§8. Теория систем линейных алгебраических уравнений

п.1. Базисные и свободные переменные

Рассмотрим систему линейных уравнений

Совместная система линейных уравнений называется определенной, если на имеет одно решение.

Совместная система линейных уравнений называется неопределенной, если на имеет бесконечное количество решений.

Неравный нулю минор r-го порядка матрицы ранга r называется базисным.

Если коэффициенты при r переменных совместной системы образуют базисный минор матрицы системы, то эти r переменных называют базисными (основными).

Остальные переменные называются свободными (неосновными).

Базисные переменные можно выбрать различными способами.

Решение, в котором все свободные переменные равны нулю, называется базисным.

Пример.

Решение.

- базисные
- свободные

п.2. Однородные системы линейных уравнений

Система вида

называется однородной системой линейных уравнений.

Замечание.

Однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Решение однородной системы

называется тривиальным.

Теорема 1.

Для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов был меньше количества неизвестных, т.е.

Доказательство.

Необходимость. От противного.

Пусть система имеет нетривиальное решение, но

Выпишем систему, состоящую из n соответствующих уравнений.

Она имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера.

При этом все

значит

Получили противоречие с условием, поэтому

Достаточность.
Пусть

Так как система совместна, то она имеет бесконечное количество решений (хотя бы одно ненулевое).

Следствие.

Если число уравнений однородной системы равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю.

Пример.

Решение.

Учитывая следствие, система имеет единственное тривиальное решение.

п.3. Фундаментальная система решений

Рассмотрим однородные системы линейных уравнений с бесконечным количеством решений.

Теорема 2.

Пусть

 решения однородной системы.

Тогда

 также решения этой однородной системы.

Замечание.

Любая линейная комбинация решений однородной системы также является решением этой системы.

Система линейно независимых решений

называется фундаментальной, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений

Неопределенная система однородных уравнений имеет бесконечное множество фундаментальных систем.

Теорема 3.

Пусть ранг матрицы коэффициентов однородной системы меньше числа переменных,

Тогда всякая фундаментальная система решений состоит из векторов.

Общее решение однородной системы можно записать в виде

где фундаментальная система решений этой системы, , .

Пример.

Решение.

- количество базисных переменных
- количество свободных переменных (количество векторов в ФСР)
- базисные
- свободные

- общее решение однородной системы

Найдем фундаментальную систему решений.

 фундаментальная система решений

Общее решение однородной системы:

Теорема 4.

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы.

Пример.

а) найти общее решение;

б) используя результат предыдущего пункта, найти общее решение соответствующей однородной системы и записать его в векторной форме.

Решение.

 количество базисных переменных

 количество свободных переменных
(количество векторов в ФСР)

 базисные

 свободные

- общее решение неоднородной системы

Частное решение неоднородной системы:

 общее решение однородной системы

Найдем фундаментальную систему решений.

фундаментальная система решений

Общее решение однородной системы:

Общее решение неоднородной системы: