



Математическое
моделирование и
проектирование

Светлов Николай Михайлович

E-mail svetlov@timacad.ru

<http://svetlov.timacad.ru>

План

1. Цели и содержание курса
2. Методика преподавания
3. Типология математических моделей, применяемых в агрономии, и методов их исследования
4. Моделирование минерального питания растений
5. Моделирование сочетания культур
6. Моделирование системы земледелия
7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

1. Цели и содержание курса

Цели

Развитие способности к формальному представлению исследуемых процессов и явлений

Овладение системной научной парадигмой и методологией перспективизма

Воспитание хозяйского отношения к делу

1. Цели и содержание курса



2. Методика преподавания

| № п/п | № модуля и модульной единицы дисциплины | № и название лабораторных/практических/семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий | Вид контрольного мероприятия | Кол-во часов |
|-------|--|--|------------------------------|--------------|
| 1. | Модуль 1. (Проектирование элементов системы земледелия) | | Тестирование | 0,5 |
| | Модульная единица 1. (Моделирование минерального питания растений) | Лабораторная работа № 1. (Моделирование минерального питания растений) | Защита | 4 |
| | Модульная единица 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве) | Лабораторная работа № 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве) | Защита | 3,5 |
| 2. | Модуль 2. (Основы комплексного проектирования системы земледелия) | | Тестирование | 0,5 |
| | Модульная единица 3 (Моделирование системы земледелия) | Лабораторная работа № 3 (Моделирование системы земледелия) | Защита | 3,5 |

2. Методика преподавания

| № п/п | № модуля и модульной единицы дисциплины | № и название лабораторных/практических/семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий | Вид контрольного мероприятия | Кол-во часов |
|-------|--|--|------------------------------|--------------|
| 3. | Модуль 3. (Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома) | | Коллоквиум | 1 |
| | Модульная единица 4а (Моделирование севооборота) | Лабораторная работа № 4а (Моделирование севооборота) | Защита | 3 |
| | Модульная единица 4б (Моделирование роста и развития растений) | Лабораторная работа № 4б (Моделирование роста и развития растений) | Защита | |
| | Модульная единица 4в (Международный опыт моделирования в агрономии) | Лабораторная работа № 4в (Международный опыт моделирования в агрономии) | Защита | |

2. Методика преподавания

Оценка дифференцированного зачёта выставляется на основании результатов защиты лабораторных работ, тестирования и коллоквиума

Преподаватель вправе объединить тестирование и коллоквиум по некоторым или всем модулям в одно контрольное мероприятие

2. Методика преподавания

Литература

1. Франс Дж., Торнли Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
2. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др. СПб.: ИТК ГРАНИТ, 2009.

Учебные материалы в сети Internet

<http://svetlov.timacad.ru/umk8/umk.htm>

Рабочая программа учебной дисциплины

Компьютерные презентации к лекциям

Задания к лабораторным работам

3. Типология математических моделей

$$\begin{aligned} & \max_x (z(x) | x \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4) \\ & z(x) = (p_1 - c_1) \cdot x_1 + (p_2 - c_2) \cdot x_2 - \\ & \quad - i \cdot (c_3 X_3) \\ & X_1 = (x | A_0 x_1 \leq b_1; A_1 x_1 \leq A_2 x_1) \\ & X_2 = (x | A_3 x_1 \geq A_4 x_2; x_2 \leq b_2) \\ & X_3 = (x | B_3 x_1 \leq (A_5 X_3) i \leq B_4 x_1) \\ & X_4 = (x | a_6 \cdot x_1 + a_7 \cdot x_2 + i \cdot (a_8 X_3) \leq b_5) \end{aligned}$$



Математическая модель
– совокупность
математических
соотношений,
описывающих основные
закономерности, присущие
изучаемому объекту

**Математическое
моделирование** –
процесс исследования
реального объекта при
помощи математических
моделей

3. Типология математических моделей



3. Типология математических моделей

Дескриптивные
(описательные)
модели

Аналитические
(исследовательские)
модели

Синтетические
(проектные) модели

3. Типология математических моделей

Системный анализ

Математическое моделирование

Синтез систем с заданными свойствами

4. Моделирование минерального питания

$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{\max})$ фиксированная продуктивность культуры

$\max_{\mathbf{x}, y} (py - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{f}_{\min}(y) \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}_{\max}(y))$ оптимальная продуктивность культуры

\mathbf{x} – вектор объёмов внесения удобрений (*т/га*)

$\mathbf{b}_{\min}, \mathbf{b}_{\max}$ – векторы минимального и максимального количества действующего вещества (*т.д.в./га*)

\mathbf{A} – матрица содержания действующего вещества в единице удобрения (*т.д.в./т*)

\mathbf{c} – вектор цен удобрений (*тыс.руб./т*)

y – продуктивность культуры (*т/га*)

$\mathbf{f}_{\min}(y), \mathbf{f}_{\max}(y)$ – мин. и макс. количество действующего вещества при продуктивности y (*т.д.в./га*)

p – цена продукции (*тыс.руб./т*)

Операции над векторами и матрицами

$$\mathbf{x}y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

$$\mathbf{i}x = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}Y = (\mathbf{X}y_1; \mathbf{X}y_2; \dots; \mathbf{X}y_m), \text{ где } Y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$$

4. Моделирование минерального питания

Первая модель



Проще



Решается с помощью симплексного метода



Исходные данные, как правило, доступны



Может быть решена для разных уровней продуктивности

Вторая модель



Мощнее



Функции $f_{\min}(y)$ и $f_{\max}(y)$ обычно нелинейные → градиентные методы решения



Функции $f_{\min}(y)$ и $f_{\max}(y)$ обычно неизвестны



Применение затруднено

4. Моделирование минерального питания



5. Моделирование сочетания культур

$$\max_{\mathbf{x}} ((\mathbf{p} - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \mid \underbrace{\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \leq b_1}_{\text{Пашня, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}}_{\text{Предшественник и, га}}; \underbrace{\mathbf{A}_3 \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_2}_{\text{План заготовки кормов, т}})$$

\mathbf{x}_1 – вектор площадей пашни под товарными культурами, га

\mathbf{x}_2 – вектор площадей пашни под кормовыми культурами, га

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2$$

\mathbf{p} – вектор выручки, руб./га

$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ – векторы производственных затрат на товарные/кормовые культуры, руб./га

$$\mathbf{i} = (1, 1, \dots, 1)$$

b_1 – площадь пашни, га

\mathbf{A}_1 – матрица потребности в предшественниках, га/га

\mathbf{A}_2 – матрица способности быть предшественником, га/га

\mathbf{A}_3 – матрица выхода кормов, т/га

\mathbf{b}_2 – вектор потребности в кормах, т

5. Моделирование сочетания культур

Матрица потребности в предшественниках (пример)

| | Пшеница озимая | Ячмень яровой | Ячмень+многолетние | Многолетние травы I | Многолетние травы II | Однолетние травы | Кормовая свёкла | Кукуруза на силос |
|------------------------------------|----------------|---------------|--------------------|---------------------|----------------------|------------------|-----------------|-------------------|
| Подсев многолетних трав | | | | 1 | | | | |
| Второй год польз. многолетних трав | | | | | 1 | | | |
| Предшественники зерновых | 1 | 1 | 1 | | | | | |

