

# *ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ*

*Хандогина Е.С.,  
учитель математики ГБОУ  
СОШ №1125*

# *ДВИЖЕНИЯ*

Образуют специальный класс преобразований,

- играющих особую роль в различных науках и их приложениях
- и широко распространенных в области природных и технических явлений

***ДВИЖЕНИЕ***

***или***

***ПЕРЕМЕЩЕНИЕ***

**- это преобразование  
плоскости,  
сохраняющее расстояния**

## ***РЕПЕР-***

упорядоченная тройка точек,  
не лежащих на одной прямой.  
Обозначается:  $R=(A, B, C)$ .

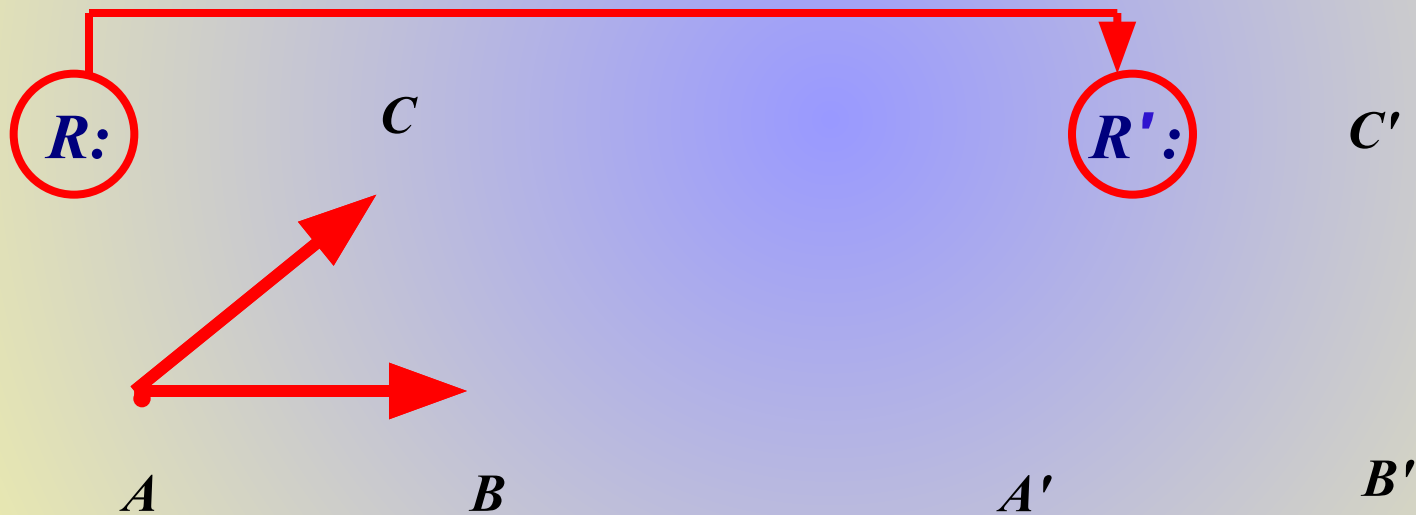
### ***АФИННЫЙ,***

если  $\Delta ABC$  произвольный

### ***ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ.***

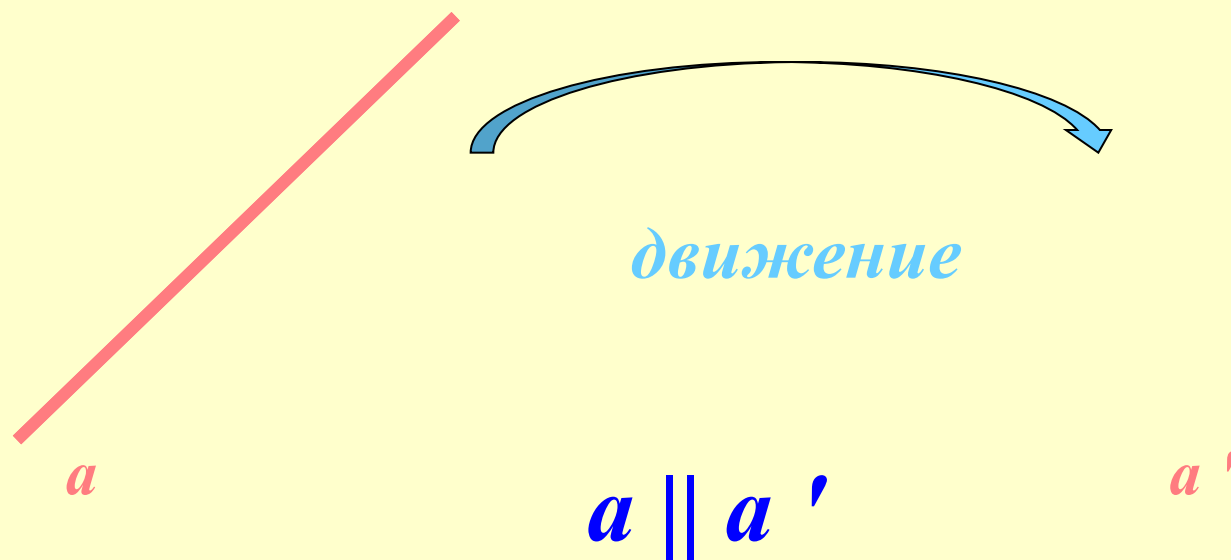
если  $\Delta ABC$  – прямоугольный ,  
 $A=90^\circ$ ,  $AB=AC=1$ ,  
A – начало репера,  
B и C – вершины репера

При движении репер  $R$ , образованный точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , переходит в репер  $R'$ , образованный точками  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , причем это движение единственно.



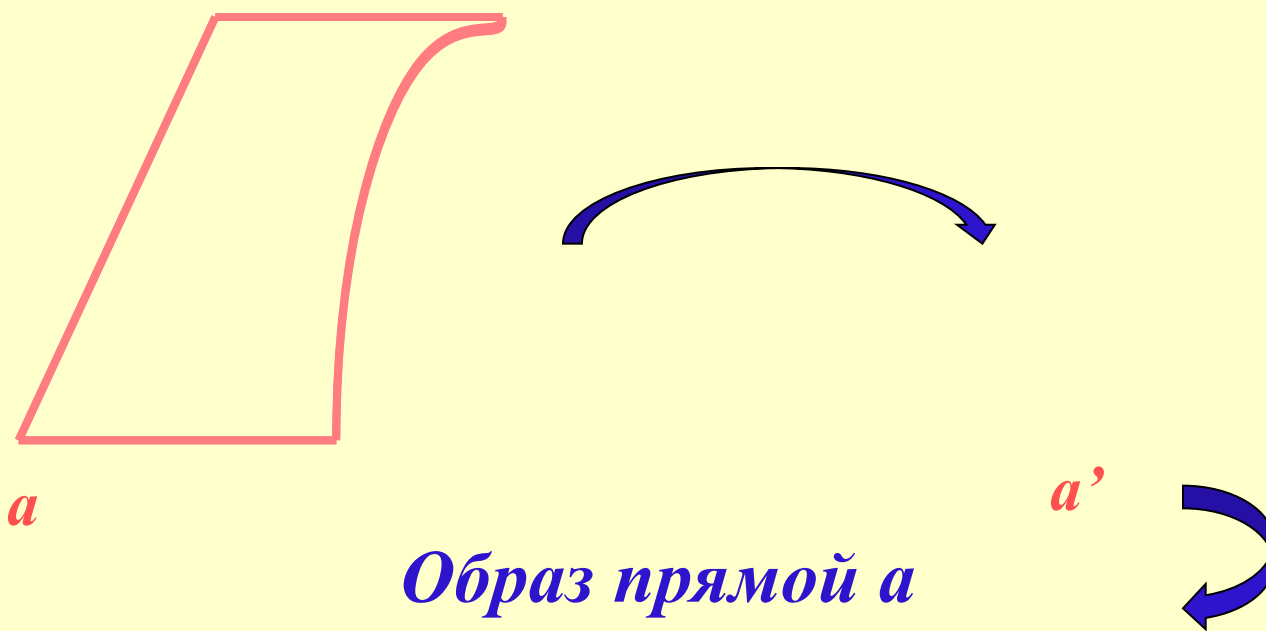
# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

**1. Движение переводит прямую в прямую, параллельную прямой в параллельную ей прямую.**



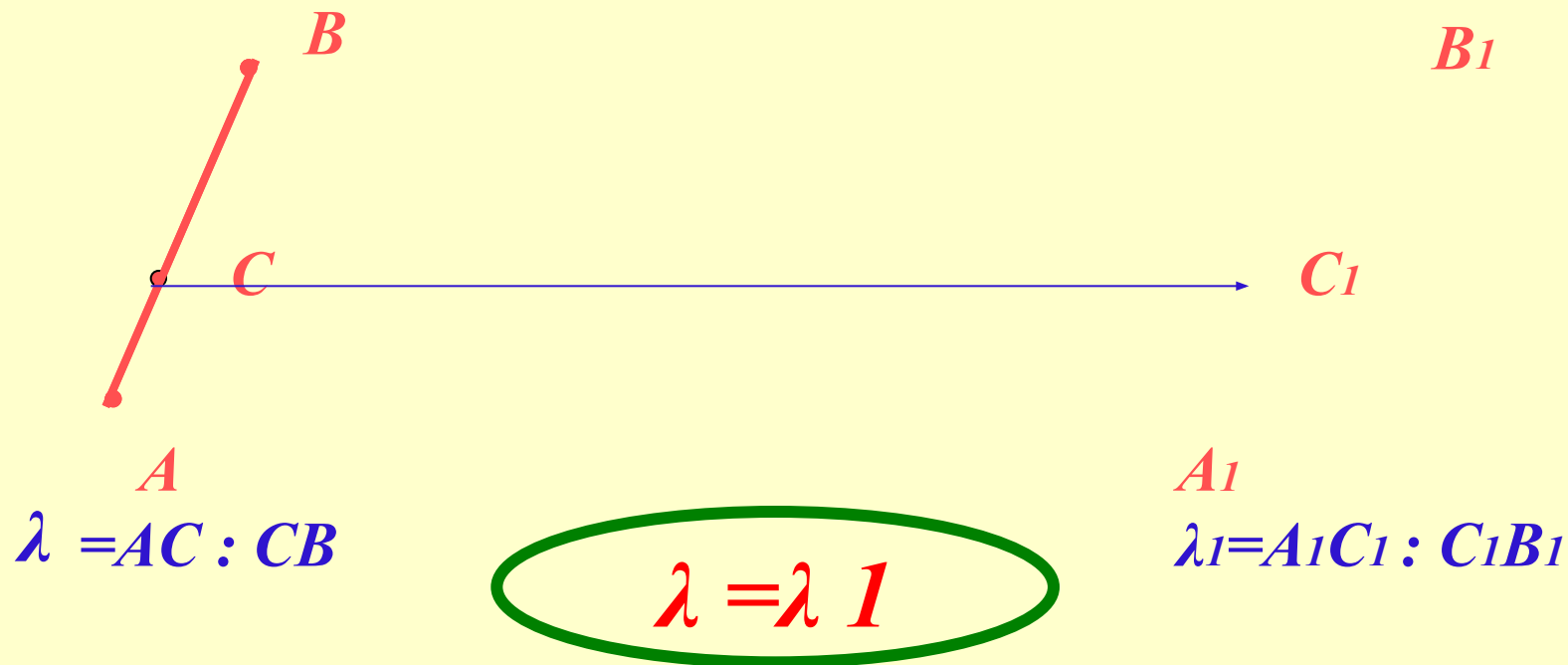
# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

2. Движение переводит полуплоскость с границей  $A$  в полуплоскость с границей  $A'$ , где  $A'$  – образ прямой  $a$ .



# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

3. Движение сохраняет простое отношение трех точек прямой.



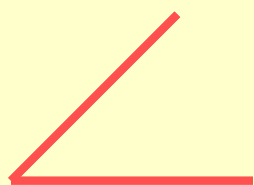


# ***СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ***

- 4. Движение сохраняет отношение «лежать между».**
- 5. Движение переводит отрезок АВ в отрезок А'В'. При этом середина отрезка АВ переходит в середину отрезка А'В'.**

# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

6. Движение переводит угол в равный ему угол,

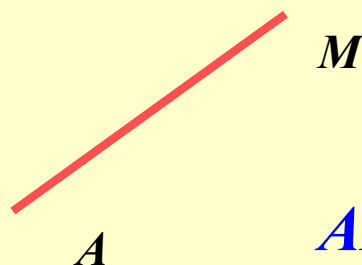


$\angle A$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle A_1$

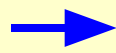
луч в луч



$M$

$A$

$AM$



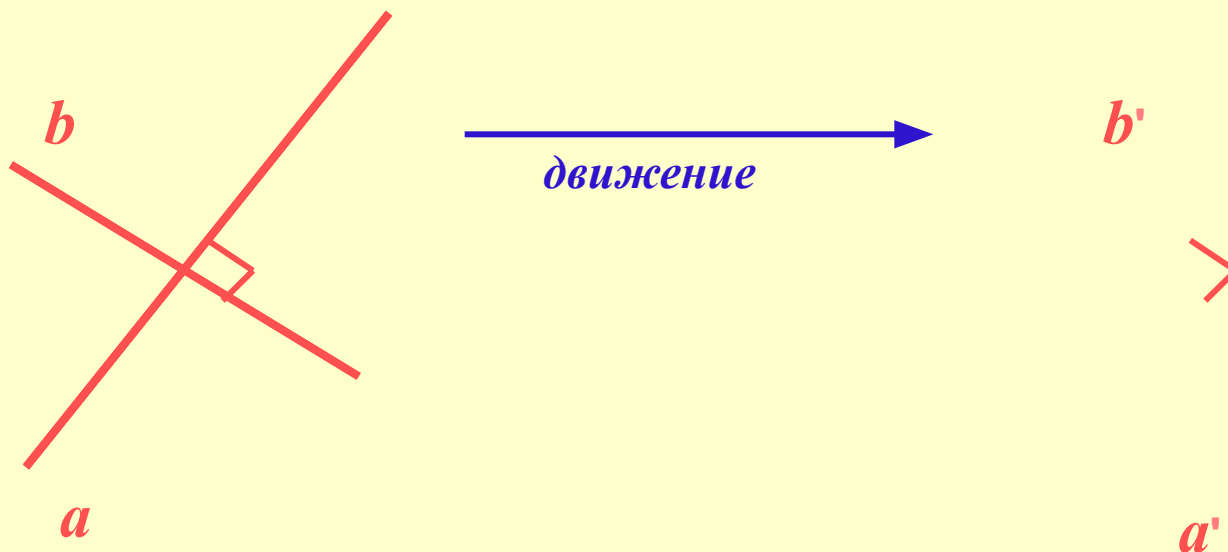
$A'M'$

$A'$

$M'$

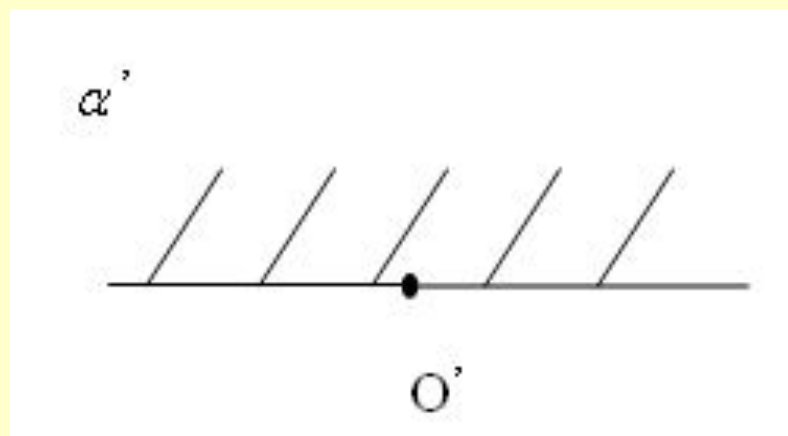
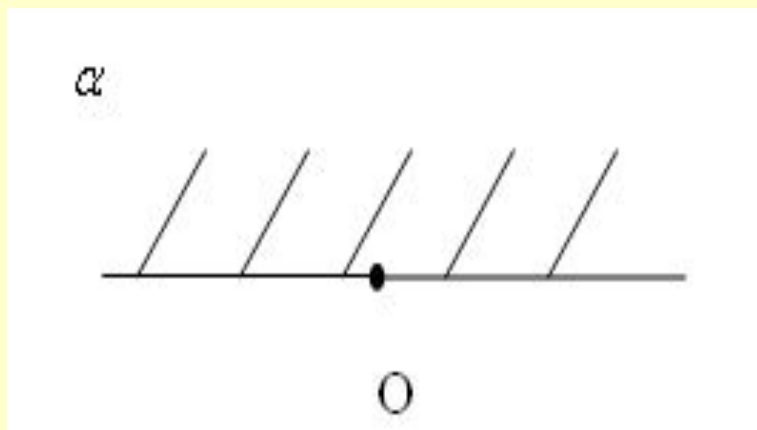
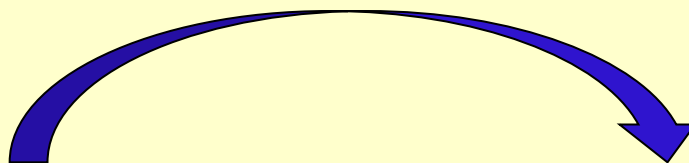
# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

7. Движение переводит взаимно перпендикулярные прямые во взаимно перпендикулярные прямые



# СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

8. При движении флаг переводится во флаг,



где флаг - это тройка, состоящая из точки, луча и полуплоскости

## 2 РЕПЕРА

$R = (O, A, B)$  и  $R' = (O', A', B')$

