Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка

План лекции

1. Дифференциальные уравнения. Определение решения.
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Линейные уравнения. Метод подстановки. Метод вариации постоянной.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнение в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения. Определение решения

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными*** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.).

- **Определение 1. Дифференциальным уравнением** называется уравнение

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad \text{или} \quad y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

где x — независимая переменная, y(x) — неизвестная функция, n — порядок уравнения.

Определение 2. **Решением дифференциального уравнения** называется **n** раз дифференцируемая функция $\varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество.

Определение 3. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение называется порядком этого уравнения.

Пример.

a) $y''' - 3y'' + 2y = 0$- дифференциальное уравнение третьего порядка.

b) $x^2y' + 5xy = y^2$- дифференциальное уравнение первого порядка.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Постановка задачи: Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени.

Решение:

Пусть t – время, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки (независимая переменная).

Тогда $V = V(t)$- функция от t.

Воспользуемся Вторым законом Ньютона (основным законом механики)

$$F = m \cdot a,$$

где $a = \mathrm{V}'(\mathrm{t})$-ускорение движущегося тела;

F-результирующая сила, действующая на тело в процессе движения;

m-масса тела.

В нашем случае: $F = -kV^2, k > 0$- коэффициент пропорциональности

(«$-$» указывает на то, что скорость тела уменьшается).

Тогда имеем: $mV' = -kV^2$ или $V' = -\frac{k}{m}V^2$,

где функция $V(t)$- решение дифференциального уравнения.

Другие задачи

• ***закон изменения массы радия в зависимости от времени*** («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -k \cdot m,$$

где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $m(t)$ - масса радия в момент t;

• ***«закон охлаждения тел»,*** т. е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - t_0),$$

где T(t) - температура тела в момент времени t, k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха (среды охлаждения);

• ***закон изменения давления воздуха*** в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p,$$

где $p(h)$- атмосферное давление воздуха на высоте $h, k > 0$.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

Определение 4. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение вида

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = F(x, y).$$

Примеры: $y' = xe^y, y' = \frac{y \ln x}{x}, y' = x + y$

Определение 5. ***Решением дифференциального уравнения первого порядка*** называется функция $y = \varphi(x)$ один раз дифференцируемая, обращающая уравнение в тождество.

Определение 6. ***Общим решением дифференциального уравнения*** называется совокупность функций, содержащих все решения уравнения. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения задается формулой

$$y = \varphi(x, C) \text{ или } \varphi = (x, y, C) = 0$$

Определение 7. ***Частным решением дифференциального уравнения*** называется общее решение при некотором значении $C = C_0$ (C- постоянная величина).

- **Дифференциальное уравнение первого порядка. Основные понятия**

Определение 8. Задачей Коши мы будем называть - задачу отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Теорема 1. (существования и единственности решения задачи Коши):
Если в уравнении $y' = f(x;y)$ функция $f(x;y)$ и ее частная производная $f'_y(x;y)$ непрерывны в некоторой области D по y, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Определение 9. Интегральной кривой (интегральной кривой поля направлений) называется график решения дифференциального уравнения. Поэтому геометрический смысл общего решения дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых на плоскости xoy, в зависимости от произвольной постоянной величины C, а частное решение представляет собой одну интегральную кривую, которая проходит через точку с координатами $(x_0;y_0)$.

Геометрический смысл теоремы 1 состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка. Основные понятия

Пример: Решить уравнение $y' = x$, при условии $y(0) = 1$.

Решение. Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

где С-произвольная постоянная.

Используя условие $y(0) = 1$, имеем

$$1 = \frac{0^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad \mathrm{C} = 1.$$

Тогда частное решение задачи имеет следующий вид:

$$y_{\text{ч.р}} = \frac{x^2}{2} + 1$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 10. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

где $f(x), g(y)$ непрерывные функции.

Метод разделения переменных

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Bigg| \cdot \frac{dx}{g(y)}.$$

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \\ g(y) \neq 0 \end{cases} \\ g(y) = 0\,. \end{array}\right.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

откуда находим решение в виде

$$y = \varphi(x, C)$$

или

$$\varphi(x, y, C) = 0.$$

• Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = xy^2$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \ \left| \cdot \frac{dx}{y^2} \right.$$

$$\left[\begin{cases} \dfrac{dy}{y^2} = xdx \\ y \neq 0 \end{cases} \right. \\ y = 0$$

Имеем, что $y = 0$ - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{x^2 + 2C}$$

Отметим, что решение $y = 0$ не получается из этой формулы ни при каком С, поэтому общее решение определяется их совокупностью

$$\left[\begin{array}{c} y = -\dfrac{2}{x^2 + 2C} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

• Уравнения с разделяющимися переменными

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x}$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \,\Bigg|\cdot \frac{dx}{y}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \\ y \neq 0 \end{cases} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Имеем, что $y = 0$ - решение уравнения, проверяется подстановкой в уравнение.

