

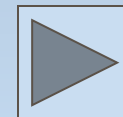


# «Касательная к графику функции»

ВЫПОЛНИЛ: учитель математики высшей  
категории МОУ «СОШ №1»

Города Магнитогорска

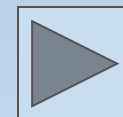
Пупкова Татьяна Владимировна



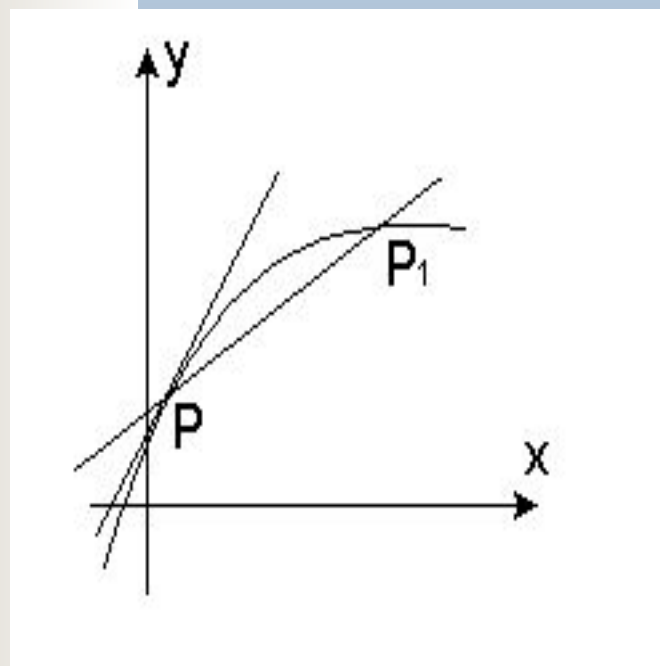


# Содержание

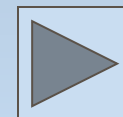
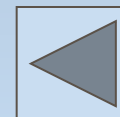
1. Определение касательной к графику функции.
2. Уравнение касательной к графику функции в общем виде.
3. Алгоритм составления касательной к графику функции.
4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
5. Касательная проходит через точку, лежащую на данной прямой.
6. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной прямой.
7. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой.
8. Касательная является общей для двух кривых.
9. Является ли данная прямая касательной к графику функции  $y=f(x)$ ?



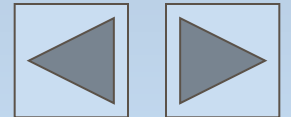
# Определение касательной к графику функции $y=f(x)$



Пусть дана некоторая кривая и точка  $P$  на ней. Возьмем на этой кривой другую точку  $P_1$  и проведем прямую через точки  $P$  и  $P_1$ . Эту прямую называют секущей. Будем приближать точку  $P_1$  к  $P$ . Положение секущей  $PP_1$  будет меняться (стремиться к точке  $P$ ) предельное положение прямой  $PP_1$  и будет касательной к кривой в точке  $P$ .

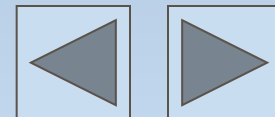


Уравнение вида  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$   
является уравнением касательной  
к графику функции.



# Алгоритм составления касательной к графику функции $y=f(x)$

1. Обозначить буквой  $a$  абсциссу точки касания.
2. Найти  $f(a)$ .
3. Найти  $f'(x)$  и  $f'(a)$ .
4. Подставить найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ ,  $f'(a)$  в общее уравнение касательной  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

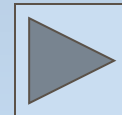
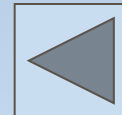


# Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Пусть даны две прямые:  $y_1=k_1x+b_1$  и  $y_2=k_2x+b_2$ .

Если  $k_1=k_2$ , то прямая  $y_1$  параллельна  $y_2$ .

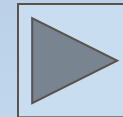
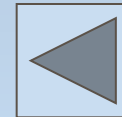
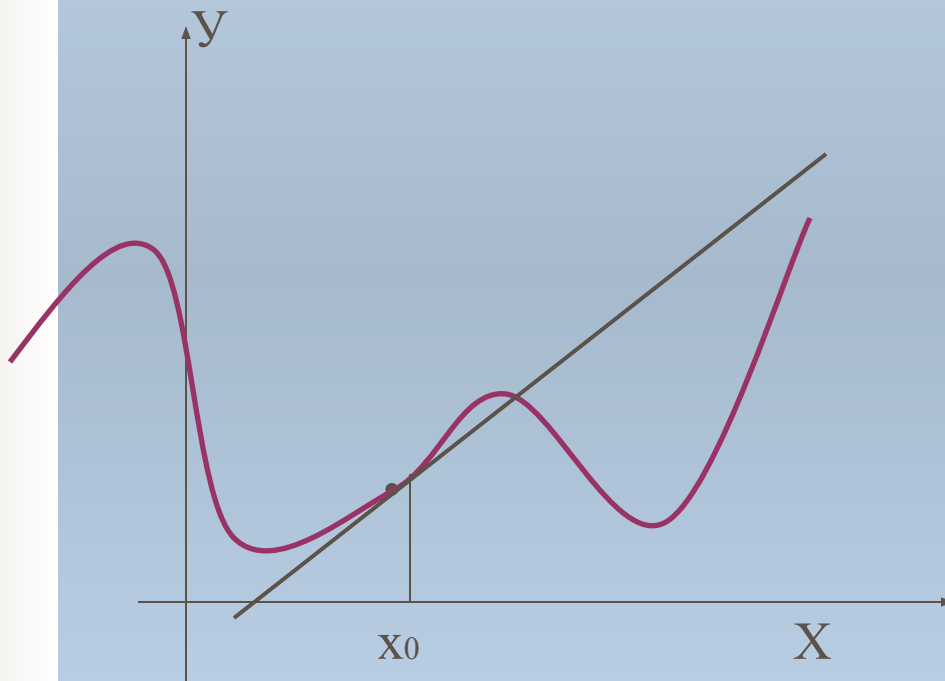
Если  $k_1 \cdot k_2=-1$ , то данные прямые взаимно перпендикулярны



# Рассмотрим возможные типы задач на касательную



# 1. Касательная проходит через точку, лежащую на данной кривой

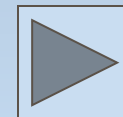
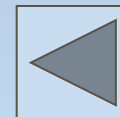






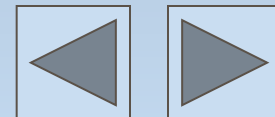
Даны дифференцируемая функция  $y=f(x)$  и

- 1) абсцисса точки касания;
- 2) ордината точки касания;
- 3) абсцисса точки касания задана как пересечение двух графиков функций;
- 4) абсцисса точки касания задана как корень данного уравнения.



## Решение таких задач сводится:

- 1) к последовательному отысканию  $f(a)$  и  $f'(a)$ ;
- 2) решая уравнение  $f(a)=y_0$ , находим  $a$ ;
- 3) находим точки пересечения двух графиков; решая уравнение  $f(x)=g(x)$ ;
- 4) находим корень данного уравнения.



**Ключевая задача 1.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y=x^2-2x-3$  в точке с абсциссой  $x_0=2$ .

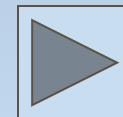
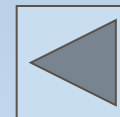
**Решение.** 1. Обозначим абсциссу точки касания  $a$ , тогда  $a=2$ .

2. Найдем  $f(a)$ :  $f(a)=2^2-2\cdot 2-3$ ,  $f(a)=-3$ .

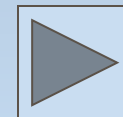
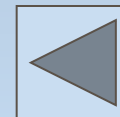
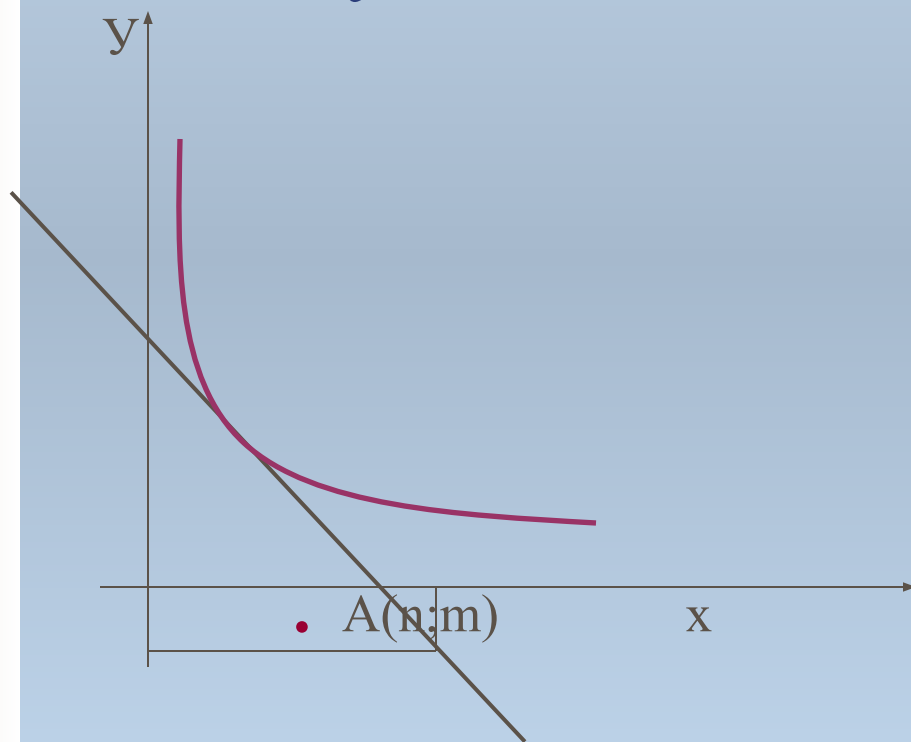
3. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :  $f'(x)=2x-2$ ,  $f'(a)=2$ .

4. Подставим найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ , в общее уравнение касательной  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ :  $y=-3+2(x-2)$ ,  
 $y=-3+2x-4$ ,  $y=2x-7$  – уравнение касательной.

**Ответ:**  $y=2x-7$ .



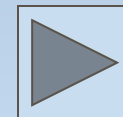
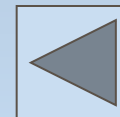
## 2. Касательная проходит через точку, не лежащую на данной кривой





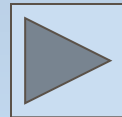
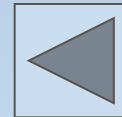
Даны дифференцируемая функция  $y=f(x)$  и

- 1) точка  $A(n;m)$  через которую проходит касательная;
- 2) точка  $A(n;m)$  задана как пересечение двух графиков функций;
- 3) точка  $A(n;m)$  задана как корень системы уравнений.



Решение таких задач основывается на том, что координаты точки  $A(n;m)$  должны удовлетворять искомому уравнению касательной:

- 1) решая уравнение  $m=f(a)+f'(a)(m-a)$  найдем  $a$  и, таким образом, приходим к задаче первого типа;
- 2) находим точки пересечения двух графиков, решая уравнения  $f(x)=g(x)$  и  $y=g(x)$  или  $y=f(x)$ ;
- 3) находим корень данной системы уравнений.



**Ключевая задача 2.** Напишите уравнение всех касательных к графику функции  $y = x^2 + 4x + 6$  проходящих через точку  $M(-3; -1)$ .

**Решение.** 1. Точка  $M(-3; -1)$  не является точкой касания, так как  $f(-3) = 3$ .

2.  $a$  – абсцисса точки касания.

3. Найдем  $f(a)$ :  $f(a) = a^2 + 4a + 6$ .

4. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :  $f'(x) = 2x + 4$ ,  $f'(a) = 2a + 4$ .

5. Подставим числа  $a$ ,  $f(a)$ , в общее уравнение касательной

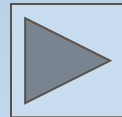
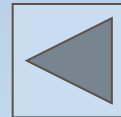
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$ :  $y = a^2 + 4a + 6 + (2a + 4)(x - a)$  – уравнение касательной.

Так как касательная проходит через точку  $M(-3; -1)$ , то  $-1 = a^2 + 4a + 6 + (2a + 4)(-3 - a)$ ,  
 $a^2 + 6a + 5 = 0$ ,  $a = -5$  или  $a = -1$ .

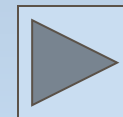
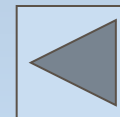
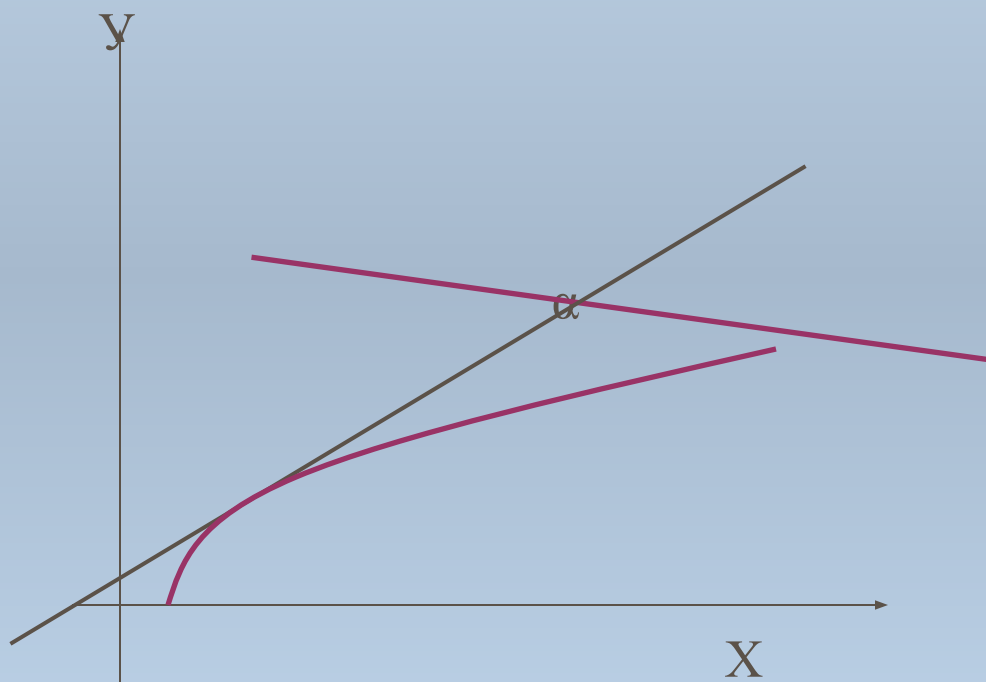
Если  $a = -5$ , то  $y = -6x - 19$  – уравнение касательной.

Если  $a = -1$ ,  $y = 2x + 5$  – уравнение касательной.

**Ответ:**  $y = -6x - 19$ ,  $y = 2x + 5$ .



### 3. Касательная проходит под некоторым углом к данной прямой

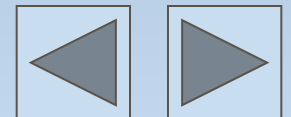




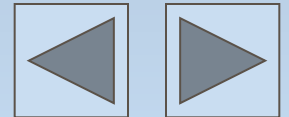



Даны дифференцируемая функция  $y=f(x)$  и

- 1) значение производной в точке касания  $f'(a)$ ;
- 2) указан угловой коэффициент касательной;
- 3) задан угол, между касательной к графику функции и данной прямой.



Решая уравнение  $f'(a)=k$  или  $f'(a)=\operatorname{tg}\alpha$   
(если задан угол  $\alpha$ ) находим  
ВОЗМОЖНЫЕ значения  $a$ .





**Ключевая задача 3.** Напишите уравнения всех касательных к графику функции  $y=x^2-2x-8$ , параллельных прямой  $y=-4x-4$ .

