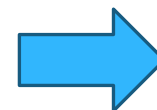


# Граф и его элементы

Основные определения

- \* Переход по слайдам осуществляется только по нажатию левой кнопки мыши клик мыши!!!
- \* Если есть мигающая стрелка, значит нужно нажатие левой кнопки мыши в любом месте слайд для продолжения презентации!!!!



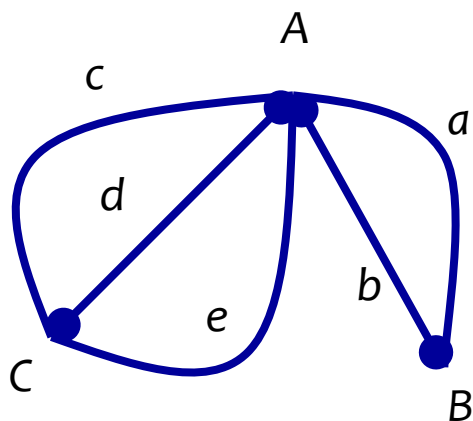
- \* После прочтения удалить слайд!

**ГРАФОМ  $G = (V, X)$  НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.**

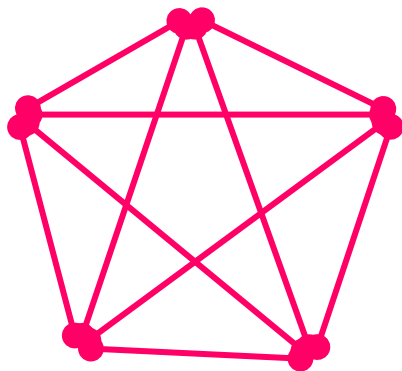
Впервые понятие «граф» ввел в 1936 г. венгерский математик **Денни Кёниг**. но первая работа по теории графов принадлежала перу великого **Леонарда Эйлера** и была написана еще в 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

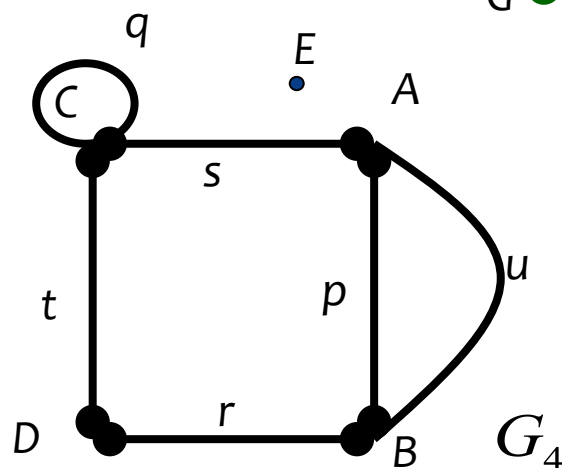
## ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



