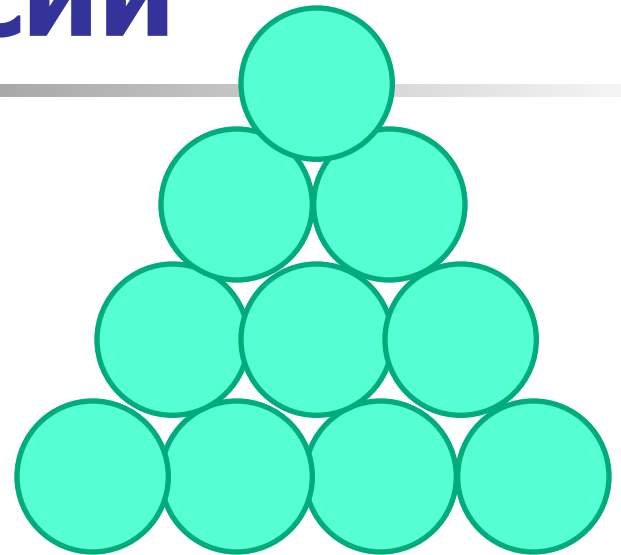


Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии



Методическая разработка Т.С. Панкратовой, учителя
МАОУ «СОШ № 127» г. Перми

Карл Гаусс (1777 – 1855)

выдающийся немецкий математик,
астроном и физик, считается одним из
величайших математиков всех времён.

«Король математики»

Математический талант Гаусса проявился
ещё в детстве. По легенде, школьный
учитель математики, чтобы занять детей на
долгое время, предложил им сосчитать сумму
чисел от 1 до 100. Юный Гаусс быстро
вычислил.



$$\text{Вычислите: } \underbrace{1}_{\text{green}} + \underbrace{2}_{\text{red}} + \underbrace{3}_{\text{purple}} + \underbrace{4}_{\text{blue}} + \dots + \underbrace{97}_{\text{blue}} + \underbrace{98}_{\text{purple}} + \underbrace{99}_{\text{red}} + \underbrace{100}_{\text{green}} = 101 * 50 = 5\ 050$$

Найти сумму первых 100 натуральных чисел

S – сумма

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ + S &= 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

$$2S = 101 \cdot 100 \quad |:2$$

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5050$$

*Найти сумму первых 10
натуральных чисел.*

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 &= \\ &= \frac{1+10}{2} \cdot 10 = 55 \end{aligned}$$

S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$\begin{aligned} + S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$a_1 + a_n$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

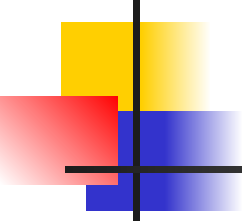
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

$$a_i + a_{n-(i-1)} = (a_1 + \underline{(i-1)d}) +$$

$$+ (a_1 + \underline{(n - (i-1) - 1)d}) = a_1 + (a_1 + (n-1)d) =$$

$$= a_1 + a_n$$



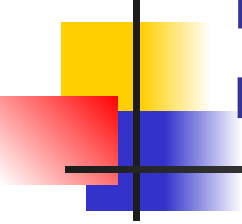
$$\begin{aligned}
 + S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\
 S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_2 + a_1
 \end{aligned}$$

$$2 S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad | : 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$



Найдите сумму первых сорока членов
последовательности, заданной формулой:

$$a_n = 5n - 4$$

Решение

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Данная последовательность вида $a_n = k n + b$, значит, это
арифметическая прогрессия

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40$$

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$$

$$a_{40} = 196$$

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940$$

Найдём сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии

4; 5,5; ...

Решение

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \quad S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30$$

$$a_1 = 4, \quad d = a_2 - a_1 = 1,5$$

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 29 \cdot 1,5}{2} \cdot 30 = 772,5$$

Ответ: 772,5

Задача 19. ГИА – 2011г.

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые не делятся на 5.

Решение

S – искомая сумма; $S = S_1 - S_2$,

где S_1 – сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 150,

S_2 – сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 150, делящихся на 5.