**Решение.** 1. Обозначим абсциссу точки касания  $a$ .

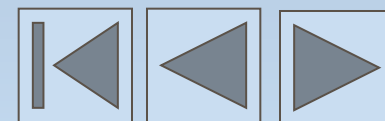
2. Найдем  $f(a)$ :  $f(a)=a^2-2a-8$ .

3. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :  $f'(x)=2x-2$ ,  $f'(a)=2a-2$ .

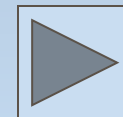
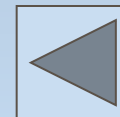
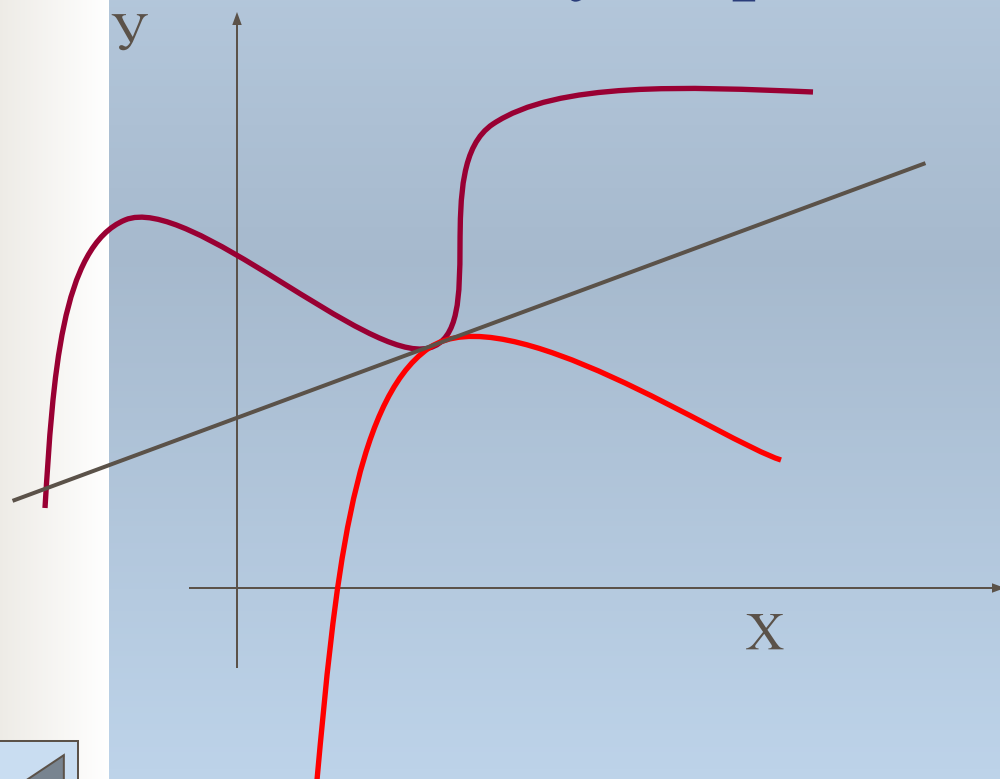
Но, с другой стороны,  $f'(a)=-4$  (условие параллельности). Решив уравнение  $2a-2=-4$ , получим  $a=-1$ ,  $f(a)=-5$ .

Подставим найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ , в общее уравнение касательной  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ :  $y=-5-4(x+1)$ ,  
 $y=-4x-9$  – уравнение касательной.

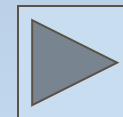
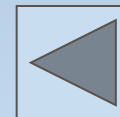
**Ответ:**  $y=-4x-9$ .



## 4. Касательная является общей для двух кривых



Даны дифференцируемые функция  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$ . Нужно найти уравнения общих касательных к графику этих функций.

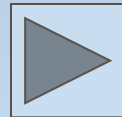
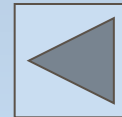


## 1 способ.

Такие задачи можно решать с помощью необходимого и достаточного признака того, что прямая  $y=kx+b$  является касательной к графику функции  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$ . Тогда задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} f(m)=km+b, \\ g(n)=kn+b, \\ f'(m)=k, \\ g'(n)=k, \end{cases}$$

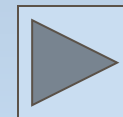
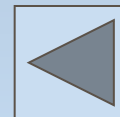
где  $(m;f(m))$  и  $(n;g(n))$  – точки касания искомой прямой с графиками функций  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$  соответственно. Решив систему, получим возможные значения  $k$  и  $b$  и запишем уравнения общих касательных в виде  $y=kx+b$ .



## 2 способ.

- 1) Находим уравнение касательной к графику функции  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $a$ .
- 2) Находим уравнение касательной к графику функции  $y=g(x)$  в точке с абсциссой  $a$ .
- 3) Полученные прямые должны совпадать, т. е. решаем систему:

$$\begin{cases} k_1=k_2, \\ b_1=b_2. \end{cases}$$



**Ключевая задача 4.** Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций  $y=x^2+x+1$  и  $y=0,5(x^2+3)$ .

**Решение.** I 1.  $a$  – абсцисса точки касания графика функции  $y=x^2+x+1$

2. Найдем  $f(a)$ :  $f(a)=a^2+a+1$ .

3. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :  $f'(x)=2x+1$ ,  $f'(a)=2a+1$ .

4. Подставим  $a$ ,  $f(a)$ , в общее уравнение касательной  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ :  $y=a^2+a+1+(2a+1)(x-a)$ ,  $y=(2a+1)x-a^2+1$  – уравнение касательной.

II. 1.  $c$  – абсцисса точки касания графика функции  $y=0,5(x^2+3)$ .

2. Найдем  $f(c)$ :  $f(c)=0,5c^2+1,5$ .

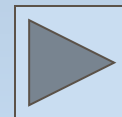
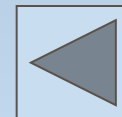
3. Найдем  $f'(x)$  и  $f'(c)$ :  $f'(x)=x$ ,  $f'(c)=c$ .

4. Подставим  $a$ ,  $f(a)$ , в общее уравнение касательной  $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ :  $y=0,5c^2+1,5+c(x-c)$ ,  $y=cx-0,5c^2+1,5$  – уравнение касательной.


Так как касательная общая, то 
$$\begin{cases} 2a+1=c, \\ -a^2+1=-0,5c^2+1,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=1, \\ a=0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c=-3 \\ a=-2 \end{cases}$$

Итак,  $y=x+1$  и  $y=-3x-3$  общие касательные.

**Ответ:**  $y=x+1$  и  $y=-3x-3$ .

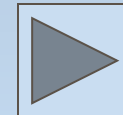
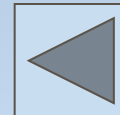






# Является ли данная прямая касательной к графику функции $y=f(x)$ ?

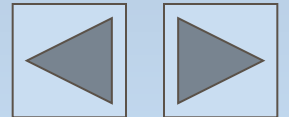
Даны дифференцируемая функция  $y=f(x)$  и уравнение  
прямой  $y=kx+b$ . Выясните, является ли данная прямая  
касательной к графику функции  $y=f(x)$ .





## 1 способ.

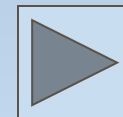
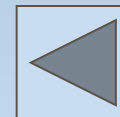
Если  $y=kx+b$  – уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой  $a$ , то  $f'(a)=k$ . Решив это уравнение, находим  $a$  и задача сводится к решению первого типа задач на касательную. Полученное уравнение сравнивается с данным уравнением прямой.



2 способ.

Прямая  $y=kx+b$  является касательной к графику функции  $y=f(x)$  в том и только том случае, если существует такое значение  $a$ , при котором совпадают значения данных функций и значения их производных, т. е. Совместна система

$$\left\{ \begin{array}{l} f(a)=ka+b, \\ f'(a)=k. \end{array} \right.$$





Представим разработанную систему  
задач в виде схемы.