- **Уравнения с разделяющимися переменными**

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Потенцируем:

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C},\ e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^{C},\ \text{ пусть }\ e^{C} = C_1,$$

$$|y| = |x| \cdot C_1, \quad \text{ пусть }\ C_1 = \pm C_2$$

$$y = x \cdot C_2.$$

Если $C_2 = 0$, то $y = 0$, поэтому общее решение уравнения $y_{00} = x \cdot C_2$

Линейные уравнения

Определение: Уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

где $p(x), f(x)$ - непрерывные функции, называются **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Если $f(x) = 0$, то уравнение (1) называется **линейным однородным уравнением**.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется **линейным неоднородным уравнением**.

Метод подстановки

•

Рассмотрим уравнение вида: $y' + p(x)y = f(x)$ (1)

Пусть $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в уравнение (1).

Имеем: $$u'v + uv' + p(x)u \cdot v = f(x)$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

$v' + p(x)v = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \left| \cdot \frac{dx}{v} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dv}{v} = -p(x)dx, \\ \quad\quad\quad v' \neq 0 \\ \quad\quad\quad v = 0 \end{array} \right.$$

-

Метод подстановки

Интегрируем: $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \;\rightarrow\; \ln|v| = -\int p(x)dx + C.$

Потенцируем: $e^{\ln|v|} = e^{-\int p(x)dx+C}$

$$|v| = e^{-\int p(x)dx+C} \cdot C_1 \text{, где } C_1 = e^{c}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$v = e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 \text{, где } C_2 = \pm C_1.$$

- **Метод подстановки**

Подставим в уравнение (1) значение v, получим

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + u(-p(x)) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 + p(x)u \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2 = f(x)$$

$$u' = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 \text{, где } C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4,$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v = \left(\int f(x)\, e^{\int p(x)dx} \cdot C_3 dx + C_4\right) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot C_2$$

Метод подстановки

Пример: Решить уравнение $y' - y = e^x$

Решение:
$$y = u \cdot v \;\rightarrow\; y' = u'v + uv'$$
$$u'v + uv' - uv = e^x$$
$$u'v + u\,(v' - v) = e^x$$
$$(v' - v) = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv}{dx} = v \;\left|\frac{dx}{v}\right.$$
$$\frac{dv}{v} = dx$$
$$\ln|v| = x + C$$
$$|v| = e^x \cdot C_1\text{, где } C_1 = e^C$$
$$v_{o.o} = e^x \cdot C_2,\text{ где } C_2 = \pm C,$$
$$u' \cdot e^x \cdot C_2 + u \cdot e^x \cdot C_2 - u \cdot e^x \cdot C_2 = e^x$$

- **Метод подстановки**

$$u'e^{x}C_2 = e^{x} \;\; \rightarrow \;\; u'C_2 = 1$$

$$u' = C_3, \qquad \text{где} \quad C_3 = \frac{1}{C_2}$$

$$u = C_3x + C_4$$

Отсюда имеем:

$$y = u \cdot v \;\rightarrow\; y_{\text{о.н}} = (C_3x + C_4) \cdot e^{x} \cdot C_2$$

Метод вариации постоянной

Рассмотрим уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (1)$$

1. Пусть $f(x) = 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{p(x)y} \ \left|\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{y}}\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = -\mathrm{p(x)dx}$$

Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = -\int \mathrm{p(x)dx} \ \rightarrow \ \ln|\mathrm{y}| = -\int \mathrm{p(x)dx} + C_1$

Потенцируем: $|y| = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_2,\ C_2 = \mathrm{e}^{C_1}$

$$y_{0.0} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_3 = \pm C_2,$$

где $y_{0.0}$ – общее решение однородного уравнения.

Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{о.н} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) \qquad (2)$$

Подставим $y_{о.н}$ в уравнение (1), получим:

$$(\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x))\,' + p(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$(-\int \mathrm{p(x)dx})' \cdot \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) + \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3'(x) + p(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$-p(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) + \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3'(x) + p(x)\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3(x) = f(x)$$

$$\mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot C_3'(x) = \mathrm{f(x)}$$

$$C_3'(x) = \mathrm{f(x)} \cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{p(x)dx}}$$

Метод вариации постоянной

-

$$C_3(x) = f(x)\mathrm{e}^{\int \mathrm{p(x)dx}} dx \cdot C_4$$

3. Подставим $C_3(x)$ в равенство (2), получим:

$$y_{o.\text{н}} = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{p(x)dx}} \cdot \left[f(x)\mathrm{e}^{\int \mathrm{p(x)dx}} dx + C_4\right]$$

-общее решение неоднородного уравнения.

Метод вариации постоянной

Пример 1: Решить уравнение:

$$y' + 3y = e^{2x}$$

1. Рассмотрим уравнение $y' + 3y = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решим его и найдем общее решение однородного уравнения.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = -3\mathrm{y} \left| \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{y}} \right.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = -3dx$$

$$\ln|y| = -3x + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{-3x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = \mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3$$

Метод вариации постоянной

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.\text{н}} = \mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3(x)$$

Подставим $y_{o.\text{н}}$ в искомое уравнение, получим:

$$-3\mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3(x) + \mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3'(x) + 3\mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

$$\mathrm{e}^{-3x} \cdot C_3'(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

$$C_3'(x) = \mathrm{e}^{5x}$$

$$C_3(x) = \int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{dx} = \frac{1}{5} e^{5x} + C_4$$

Подставим $C_3(x)$ в $y_{o.\text{н}}$, получим

$$y_{o.\text{н}} = \mathrm{e}^{-3x} \cdot \left(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C_4\right)$$

Метод вариации постоянной

Пример 2. Решить уравнение:

Решение:
$$y' + y\cos x = \sin 2x$$

1. Рассмотрим уравнение $y' + y\cos x = 0$. Решим его:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{y}\cos \mathrm{x} \ \left| \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{y}} \right.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = -\cos x\, dx$$

$$\ln|y| = -\sin \mathrm{x} + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{-\sin x} \cdot C_2$$

$$y_{0.0} = \mathrm{e}^{-\sin x} \cdot C_3$$

2. Представим общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{o.\text{н}} = \mathrm{e}^{-\sin x} \cdot C_3(x)$$

Метод вариации постоянной

Подставим $y_{о.н}$ в искомое уравнение:

$$-\cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) + e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) + \cos x \cdot e^{-\sin x} \cdot C_3(x) = \sin 2x$$

$$e^{-\sin x} \cdot C_3'(x) = \sin 2x$$

$$C_3'(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$$

$$C_3(x) = \int e^{\sin x} \sin 2x \, dx = \int e^{\sin x}\, 2\sin x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int e^t \cdot t \, dt = \left| \begin{matrix} u = t & \to du = dt \\ dv = e^t dt & \to v = e^t \end{matrix} \right| = 2\left[te^t - \int e^t dt \right] =$$

$$= 2te^t - 2e^t + C_4 = 2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4$$

Подставим $C_3(x)$ в $y_{о.н}$, получим:

$$y_{о.н} = e^{-\sin x}\left[2\sin x \cdot e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C_4\right] = 2\sin x - 2 + C_4 \cdot e^{-\sin x}$$

Уравнение Бернулли

Определение 11. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n \,, n \neq 1$$

-называется **уравнением Бернулли**, где $p(x)$, $Q(x)$ - непрерывные функции.

Уравнение Бернулли сходится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка, следующей подстановкой:

$$z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n) \cdot y^{1-n-1} \cdot y'$$

$$z' = \frac{(1-n)y'}{y^n} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{y^n \cdot z'}{(1-n)}$$

$$\frac{y^n \cdot z'}{(1-n)} + p(x)y = Q(x) \cdot y^n \left| \cdot \frac{(1-n)}{y^n} \right.$$

$$z' + p(x)(1-n) \cdot y^{1-n} = Q(x)(1-n)$$

$$z' + p(x)(1-n) \cdot z = Q(x)(1-n)$$

-линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Уравнение Бернулли

Пример: Решить уравнение

Решение:

$$y' - 2xy = 3x^3y^2 \qquad (1)$$

$$p(x) = -2x, \qquad Q(x) = 3x^3\,, \qquad n = 2$$

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{z}$$

$$z' = -y^2 \cdot y' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow y' = -y^2 \cdot z' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} - 2x \cdot \frac{1}{z} = 3x^3 \cdot \frac{1}{z^2} \Big| \cdot (-z^2)$$