НАЗЫВАЮТСЯ...

ОДИНАКОВО  
ориентированными

если

$$\frac{R}{R'} = \frac{(\vec{OA}, \vec{OB})}{(\vec{O'A'}, \vec{O'B'})} > 0$$

ПРОТИВОПОЛОЖНО  
Ориентированными

если

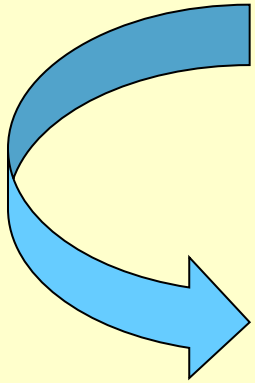
$$\frac{R}{R'} = \frac{(\vec{OA}, \vec{OB})}{(\vec{O'A'}, \vec{O'B'})} < 0$$

**Преобразование точек плоскости  
сохраняет ориентацию плоскости  
или меняет ориентацию  
плоскости,**

**если любой репер и его образ**

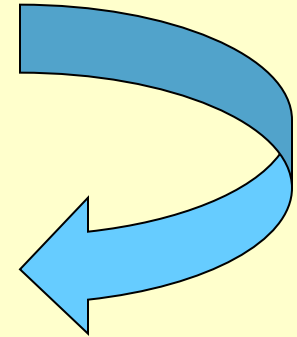
**сохраняют или меняют  
ориентацию**

# ***ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ***



**Движение, не  
меняющее  
ориентацию,  
называется**

***ДВИЖЕНИЕМ I  
РОДА***



**Движение,  
меняющее ориентацию,  
называется**

***ДВИЖЕНИЕМ II  
РОДА***

# *АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ*

$$x' = x \cdot \cos \alpha - \varepsilon \cdot y \cdot \sin \alpha + x_0,$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + \varepsilon \cdot y \cdot \cos \alpha + y_0$$



при  $\varepsilon = 1$

*ДВИЖЕНИЕ*

*I РОДА*



при  $\varepsilon = -1$

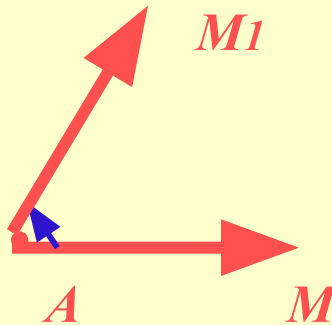
*ДВИЖЕНИЕ*

*II РОДА*



# ДВИЖЕНИЕ I РОДА

## 1. Поворот на угол $\alpha \neq 0, \pm\pi$



Аналитические  
выражения:

$$\begin{aligned}x' &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, \\y' &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

а) тождественное  
преобразование,

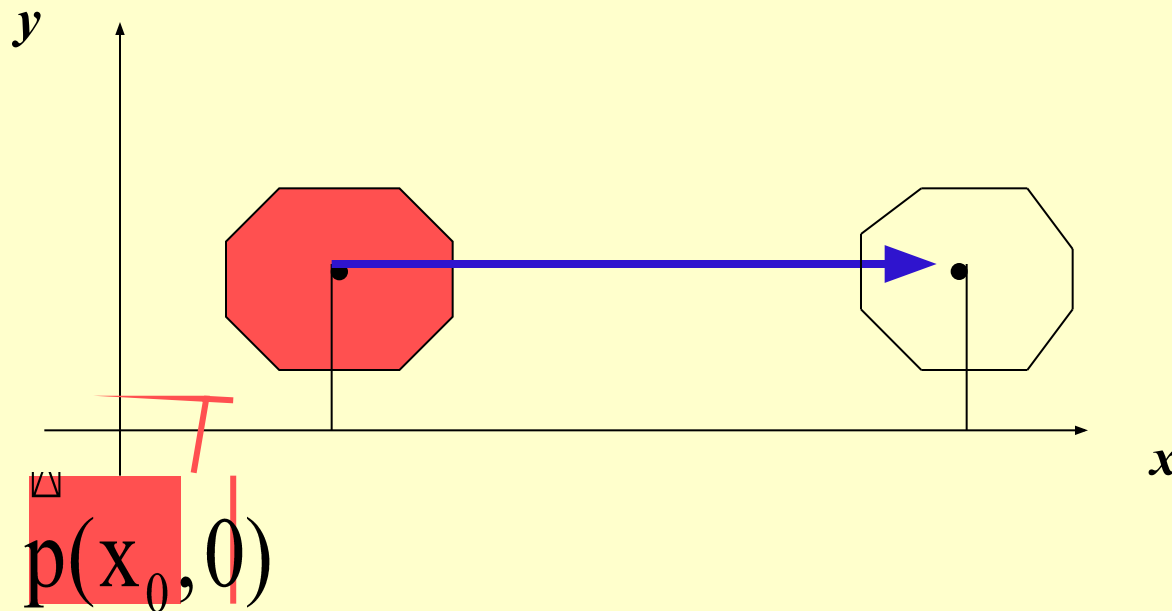
$$\alpha = 0 \longrightarrow \begin{aligned}x' &= x \\y' &= y\end{aligned}$$

б) центральная  
симметрия,

$$\alpha = \pm\pi \longrightarrow \begin{aligned}x' &= -x + x_0 \\y' &= -y + y_0\end{aligned}$$

# ДВИЖЕНИЕ I РОДА

## 2. а) Параллельный перенос на $\vec{p} \neq 0$



Аналитические  
выражения:

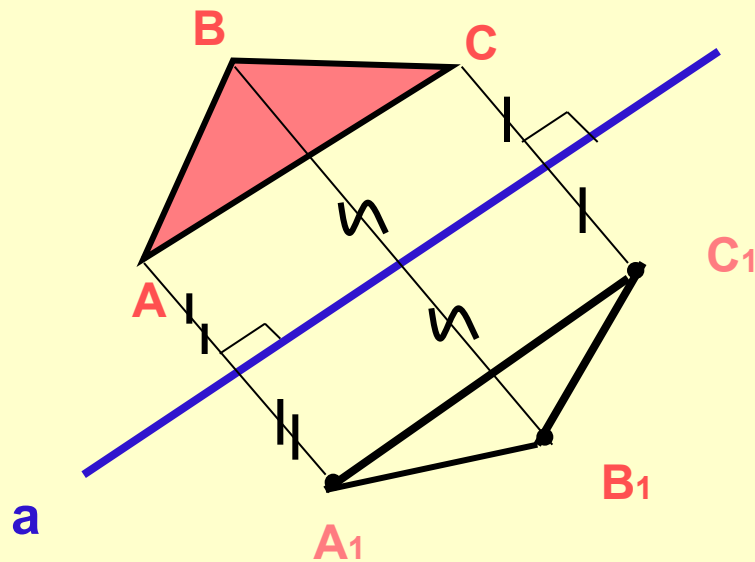
$$\begin{aligned}x' &= x + x_0 \\ y' &= y\end{aligned}$$

## б) Параллельный перенос на $\vec{p} = 0$

- тождественное преобразование

# ДВИЖЕНИЕ II РОДА

## 1. Осевая симметрия



Аналитические  
выражения:

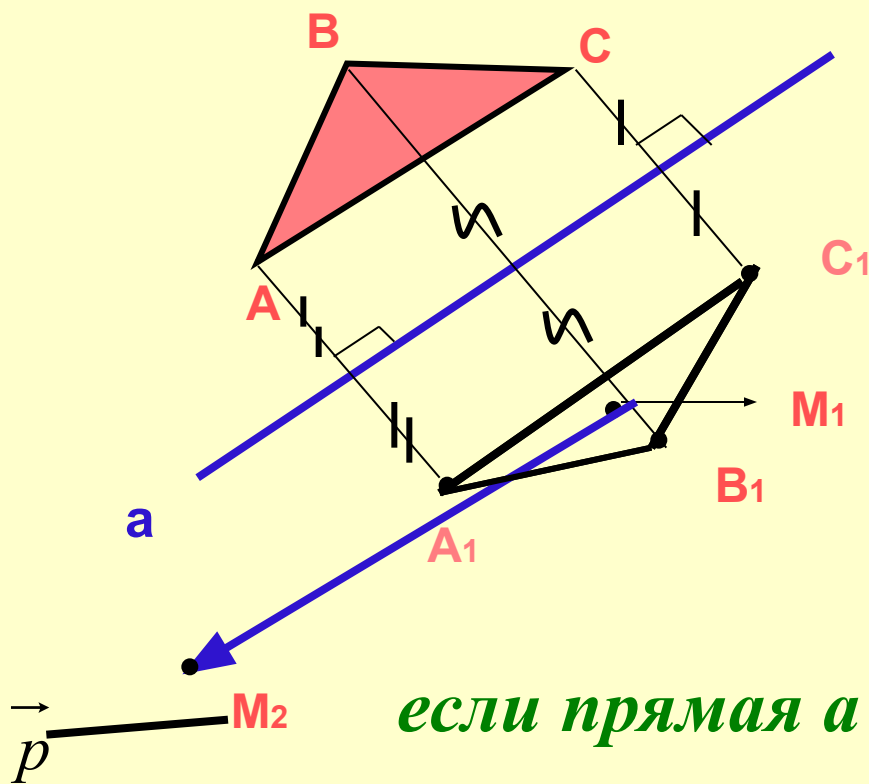
$$x' = x$$

$$y' = -y$$

*если прямая a совпадает с осью OX*

# ДВИЖЕНИЕ II РОДА

## 2. Скользящая симметрия (g)



$g = s * f \rightarrow$  Параллельный перенос

Осевая симметрия

Аналитические выражения:

$$x' = x + x_0$$

$$y' = -y$$

*если прямая a совпадает с осью OX и вектор переноса параллелен прямой a*

# ***ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ***

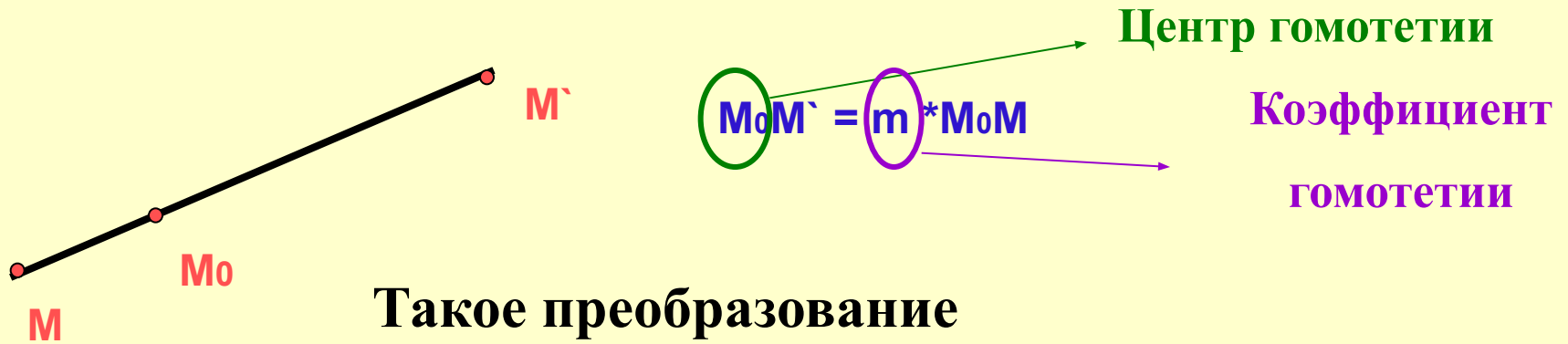
Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия*, если существует  $k > 0$ , такое что для любых точек  $A, B, A', B'$  выполняется равенство:

$$A'B' = kAB$$

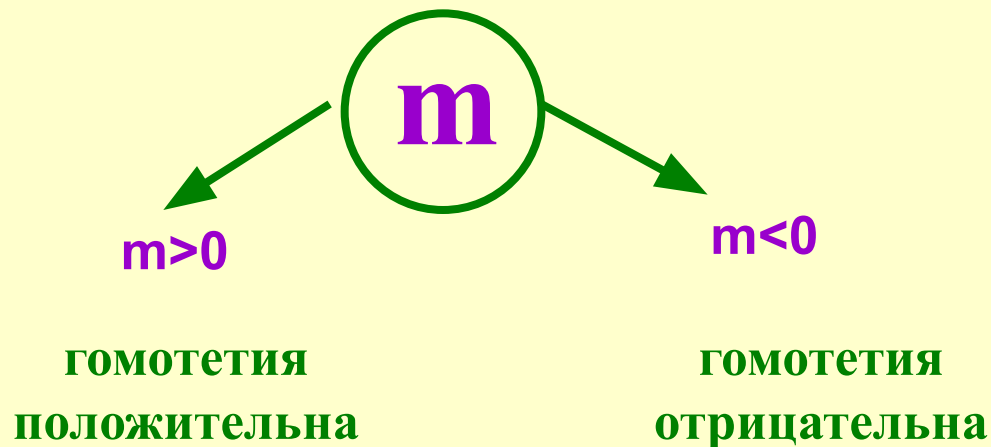
При  $k = 1$  преобразование подобия является

**ДВИЖЕНИЕМ**

Рассмотрим на плоскости три точки  $M, M_0, M'$  и некоторое число  $m$ , такое, что  $M_0M' = m * M_0M$



Такое преобразование называется *гомотетией*.



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ( $f$ )

$$f = g \cdot h$$

**ДВИЖЕНИЕ**

**гомотетия с коэффициентом  $k$  и  
центром в точке  $M_0$**

**g:**

$$\begin{aligned}x'' &= k \cdot x' \cdot \cos \alpha - k \cdot \varepsilon \cdot y' \cdot \sin \alpha + x_0, \\y'' &= k \cdot x' \cdot \sin \alpha + k \cdot \varepsilon \cdot y' \cdot \cos \alpha + y_0\end{aligned}$$

**h:**

$$\begin{aligned}x' &= k \cdot x \\y' &= k \cdot y\end{aligned}$$

$$\varepsilon = 1$$

**подобие 1-го рода**

$$\varepsilon = -1$$

**подобие 2-го рода**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ  
ПОДОБИЯ**

# ПОДОБИЕ I РОДА

Аналитические выражения:

$$\begin{aligned}x' &= k \cdot x \cdot \cos \alpha - k \cdot y \cdot \sin \alpha + x, \\y' &= k \cdot y \cdot \sin \alpha + k \cdot x \cdot \cos \alpha + y\end{aligned}$$

## 1. Поворот на угол $\alpha \neq 0, \pm\pi$

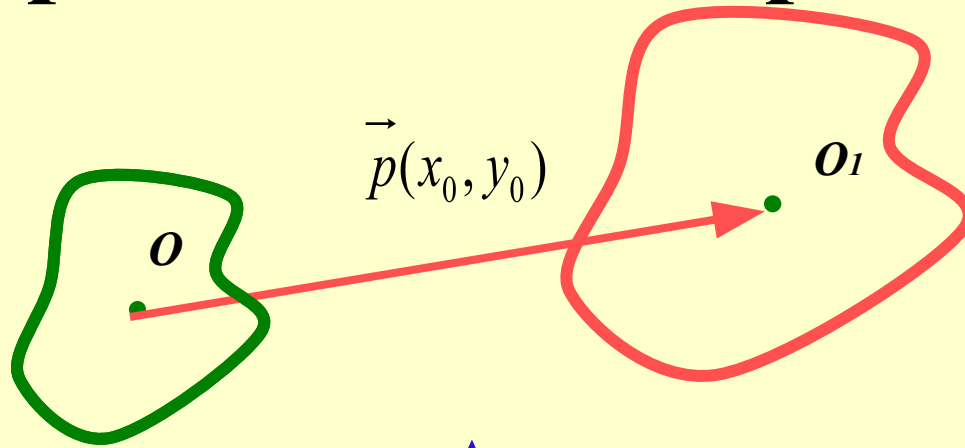
а) тождественное преобразование, если  $\alpha = 0$

б) центрально-подобное вращение, если  $\alpha = \pm\pi$

в) центрально-подобная симметрия



## 2. Параллельный перенос на $\vec{p} \neq 0$



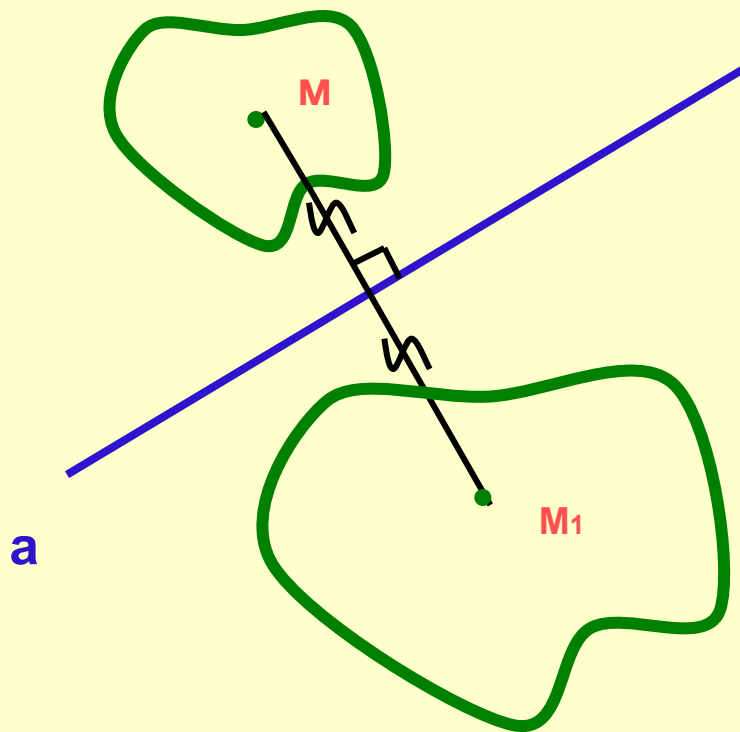
**Аналитические  
выражения:**

$$x' = k \cdot x + x_0,$$

$$y' = k \cdot y + y_0$$

# ПОДОБИЕ II РОДА

## 1. Осевая симметрия



Аналитические  
выражения:

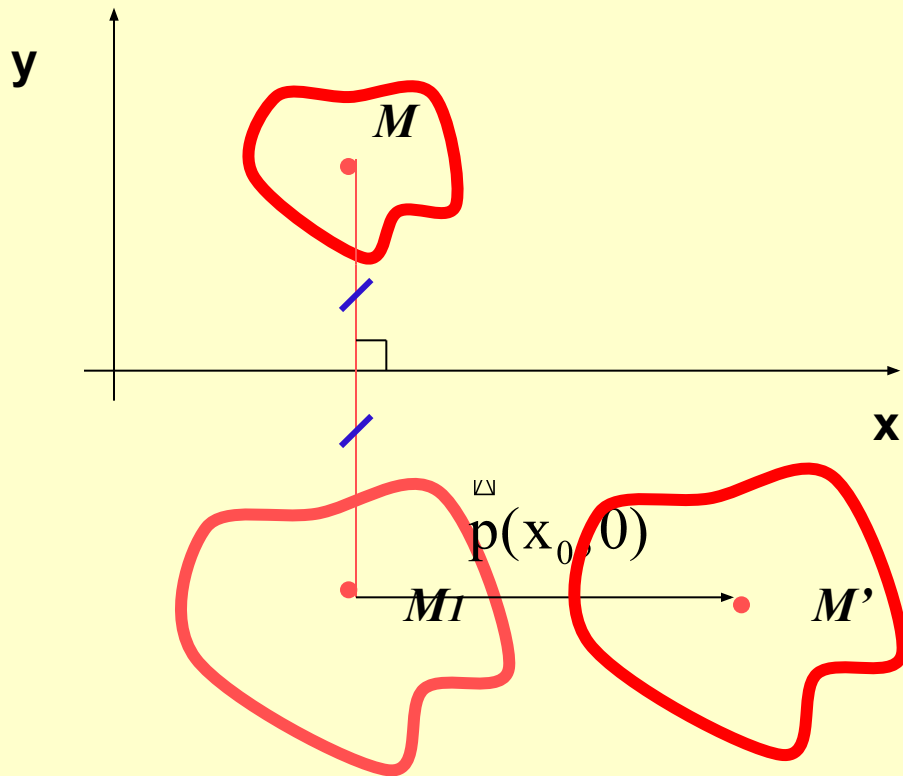
$$x' = k \cdot x,$$

$$y' = -k \cdot y$$

*Прямая a совпадает с  
осью OX*

# ПОДОБИЕ II РОДА

## 2. Скользящая симметрия



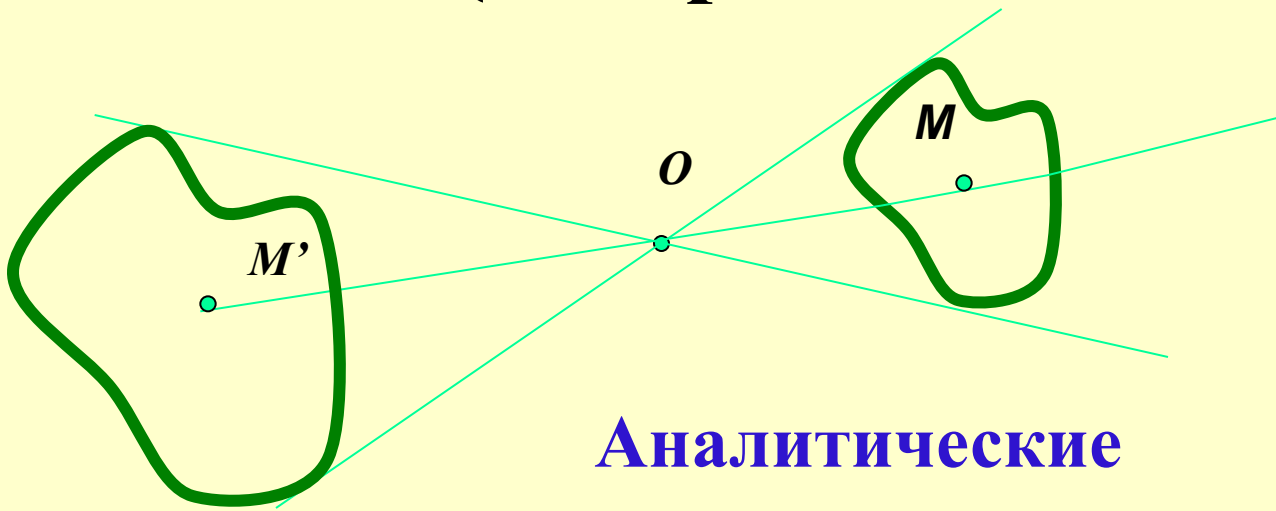
Аналитические  
выражения:

$$x' = k \cdot x + x_0,$$

$$y' = -k \cdot y$$

# ПОДОБИЕ II РОДА

## 3. Гомотетия (центральная симметрия)



Аналитические  
выражения:

$$x' = k \cdot x + x_0,$$

$$y' = k \cdot y + y_0$$



Сущность понятия движения  
ясна каждому из его  
жизненного и учебного  
опыта, ведь

**ДВИЖЕНИЕ-**

***ЭТО ЖИЗНЬ...***