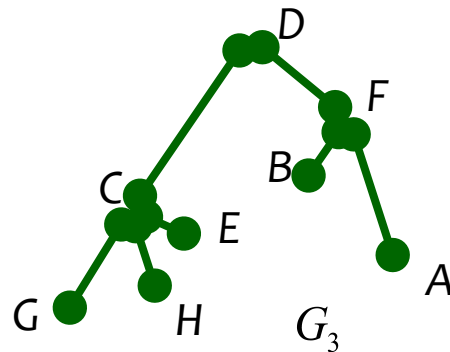
$G_1$



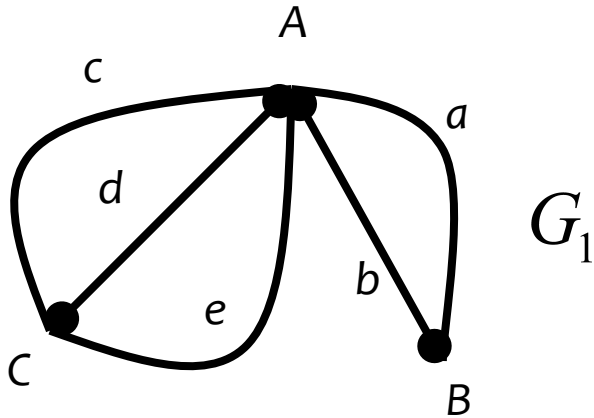
$G_2$



$G_4$



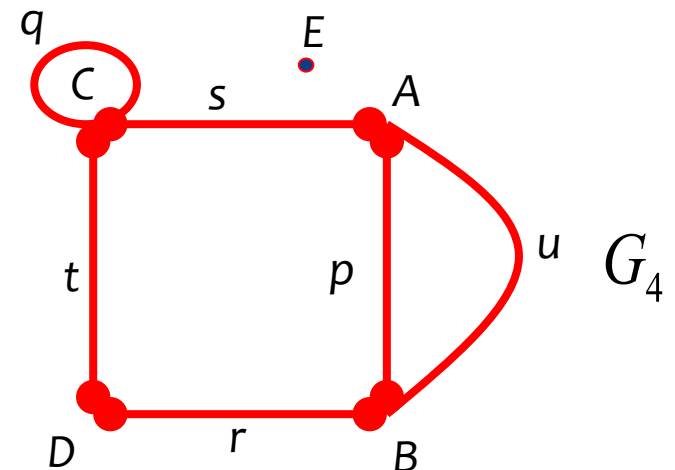
ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ ИНЦИДЕНТНО. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ СМЕЖНЫМИ, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.



$G_1$

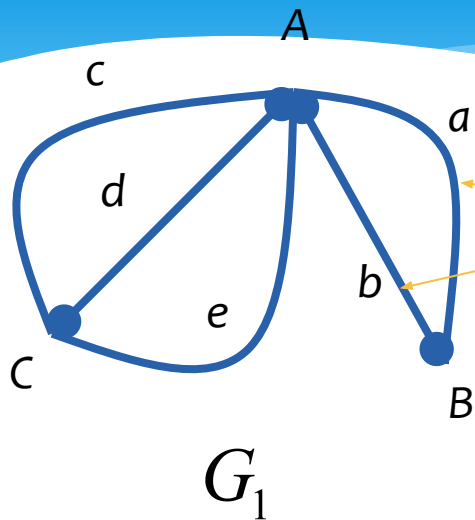
ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ** (у графа петля –  $q(C,C)$ ).

НА РИСУНКЕ СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ A и B, A и C; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА c и d, a и b.

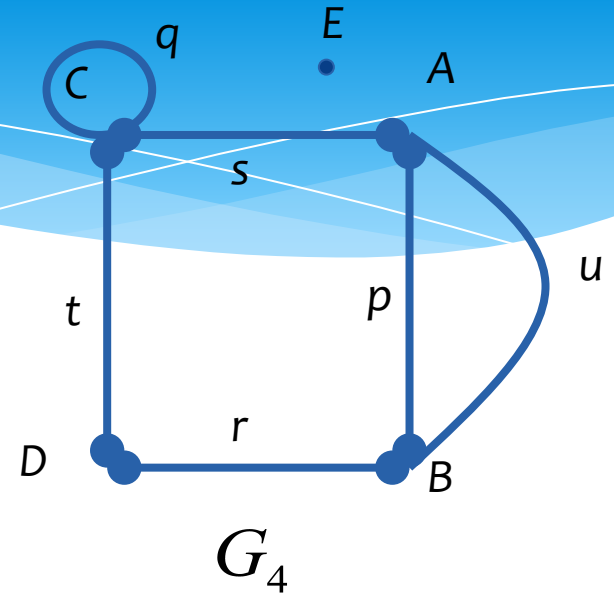


$G_4$

ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



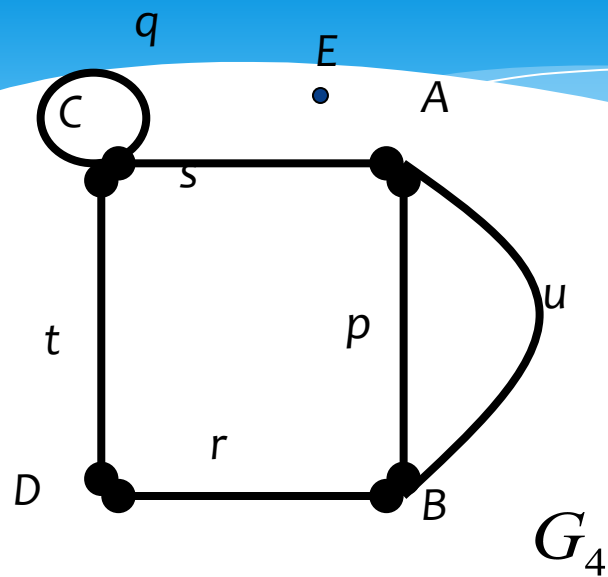
КРАТНЫЕ  
РЕБРА



ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ  $A$ , НАЗЫВАЕТСЯ **СТЕПЕНЬЮ** ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ  $deg(A)$ .

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

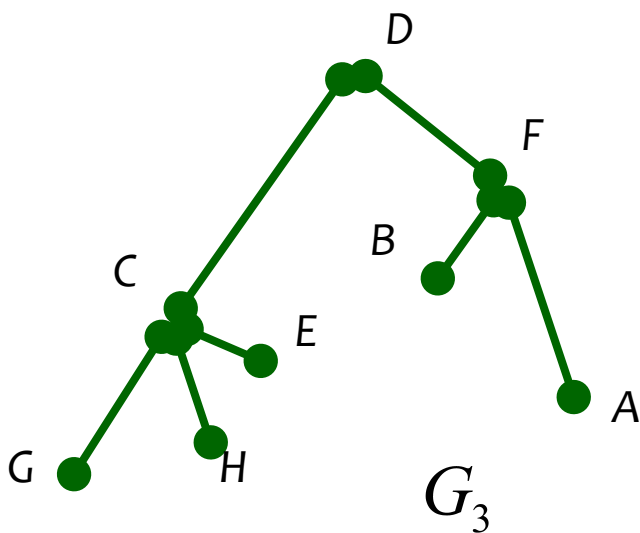
$$\begin{aligned} deg(A) &= 3; \\ deg(B) &= 3; \\ deg(C) &= 4; \\ deg(D) &= 2; \\ deg(E) &= 0. \end{aligned}$$



$$\deg(E) = 0$$



**Е – ИЗОЛИРОВАННАЯ  
ВЕРШИНА**



$$\deg(G) = 1$$

$$\deg(H) = 1$$

$$\deg(E) = 1$$

$$\deg(B) = 1$$

$$\deg(A) = 1$$



**G, H, E, B, A -  
ВИСЯЧИЕ  
ВЕРШИНЫ**

# ТЕОРЕМА

В ГРАФЕ  $G(V, X)$  СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:

$$\sum_{i=1}^n \deg(V_i) = 2m$$

ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ** (НЕЧЕТНОЙ), ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

# ТЕОРЕМА

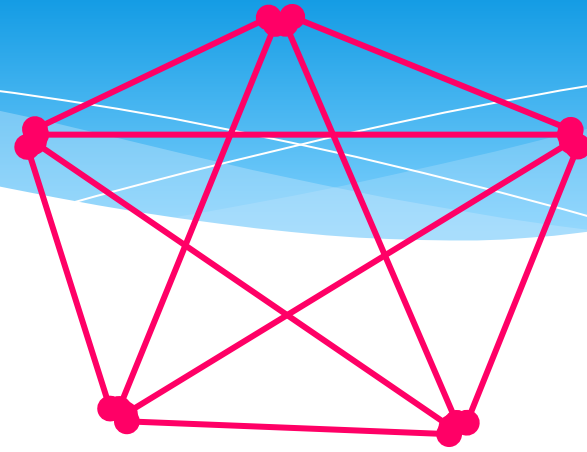
ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.

# СЛЕДСТВИЕ

НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

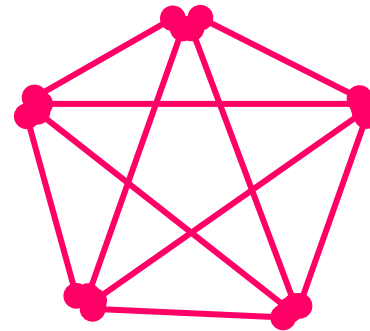


ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.



$G_2$

**ДОПОЛНЕНИЕМ** ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



$G_5$

$G_2$



ДОПОЛНЕНИЕ

# ОРГРАФ

КОНЕЦ ДУГИ

(A,B)

B

## ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ

(ОРГРАФ) — ГРАФ, РЕБРАМ

КОТОРОГО ПРИСВОЕНО

НАПРАВЛЕНИЕ.

НАПРАВЛЕННЫЕ РЕБРА

НАЧАЛО ДУГИ  
(A,B)

ИМЕНУЮТСЯ **ДУГАМИ**.

СТЕПЕНИ ВХОДА  
ВЕРШИН ГРАФА  
(см. рис.):

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА  
ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

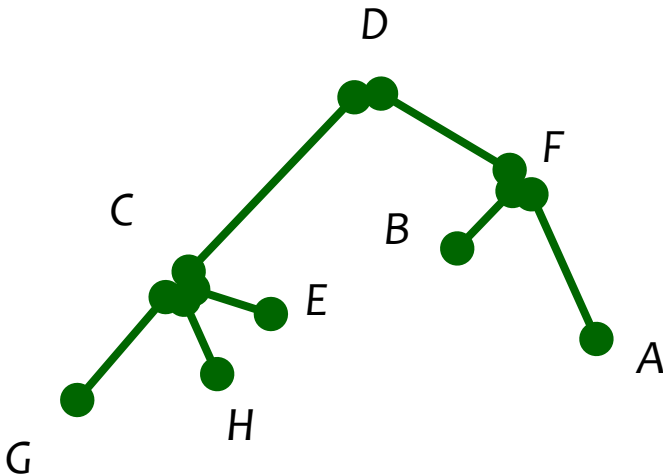
$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

**СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА)** ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

Последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется **маршрутом**.

Число ребер маршрута называется **длиной маршрута**.



**HCDFD – МАРШРУТ  
ДЛИНОЙ 4.**

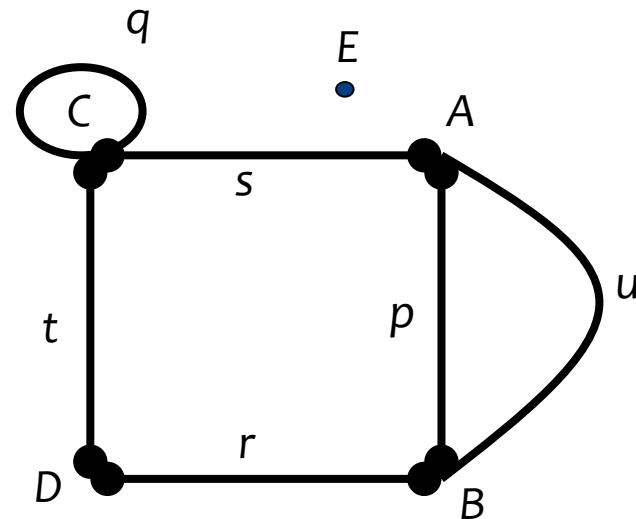
Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется **замкнутым** или **циклом**.

Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется **цепью**.

$(t, s, p, r)$  – 4-ЦИКЛ

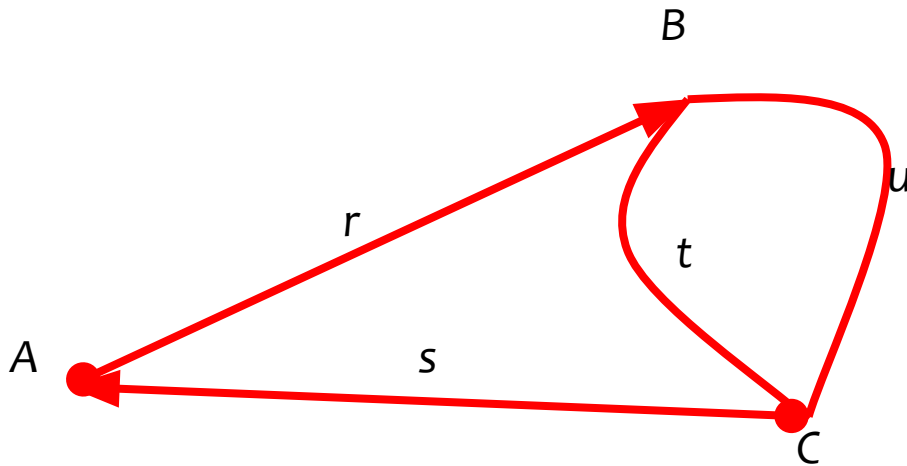
$(t, s, u, r, t, s, p, r)$  – 8-ЦИКЛ

петля  $(q)$  – 1-ЦИКЛ



$(t, s, p)$  – 3-ЦЕПЬ

**Путь** – упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.



$(u, s, r, t)$  – 4-путь

$(r, u)$  – 2-путь

$(s, r, t)$  и  $(u, s, r)$  – 3-циклы

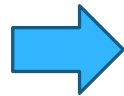
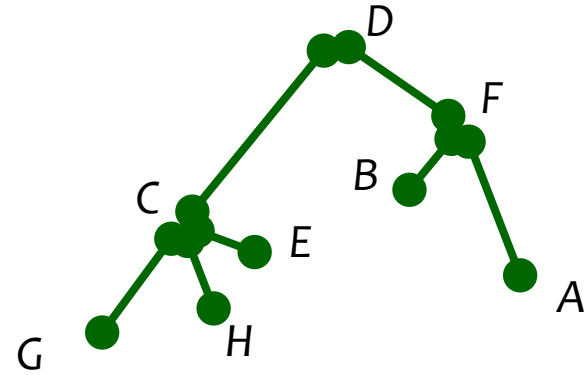
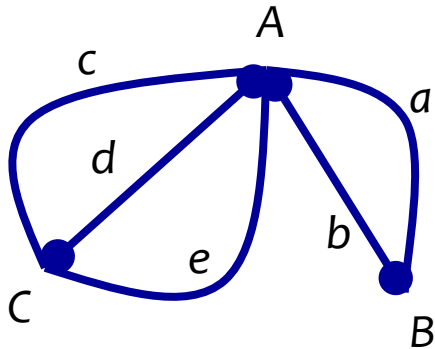
**ЦИКЛ** В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

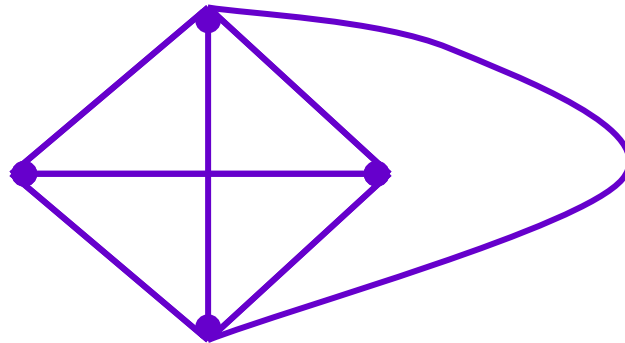
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

**ТЕОРЕМА** *для того, чтобы связный граф являлся простым циклом, необходимо и достаточно, чтобы каждая его вершина имела степень, равную 2.*

ГРАФ  $G$  НАЗЫВАЕТСЯ ПЛАНАРНЫМ (ПЛОСКИМ), ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ  $G'$ , В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.



**ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ**

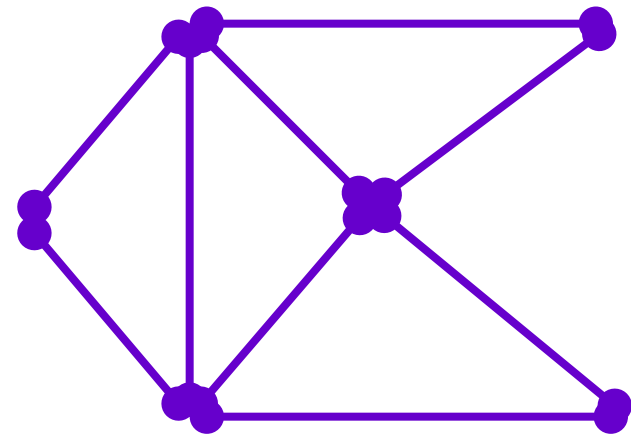


**ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ (ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.**

**ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ.**

## ТЕОРЕМА

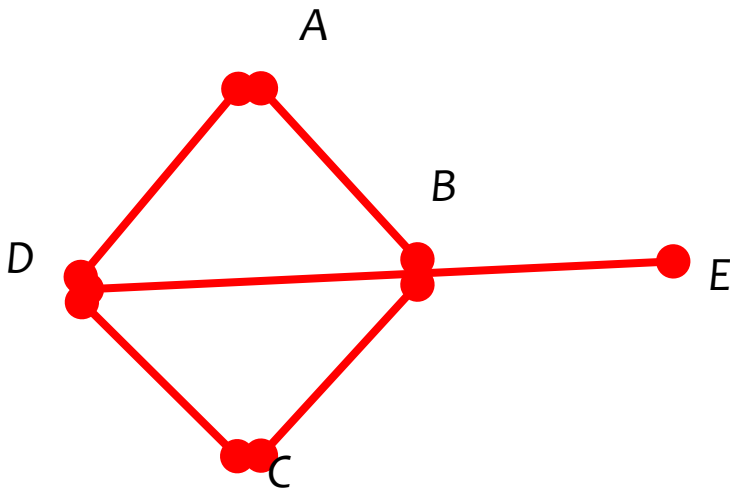
**ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.**





**ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА**  
НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ  
КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ,  
НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.



*(C, D, A, B, E) –  
гамильтонов путь*

**МАТРИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ** ГРАФА  $G$  НАЗЫВАЮТ ТАБЛИЦУ  $B$ , СОСТОЯЩУЮ ИЗ  $n$  СТРОК(ВЕРШИНЫ) И  $m$  СТОЛБЦОВ(РЕБРА), В КОТОРОЙ:

- **ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$b_{ij} = 1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $v_j$  ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ  $x_i$

$b_{ij} = 0$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $v_j$  НЕ ИНЦИДЕНТНА РЕБРУ  $x_i$

- **ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА:**

$b_{ij} = 1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $v_i$  ЯВЛЯЕТСЯ НАЧАЛОМ ДУГИ  $x_j$

$b_{ij} = 0$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $v_j$  НЕ ИНЦИДЕНТНА ДУГЕ  $x_j$

$b_{ij} = -1$ , ЕСЛИ ВЕРШИНА  $v_i$  ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ ДУГИ  $x_j$

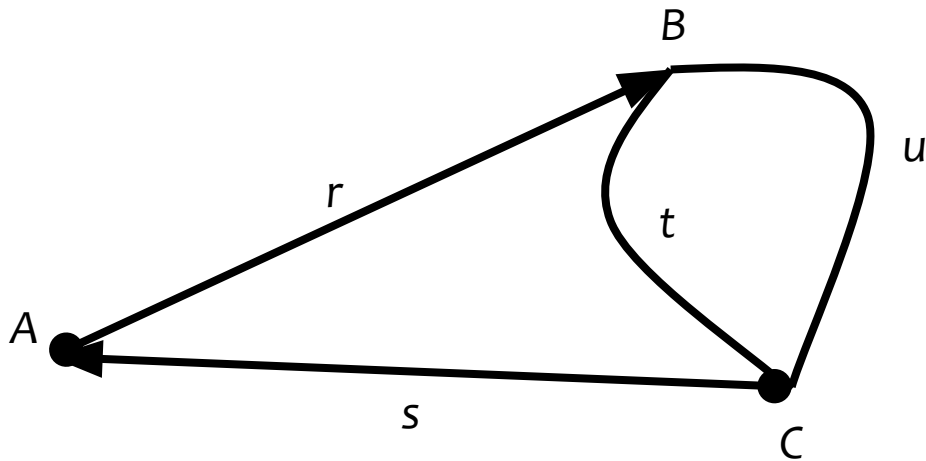
**МАТРИЦЕЙ СМЕЖНОСТИ** ГРАФА  $G(V, X)$  БЕЗ  
КРАТНЫХ РЕБЕР НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНУЮ

МАТРИЦУ  $A$  ПОРЯДКА  $n$ , В КОТОРОЙ:

$$a_{ij} = 1, \text{ ЕСЛИ } (v_i, v_j) \in X$$

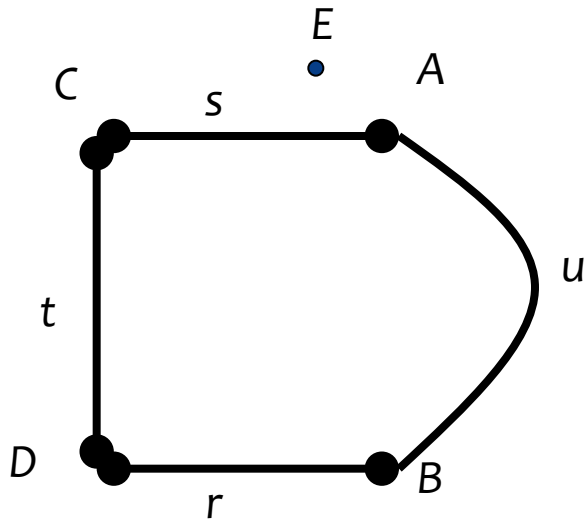
$$a_{ij} = 0, \text{ ЕСЛИ } (v_i, v_j) \notin X$$

СЛЕДУЮЩИЙ ОРГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ  
ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	r	s	t	u
A	1	-1	0	0
B	-1	0	1	1
C	0	1	-1	-1

# СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФ ЗАДАЕТСЯ ТАБЛИЦЕЙ ИНЦИДЕНТНОСТИ:



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	0
E	0	0	0	0	0