



Математическое  
моделирование и  
проектирование

Светлов Николай Михайлович

E-mail [svetlov@timacad.ru](mailto:svetlov@timacad.ru)

<http://svetlov.timacad.ru>



# План

1. Цели и содержание курса
2. Методика преподавания
3. Типология математических моделей, применяемых в агрономии, и методов их исследования
4. Моделирование минерального питания растений
5. Моделирование сочетания культур
6. Моделирование системы земледелия
7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома



# 1. Цели и содержание курса

## Цели

Развитие способности к формальному представлению исследуемых процессов и явлений

Овладение системной научной парадигмой и методологией перспективизма

Воспитание хозяйского отношения к делу

# 1. Цели и содержание курса



## 2. Методика преподавания

№ п/п	№ модуля и модульной единицы дисциплины	№ и название лабораторных/ практических/ семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий	Вид контрольного мероприятия	Кол-во часов
1.	<b>Модуль 1.</b> (Проектирование элементов системы земледелия)		Тестирование	0,5
	Модульная единица 1. (Моделирование минерального питания растений)	Лабораторная работа № 1. (Моделирование минерального питания растений)	Защита	4
	Модульная единица 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве)	Лабораторная работа № 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве)	Защита	3,5
2.	<b>Модуль 2.</b> (Основы комплексного проектирования системы земледелия)		Тестирование	0,5
	Модульная единица 3 (Моделирование системы земледелия)	Лабораторная работа № 3 (Моделирование системы земледелия)	Защита	3,5



## 2. Методика преподавания

№ п/п	№ модуля и модульной единицы дисциплины	№ и название лабораторных/практических/семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий	Вид контрольного мероприятия	Кол-во часов
3.	<b>Модуль 3.</b> (Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома)		Коллоквиум	<b>1</b>
	Модульная единица 4а (Моделирование севооборота)	Лабораторная работа № 4а (Моделирование севооборота)	Защита	3
	Модульная единица 4б (Моделирование роста и развития растений)	Лабораторная работа № 4б (Моделирование роста и развития растений)	Защита	
	Модульная единица 4в (Международный опыт моделирования в агрономии)	Лабораторная работа № 4в (Международный опыт моделирования в агрономии)	Защита	

## 2. Методика преподавания

Оценка дифференцированного зачёта выставляется на основании результатов защиты лабораторных работ, тестирования и коллоквиума

Преподаватель вправе объединить тестирование и коллоквиум по некоторым или всем модулям в одно контрольное мероприятие



# 2. Методика преподавания

## Литература

1. Франс Дж., Торнли Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
2. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др. СПб.: ИТК ГРАНИТ, 2009.

## Учебные материалы в сети Internet

<http://svetlov.timacad.ru/umk8/umk.htm>

Рабочая программа учебной дисциплины

Компьютерные презентации к лекциям

Задания к лабораторным работам



# 3. Типология математических моделей

$$\begin{aligned} & \max_x (z(x) | x \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4) \\ & z(x) = (p_1 - c_1) \cdot x_1 + (p_2 - c_2) \cdot x_2 - \\ & \quad - i \cdot (c_3 X_3) \\ & X_1 = (x | A_0 x_1 \leq b_1; A_1 x_1 \leq A_2 x_1) \\ & X_2 = (x | A_3 x_1 \geq A_4 x_2; x_2 \leq b_2) \\ & X_3 = (x | B_3 x_1 \leq (A_5 X_3) i \leq B_4 x_1) \\ & X_4 = (x | a_6 \cdot x_1 + a_7 \cdot x_2 + i \cdot (a_8 X_3) \leq b_5) \end{aligned}$$



**Математическая модель**  
– совокупность  
математических  
соотношений,  
описывающих основные  
закономерности, присущие  
изучаемому объекту

**Математическое  
моделирование** –  
процесс исследования  
реального объекта при  
помощи математических  
моделей



# 3. Типология математических моделей





# 3. Типология математических моделей

Дескриптивные  
(описательные)  
модели

Аналитические  
(исследовательские)  
модели

Синтетические  
(проектные) модели

# 3. Типология математических моделей

Системный анализ

Математическое моделирование

Синтез систем с заданными свойствами



# 4. Моделирование минерального питания

$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{\max})$  фиксированная продуктивность культуры

$\max_{\mathbf{x}, y} (py - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{f}_{\min}(y) \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}_{\max}(y))$  оптимальная продуктивность культуры

$\mathbf{x}$  – вектор объёмов внесения удобрений (*т/га*)

$\mathbf{b}_{\min}, \mathbf{b}_{\max}$  – векторы минимального и максимального количества действующего вещества (*т.д.в./га*)

$\mathbf{A}$  – матрица содержания действующего вещества в единице удобрения (*т.д.в./т*)

$\mathbf{c}$  – вектор цен удобрений (*тыс.руб./т*)

$y$  – продуктивность культуры (*т/га*)

$\mathbf{f}_{\min}(y), \mathbf{f}_{\max}(y)$  – мин. и макс. количество действующего вещества при продуктивности  $y$  (*т.д.в./га*)

$p$  – цена продукции (*тыс.руб./т*)

# Операции над векторами и матрицами

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\mathbf{i} \mathbf{x} = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} = (\mathbf{X} \mathbf{y}_1; \mathbf{X} \mathbf{y}_2; \dots ; \mathbf{X} \mathbf{y}_m), \text{ где } \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1; \mathbf{y}_2; \dots ; \mathbf{y}_m)$$



