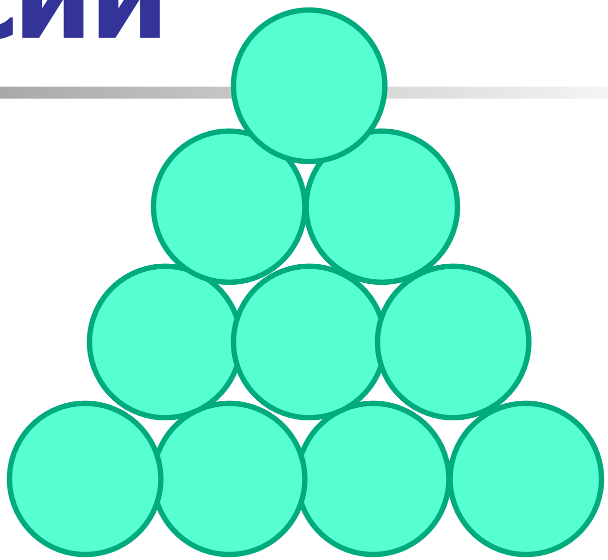
Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии



Методическая разработка Т.С. Панкратовой, учителя МАОУ «СОШ № 127» г. Перми

Карл Гаусс
(1777 – 1855)

выдающийся немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён.

«Король математики»

Математический талант Гаусса проявился ещё в детстве. По легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс быстро вычислил.

Вычислите: 1 + 2 + 3 + 4 + … + 97 + 98 + 99 + 100 = 101 * 50 = 5 050

Найти сумму первых 100 натуральных чисел

S – сумма

S= 1 + 2 +3+…+98+99+100

\+ S=100+99+98+…+ 3 + 2 + 1

2S=101*100 |:2

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

S=1+2+3+…+98+99+100=5050

Найти сумму первых 10 натуральных чисел.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=

$$= \frac{1 + 10}{2} \cdot 10 = 55$$

S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1$$

$$a_1 + a_n$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

....

$$a_i + a_{n-(i-1)} = (a_1 + \underline{(i-1)d}) +$$
$$+(a_1 + (n \underline{- (i-1)} - 1)\underline{d}) = a_1 + (a_1 + (n-1)d) =$$
$$= a_1 + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$+$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \Big| : 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Найдите сумму первых сорока членов последовательности, заданной формулой:

$$a_n = 5n - 4$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Решение

Данная последовательность вида $a_n = k\,n + b$, значит, это арифметическая прогрессия

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40$$

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$$

$$a_{40} = 196$$

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940$$

Найдём сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии

4; 5,5;…

Решение

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \qquad S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30$$

$a_1 = 4$, d $= a_2 - a_1 = 1{,}5$

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 29 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 30 = 772{,}5$$

Ответ: 772,5

Задача 19. ГИА – 2011г.

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые не делятся на 5.

Решение

S – искомая сумма; $S = S_1 - S_2$,

где S_1 – сумма всех нату… …исел, …сходящих 150,

S_2 – сумма всех натуральных …ых 5 и не превосходящих 150.

1; 2; 3; … 150 – арифметическая прогрессия

$$S_1 = \frac{a_1 + a_{150}}{2} \cdot 150 = \frac{1+150}{2} \cdot 150 = 151 \cdot 75$$

5; 10; … 150 – арифметическая прогрессия $b_1 = 5;$

$b_n = 150;$ d = 5; $b_n = 5n;$ 5n = 150; n = 30

$$S_2 = \frac{b_1 + b_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{5+150}{2} \cdot 30 = 155 \cdot 15$$

$$S = S_1 - S_2 = 151 \cdot 75 - 155 \cdot 15 =$$

$$= 75\,(151 - 31) = 75 \cdot 120 = 9\,000$$

Ответ: 9 000

№ 690(в)

Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3, заключенных в промежутке от 100 до 200.

Решение

Формула, задающая натуральные числа кратные 3: 3n

Что об этих числах вы знаете?

По условию $100 \leq 3n \leq 200 \;|\; : 3$

$$33\frac{1}{3} \leq n \leq 66\frac{2}{3}$$

значит, чле… …анному усл…

$$S_{33} = \frac{b_1 + b_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{102 + 198}{2} \cdot 33 = \frac{300 \cdot 33}{2} = $$

Последовательность: 102, 105, 108, ... , 198 по определению арифметическая прогрессия, первый член которой 102; разность 3, последний член – 198.

$$= \frac{9900}{2} = 4950$$

Сколько членов в этой прогрессии? n = 66 – 33 = 33

Ответ: 4 950

№ 691(б)

Найдите сумму натуральных чисел больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

Анализируем

$S = 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + \ldots + 149.$

Исключаем числа: 55; 60; 65; …; 145.

Решение

S – искомая сумма,

S_1 – сумма натуральных чисел больших 50, но меньших 150.

S_2 – сумма натуральных чисел больших 50, но меньших 150 и кратных 5.

$S = S_1 - S_2$

Последовательность чисел: 51; 52; … 149 – арифметическая прогрессия со знаменателем 1.

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$, где $a_1 = 51$,

$a_n = 149$, n = 149 – 50 = 99

$$S_1 = \frac{51 + 149}{2} \cdot 99 = 9\,900$$

Последовательность чисел: 55; 60; 65; … ; 145 – арифметическая прогрессия со знаменателем 5.

$b_1 = 55$, $b_n = 145$, $d = 5$, $n = 19$

$b_n = b_1 + (n – 1)d$

$55 + 5(n – 1) = 145$

$5(n – 1) = 90$

$n – 1 = 18$

$n = 19$

$$S_2 = \frac{55 + 145}{2} \cdot 19 =$$

$$= 1\,900$$

$$S = 9\,900 – 1\,900 = 8\,000$$

Ответ: 8 000.

Задача. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии – 42; – 38; – 34; …, сумма которых меньше 150.

Решение.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$a_1 = -42, \quad d = a_2 - a_1 = 4$$

$$S_n < 150 \qquad \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 150$$

$$\frac{2 \cdot (-42) + (n-1)4}{2} \cdot n < 150$$

$(-42 + 2n - 2)n < 150 \,|\, : 2$

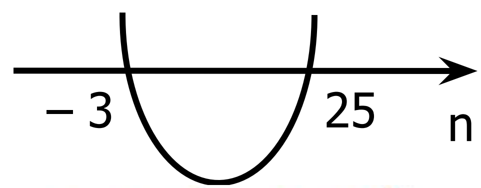
$(-22 + n)n < 75$

$$n^2 - 22n - 75 < 0$$

$$y = n^2 - 22n - 75$$

$y = 0; \quad n^2 - 22n - 75 = 0$

$n = 25$ или $n = -3$



$$n \in (-3; 25)$$

n – натуральное число, поэтому

n = 1; 2; 3; … ; 24.

Наибольшее число – 24

Ответ: 24