1; 2; 3; ... 150 – арифметическая прогрессия

Ответ: $\frac{a_1 + a_{150}}{2} \cdot 150 = \frac{1 + 150}{2} \cdot 150 = 151 \cdot 75$

5; 10; ... 150 – арифметическая прогрессия $b_1 = 5$;

$$b_n = 150; d = 5; b_n = 5n; 5n = 150; n = 30$$

$$S_2 = \frac{b_1 + b_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{5 + 150}{2} \cdot 30 = 155 \cdot 15$$

№ 690(в)

Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3, заключенных в промежутке от 100 до 200.

Решение

Формула, задающая натуральные числа кратные 3: $3n$

Что об этих числах вы знаете?

По условию $100 \leq 3n \leq 200 \mid : 3$

$$33\frac{1}{3} \leq n \leq 66\frac{2}{3}$$

значит. чл. $b_1 + b_{33}$ $102 + 198$ $300 \cdot 33$ анному

усл. $S_{33} = \frac{b_1 + b_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{102 + 198}{2} \cdot 33 = \frac{300 \cdot 33}{2} =$

Последовательность: 102, 105, 108, ..., 198 по определению

арис. $\frac{9900}{2} = 4950$ прогрессия, первый член которой 102;

разн. 3, последний член - 198.

Сколько членов в этой прогрессии? $n = 66 - 33 = 33$

Ответ: 4 950

№ 691(6)

Найдите сумму натуральных чисел больших 50, но меньших 150 и не кратных 5?

Анализируем

$$S = 51 + 52 + 53 + 54 + \cancel{55} + 56 + 57 + \dots + 149.$$

Исключаем числа: 55; 60; 65; ...; 145.

Решение

S – искомая сумма, S_1 – сумма натуральных чисел больших 50, но меньших 150.

S_2 – сумма натуральных чисел больших 50, но меньших 150 и кратных 5.

$$S = S_1 - S_2$$

Последовательность чисел: 51; 52; ... 149 – арифметическая прогрессия со знаменателем 1.

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ где } a_1 = 51,$$

$$a_n = 149, \quad n = 149 - 50 = 99$$

$$S_1 = \frac{51 + 149}{2} \cdot 99 = 9\,900$$

Последовательность чисел: 55; 60; 65; ... ; 145 – арифметическая прогрессия со знаменателем 5.

$$b_1 = 55, \quad b_n = 145, \quad d = 5, \quad n = 19$$

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$55 + 5(n-1) = 145$$

$$5(n-1) = 90$$

$$n-1 = 18$$

$$n = 19$$

$$S_2 = \frac{55 + 145}{2} \cdot 19 =$$

$$= 1\,900$$

$$S = 9\,900 - 1\,900 = 8\,000$$

Ответ: 8 000.

Задача. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии $-42; -38; -34; \dots$, сумма которых меньше 150.

Решение.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \quad a_1 = -42, \quad d = a_2 - a_1 = 4$$

$$S_n < 150 \quad \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 150$$

$$\frac{2 \cdot (-42) + (n-1)4}{2} \cdot n < 150$$

$$(-42 + 2n - 2)n < 150 \quad | : 2$$

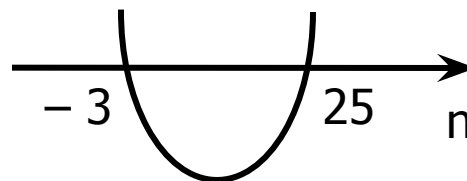
$$(-22 + n)n < 75$$

$$n^2 - 22n - 75 < 0$$

$$y = n^2 - 22n - 75$$

$$y = 0; \quad n^2 - 22n - 75 = 0$$

$$n = 25 \quad \text{или} \quad n = -3$$



$$n \in (-3; 25)$$

n – натуральное число, поэтому

$$n = 1; 2; 3; \dots; 24.$$

Наибольшее число – **24**

Ответ: **24**