# 4. Моделирование минерального питания

## Первая модель



Проще



Решается с помощью симплексного метода



Исходные данные, как правило, доступны



*Может быть решена для разных уровней продуктивности*

## Вторая модель



Мощнее



Функции  $f_{\min}(y)$  и  $f_{\max}(y)$  обычно нелинейные → градиентные методы решения



Функции  $f_{\min}(y)$  и  $f_{\max}(y)$  обычно неизвестны



Применение затруднено



# 4. Моделирование минерального питания





# 5. Моделирование сочетания культур

$$\max_{\mathbf{x}} ((\mathbf{p} - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \mid \underbrace{\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \leq b_1}_{\text{Пашня, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}}_{\text{Предшественник и, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_3 \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_2}_{\text{План заготовки кормов, т}})$$

$\mathbf{x}_1$  – вектор площадей пашни под товарными культурами, га

$\mathbf{x}_2$  – вектор площадей пашни под кормовыми культурами, га

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2$$

$\mathbf{p}$  – вектор выручки, руб./га

$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  – векторы производственных затрат на товарные/кормовые культуры, руб./га

$$\mathbf{i} = (1, 1, \dots, 1)$$

$b_1$  – площадь пашни, га

$\mathbf{A}_1$  – матрица потребности в предшественниках, га/га

$\mathbf{A}_2$  – матрица способности быть предшественником, га/га

$\mathbf{A}_3$  – матрица выхода кормов, т/га

$\mathbf{b}_2$  – вектор потребности в кормах, т

# 5. Моделирование сочетания культур

## Матрица потребности в предшественниках (пример)

	Пшеница озимая	Ячмень яровой	Ячмень+многолетние	Многолетние травы I	Многолетние травы II	Однолетние травы	Кормовая свёкла	Кукуруза на силос
Подсев многолетних трав				1				
Второй год польз. многолетних трав					1			
Предшественники зерновых	1	1	1					

## Матрица способности быть предшественником

	Пшеница озимая	Ячмень яровой	Ячмень+многолетние	Многолетние травы I	Многолетние травы II	Однолетние травы	Кормовая свёкла	Кукуруза на силос
Пшеница озимая								
Ячмень яровой			1					
Ячмень+многолетние				1				
Многолетние травы I								
Многолетние травы II						1		
Однолетние травы							1	
Кормовая свёкла								
Кукуруза на силос								



# 6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3 \boxtimes X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1i}, \dots, x_{1n})$  – вектор площадей сельскохозяйственных культур, га

$\mathbf{x}_2$  – вектор поголовья сельскохозяйственных животных основного (маточного) стада, гол.

$\mathbf{X}_3 = (x_{31}, \dots, x_{3j}, \dots, x_{3n})$  – матрица распределения удобрений по культурам, тонн (столбцы = культуры)

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_{31} \mid \mathbf{x}_{32} \mid \dots \mid \mathbf{x}_{3n}$ , где  $\mathbf{x}_{3j}$  –  $j$ -столбец матрицы  $\mathbf{X}_3$

$\mathbf{p}_1$  ( $\mathbf{p}_2$ ) – вектор выручки от реализации продукции растениеводства (животноводства), тыс. руб./га (тыс. руб./гол.)

$\mathbf{c}_1$  – вектор производственных затрат в растениеводстве (без удобрений и амортизации), тыс.руб./га

$\mathbf{c}_2$  – вектор производственных затрат в животноводстве (без кормов и амортизации), тыс.руб./гол.

$\mathbf{c}_3$  – вектор затрат на приобретение и внесение удобрений, тыс.руб./т

$\mathbf{A}_0$  – матрица использования сельскохозяйственных угодий под культуры, га/га

$\mathbf{b}_1$  – вектор площадей сельскохозяйственных угодий, га

$\mathbf{A}_1$  – матрица потребности в предшественниках, га/га

$\mathbf{A}_2$  – матрица способности быть предшественником, га/га



# 6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3 \boxtimes X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

$\mathbf{A}_3$  – матрица выхода кормов, *т/га* (столбцы = культуры)

$\mathbf{A}_4$  – матрица потребности животных в кормах *т/гол. основного стада* (столбцы = виды животных)

$\mathbf{b}_2$  – вектор скотомест для содержания основного стада животных, *гол.*

$\mathbf{b}_{3i}$  ( $\mathbf{b}_{4i}$ ) – вектор минимального (максимального) внесения действующего вещества под культуру *i*, *тонн д.в./га*

$\mathbf{A}_5$  – матрица содержания действующего вещества в каждом удобрении, *тонн д.в./т* (столбцы = виды удобрений)

$\mathbf{a}_6$  ( $\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$ ) – векторы затрат оборотных средств в растениеводстве (животноводстве, на приобретение удобрений) в период их наибольшего дефицита, *тыс.руб./га* (*тыс.руб./гол.*, *тыс.руб./т*).

$b_5$  – размер оборотных средств в период их наибольшего дефицита (учитывая возможности получения кредита), *тыс. руб.*

Существуют и другие постановки этой задачи (с оптимизацией рационов, кредитов, использования труда и т.п.)



# 7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

## Три модуля по выбору

### моделирование севооборота

- динамическое программирование
- для тех, кто знаком с этим методом или желает в нём разобраться
- литературные источники предоставляет преподаватель

### моделирование роста и развития растений

- имитационное моделирование
- литературные источники предоставляет преподаватель

### международный опыт моделирования в агрономии

- имитационное моделирование (как правило)
- для тех, кто знает, в каком источнике можно найти математическую модель, полезную для агронома



Задание для лабораторного практикума и исходные данные студент определяет самостоятельно и согласует свой выбор с преподавателем



Допускается теоретическое изучение модели и отражение результатов её изучения в форме реферата (оценка минимальная)