$$z' + 2xz = -3x^3 \qquad (2)$$

Метод вариации произвольной постоянной:

$$z' + 2xz = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -2xz \; \Bigg| \frac{dx}{z}$$

$$\frac{dz}{z} = -2xdx$$

- # Уравнение Бернулли

$$\ln|z| = -x^2 + C$$
$$e^{\ln|z|} = e^{-x^2+C}$$
$$|z| = e^{-x^2} \cdot C_1, \text{где } C_1 = e^C$$
$$z_{\text{о.о}} = e^{-x^2} \cdot C_2 \,, \; C_2 = \pm C_1$$
$$z_{\text{о.н}} = e^{-x^2} \cdot C_2(x)$$

Подставим $z_{\text{о.н}}$ в уравнение (2):

$$-2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) + e^{-x^2} \cdot C_2'(x) + 2x \cdot e^{-x^2} \cdot C_2(x) = -3x^3$$
$$e^{-x^2} \cdot C_2'(x) = -3x^3$$
$$C_2'(x) = -3x^3 \cdot e^{x^2}$$

Уравнение Бернулли

- $$C_2(x) = \int -3x^3 \cdot e^{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x^2=t \\ 2xdx=dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = -\frac{3}{2} \int e^t\,tdt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = t \;\; \rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \rightarrow v = e^t \end{matrix} \right| = -\frac{3}{2}\left[te^t - e^t\right] = -\frac{3}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right] + C_3$$

Тогда

$$\frac{1}{y} = z_{о.н} = e^{-x^2}\left[\left(-\frac{3}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right)\right) + C_3\right]$$

$$y = \frac{1}{e^{-x^2}\left[\left(-\frac{3}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right)\right) + C_3\right]}$$

• Уравнение в полных дифференциалах

Определение 12. Уравнение вида:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где правая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$ в некоторой области называется ***уравнением в полных дифференциалах***.

То есть: $d\,F(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F'_x dx + F'_y dy$

Если

$$P'_y = Q'_x \text{, то есть } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

То

$$\begin{cases} F'_x = P(x,y) \to F(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y) \\ F'_y = Q(x,y) \to \left[\int P(x,y)dx + C(y)\right]_y = Q(x,y) \to \end{cases}$$

-

$$C'(y) = Q(x,y) - \left[\int P(x,y)dx\right]_y'$$

$$C(y) = \int (Q(x,y) - \left[\int P(x,y)dx\right]_y' \,) \, dy + C_1$$

Подставим $C(y)$ в $F(x,y)$. Получим:

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \int (Q(x,y) - \left[\int P(x,y)dx\right]_y' \,) \, dy + C_1$$

Данное уравнение принимает вид $dF(x,y) = 0$, а его общее решение определяется уравнением:

$F(x,y) = C_2$ или $\int P(x,y)dx + \int (Q(x,y) - \left[\int P(x,y)dx\right]_y' \,) \, dy + C_1 = C_2$

пусть $C_2 - C_1 = C_3$, тогда

$$\int P(x,y)dx + \int (Q(x,y) - \left[\int P(x,y)dx\right]_y' \,) \, dy = C_3$$

Уравнение в полных дифференциалах

Пример: Решить уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

Решение:

Здесь $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2, \quad \mathrm{Q(x, y)} = 6x^2y + 4y^3$

Имеем $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = P'_y = 12xy, \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = Q'_x = 12xy$

то есть
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

То выражение $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$.

То есть $\mathrm{d}F(x, y) = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy$

Уравнение в полных дифференциалах

- Тогда $$F'_x = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$$

$$F(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y)$$

Но $F'_y = Q(x,y)$, тогда имеем:

$$\left(x^3 + 3x^2y^2 + C(y)\right)'_y = 6x^2y + 4y^3$$

$$6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$C'(y) = 4y^3$$

$$C(y) = \int 4y^3dy = y^4 + C_1$$

Подставим $C(y)$ в $F(x,y)$, получим :

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1$$

Данное уравнение принимает вид d$F(x,y) = 0$, а его общее решение определяется уравнением:

$$F(x,y) = C_2 \quad \text{или} \quad x^3 + 3x^2y + y^4 + C_1 = C_2$$

Пусть $C_2 - C_1 = C_3$, тогда $x^3 + 3x^2y + y^4 = C_3$