Матрица способности быть предшественником

| | Пшеница озимая | Ячмень яровой | Ячмень+многолетние | Многолетние травы I | Многолетние травы II | Однолетние травы | Кормовая свёкла | Кукуруза на силос |
|----------------------|----------------|---------------|--------------------|---------------------|----------------------|------------------|-----------------|-------------------|
| Пшеница озимая | | | | | | | | |
| Ячмень яровой | | | 1 | | | | | |
| Ячмень+многолетние | | | | 1 | | | | |
| Многолетние травы I | | | | | | | | |
| Многолетние травы II | | | | | | 1 | | |
| Однолетние травы | | | | | | | 1 | |
| Кормовая свёкла | | | | | | | | |
| Кукуруза на силос | | | | | | | | |

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3 \boxtimes X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1i}, \dots, x_{1n})$ – вектор площадей сельскохозяйственных культур, га

\mathbf{x}_2 – вектор поголовья сельскохозяйственных животных основного (маточного) стада, гол.

$\mathbf{X}_3 = (x_{31}, \dots, x_{3i}, \dots, x_{3n})$ – матрица распределения удобрений по культурам, тонн (столбцы = культуры)

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_{31} \mid \mathbf{x}_{32} \mid \dots \mid \mathbf{x}_{3n}$, где \mathbf{x}_{3j} – j -столбец матрицы \mathbf{X}_3

\mathbf{p}_1 (\mathbf{p}_2) – вектор выручки от реализации продукции растениеводства (животноводства), тыс. руб./га (тыс. руб./гол.)

\mathbf{c}_1 – вектор производственных затрат в растениеводстве (без удобрений и амортизации), тыс.руб./га

\mathbf{c}_2 – вектор производственных затрат в животноводстве (без кормов и амортизации), тыс.руб./гол.

\mathbf{c}_3 – вектор затрат на приобретение и внесение удобрений, тыс.руб./т

\mathbf{A}_0 – матрица использования сельскохозяйственных угодий под культуры, га/га

\mathbf{b}_1 – вектор площадей сельскохозяйственных угодий, га

\mathbf{A}_1 – матрица потребности в предшественниках, га/га

\mathbf{A}_2 – матрица способности быть предшественником, га/га

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}} (z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes X_3 \boxtimes X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2) \cdot \mathbf{x}_2 - (\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3) \cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{3i} \leq \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \leq \mathbf{x}_{1i} \mathbf{b}_{4i}, i = 1 \dots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \leq b_5)$$

\mathbf{A}_3 – матрица выхода кормов, *т/га* (столбцы = культуры)

\mathbf{A}_4 – матрица потребности животных в кормах *т/гол. основного стада* (столбцы = виды животных)

\mathbf{b}_2 – вектор скотомест для содержания основного стада животных, *гол.*

\mathbf{b}_{3i} (\mathbf{b}_{4i}) – вектор минимального (максимального) внесения действующего вещества под культуру *i*, *тонн д.в./га*

\mathbf{A}_5 – матрица содержания действующего вещества в каждом удобрении, *тонн д.в./т* (столбцы = виды удобрений)

\mathbf{a}_6 ($\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$) – векторы затрат оборотных средств в растениеводстве (животноводстве, на приобретение удобрений) в период их наибольшего дефицита, *тыс.руб./га* (*тыс.руб./гол.*, *тыс.руб./т*).

b_5 – размер оборотных средств в период их наибольшего дефицита (учитывая возможности получения кредита), *тыс. руб.*

Существуют и другие постановки этой задачи (с оптимизацией рационов, кредитов, использования труда и т.п.)

7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

Три модуля по выбору

моделирование севооборота

- динамическое программирование
- для тех, кто знаком с этим методом или желает в нём разобраться
- литературные источники предоставляет преподаватель

моделирование роста и развития растений

- имитационное моделирование
- литературные источники предоставляет преподаватель

международный опыт моделирования в агрономии

- имитационное моделирование (как правило)
- для тех, кто знает, в каком источнике можно найти математическую модель, полезную для агронома



Задание для лабораторного практикума и исходные данные студент определяет самостоятельно и согласует свой выбор с преподавателем



Допускается теоретическое изучение модели и отражение результатов её изучения в форме реферата (оценка минимальная)