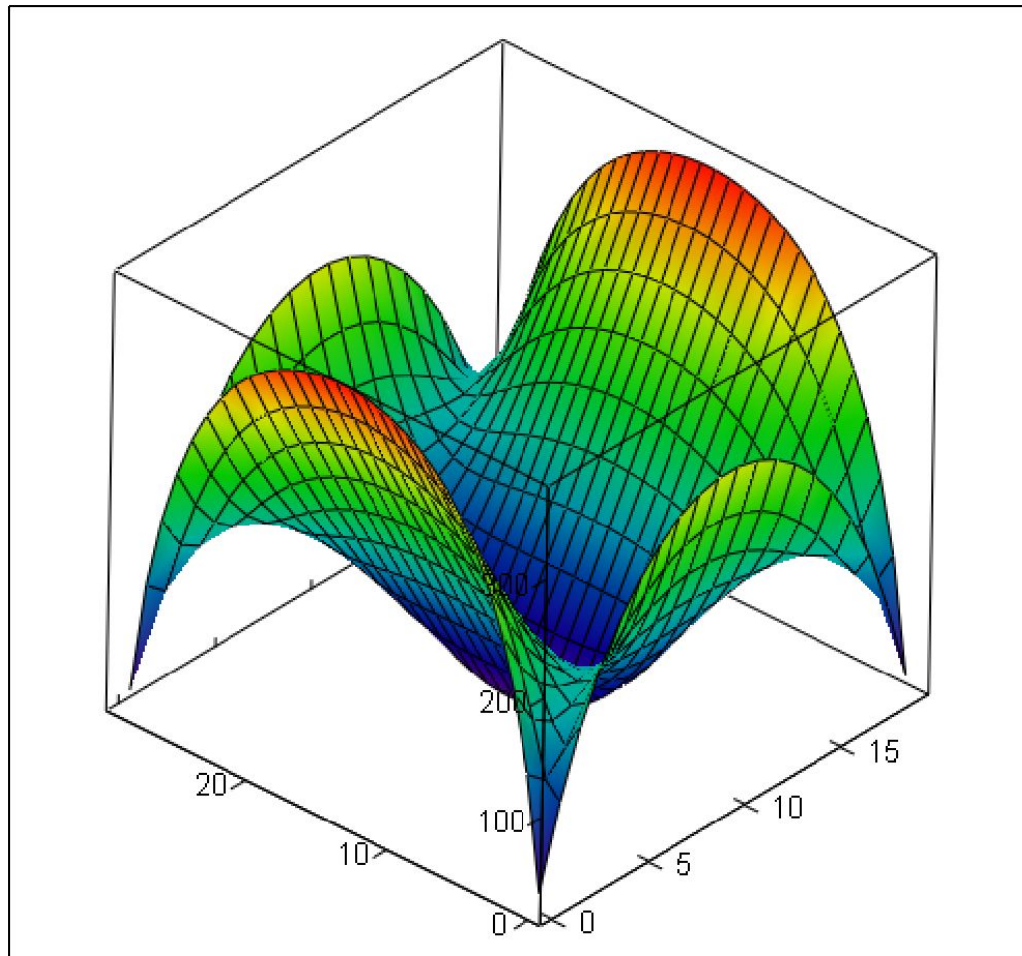
T

# Кручение вала прямоугольного сечения



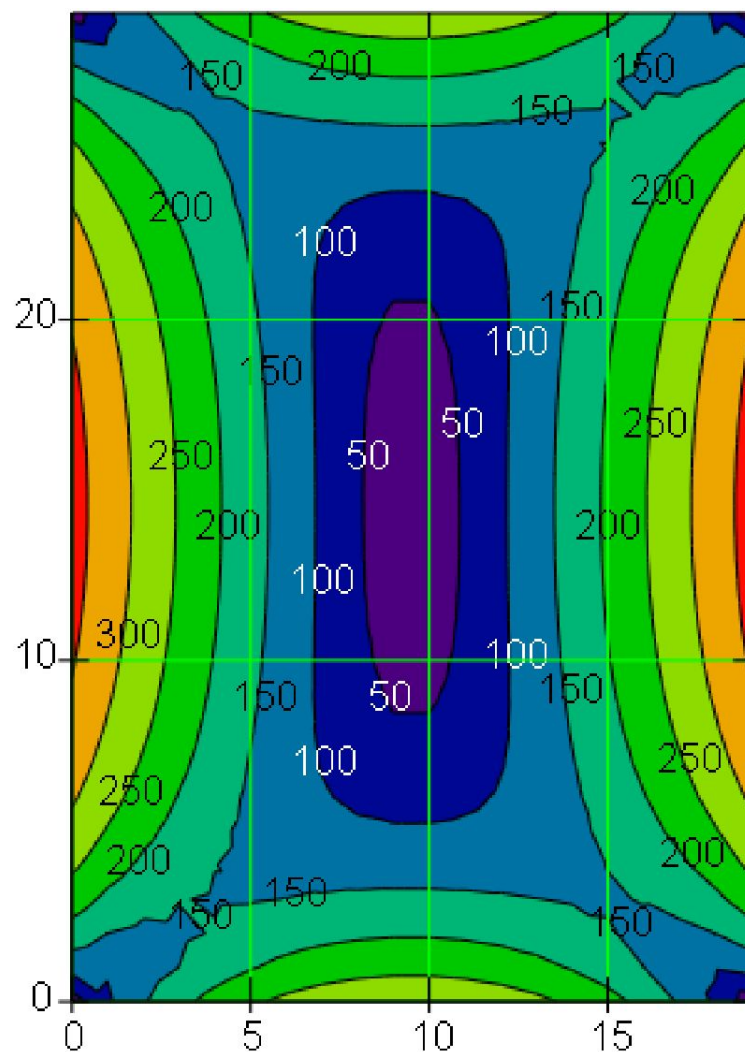
$$a > b$$

# Напряжения при кручении прямоугольного вала – трехмерный график



T1

# Напряжения при кручении прямоугольного вала – контурный график



T1



# Максимальные напряжения в прямоугольном сечении при кручении

Максимальные касательные напряжения возникают по контуру в середине большей стороны и равны

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_{кр}} \quad \text{где} \quad W_{кр} = \alpha b a^2$$

На контуре середины меньшей стороны действует напряжение

$$\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}$$

Деформация равна

$$\varphi_x = \int_0^L \frac{M_x dx}{G I_{кр}} \quad \text{где} \quad I_{кр} = \beta b a^3$$