МБОУ СОШ №43 г. Белгорода

Решение уравнений

Трифонов Сергей Викторович – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Трифонова Наталья Владимировна – учитель математики (I квалификационная категория, МОУ-СОШ №43 г.Белгорода)

Решение уравнений

Уравнение-следствие ⇒

Равносильные преобразования ⇔

Использование свойств соответствующих функций

Конечная ОДЗ

Оценка левой и правой части

Использование монотонности функции

«Ищи квадратный трехчлен»

Уравнение-следствие

Для получения уравнения-следствия достаточно посмотреть на заданное уравнение как на верное числовое равенство и гарантировать, что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство

При использовании уравнений-следствий проверка подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения.

Пример:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

Решение:

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x},$$

$$x + 1 = \left(1+\sqrt{4-x}\right)^2,$$

$$x + 1 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x,$$

$$2x - 4 = 2\sqrt{4-x},$$

$$x - 2 = \sqrt{4-x},$$

$$(x-2)^2 = 4 - x,$$

$$x^2 - 3x = 0,$$

$$x(x-3) = 0,$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$

Посмотрим на данное уравнение как на верное числовое равенство. А именно: если в верном числовом равенстве перенести член из одной части в другую с противоположным знаком, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Если оби части верного неравенства разделить на число 2≠0, то равенство не нарушится.

Если числа равны то и квадраты равны.

Раскрывая скобки и перенося все члены в одну сторону, мы снова получаем верное равенство, откуда находим корни неполного квадратного уравнения

Поскольку для решения уравнения мы использовали уравнение-следствие, то в решение входит также проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение

Проверка:

При x=0

получаем неверное равенство (-1=1)

При x=3

получаем верное равенство (1=1)

Ответ: 3

СХЕМА ВЫПОЛНЕНИЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ

1. Учесть ОДЗ исходного уравнения
2. Гарантировать (на ОДЗ) прямые и обратные преобразования

Пример:

$$\log_{2x-1}(x^2+3x+7)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x+7)>0, \\ 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x^2+3x+7=(2x-1)^2 \end{cases}$$

ОДЗ

$\Leftrightarrow$

Равносильные преобразования

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x^2+3x+7=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ 3x^2-7x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=- \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=3$$

Ответ: 3.

Т.к. $x^2+3x+7=(2x-1)^2$ значит $(x^2+3x+7)>0$

Конечная ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения

У некоторых уравнений область определения состоит только из конечного числа точек. Для решения таких уравнений достаточно проверить, не являются ли найденные числа из области определения уравнения корнями этого уравнения.

Пример:

$$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$$

ОДЗ $\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ 2-2x^2\ge 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2\ge 1, \\ x^2\le 1. \end{cases}$

Эта система выполняется только при x^2=1, тогда $x=\pm 1$

Решения уравнения могут находиться только внутри ОДЗ, т.е. среди чисел $x=1$ и $x=-1$.

Проверяем эти числа:
$x=1$ - корень уравнения (1=1)
$x=-1$ не является корнем уравнения (-1≠1)

Ответ: 1.

Оценка левой и правой части уравнения

Позволяет решать уравнения вида $f(x) = g(x)$, при условии, что
$f(x) \le a, \qquad g(x) \ge a$

Пример: $x^2 + 2^{|x|} = 1$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

Пример: $\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg\left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right) = 0$

$x^2+2^{|x|}=1$

Решение:

$x^2+2^{|x|}=1 \Leftrightarrow 2^{|x|}=1-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|}=1, \\ 1-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Ответ: x=0

$f(x)=2^{|x|}\geq 1$ (т. к. $|x|\geq 0$),

$g(x)=1-x^2\leq 1$

$$\sqrt{x-2}+|x^3-8|+\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=0$$

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \geq 0, \\ |x^3-8| \geq 0, \\ \lg(1+\sqrt{x^2-4}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ |x^3-8| = 0, \\ \lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: x=2

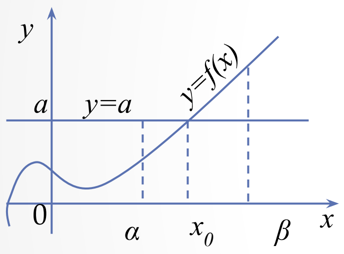
Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.

……………	

Использование монотонности функции

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

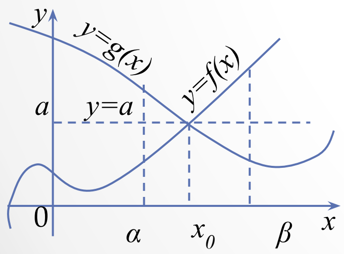
Теорема 1



Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:

Теорема 2



Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке

Пример:

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень $x=1$
т. к. $\sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, т.е. 2=2

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

Единственный корень,
т.к. функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей О.О. $x \geq 0$)

Ответ: $x=1$.

$$2^x = 6 - x$$

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

Уравнение имеет корень *x=2*
т. к. $2^2 = 6 - 2$, т. е. $4 = 4$

2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет

единственный корень
т. к. $f(x) = 2^x$ - возрастает,
а $g(x) = 6 - x$ – убывает.

Ответ: *x=2*

«Ищи квадратный трёхчлен»

Попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной
(или какой-либо функции)

$$4^x - (7 - x)2^x + 12 - 4x = 0$$

Решение:

Запишем, что $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем
$t^2 - (7 - x)t + 12 - 4x = 0.$
Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t.
$D = (7 - x)^2 - 4(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$
$t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x+1)}{2},$
$t_1 = 4,\ t_2 = 3 - x.$
Обратная замена даёт:
$2^x = 4$ (отсюда $x=2$)
или $2^x = 3 - x$
$x=1$ (так как $f(x) = 2^x$ - возрастает, а $g(x) = 3 - x$ – убывает).
Ответ: 1; 2.

Используемая литература

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Е.П.Нелин Методы решения алгебраических задач *(приложение к учебному пособию «Алгебра в таблицах»)*

Используемые иллюстрации

- Е.П.Нелин Алгебра в таблицах 7-11, «Определения, свойства, методы решения задач в таблицах»;
- Office.com – кнопки для навигации по сайту.