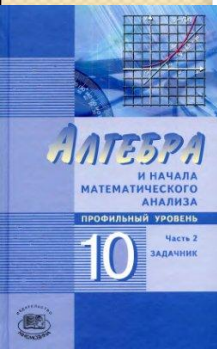


# Методы решения иррациональных уравнений

Автор: Макарова Татьяна Павловна, учитель  
математики высшей категории ГБОУ СОШ  
№618 г. Москвы

Контингент: 10 класс физико-математического профиля.



# Цель урока:

- **Обобщение и систематизация способов решения иррациональных уравнений.**
- **Решение более сложных типов иррациональных уравнений .**
- **Развивать умение обобщать, правильно отбирать способы решения иррациональных уравнений.**
- **Развивать самостоятельность, воспитывать грамотность речи.**



# Устная работа

- Можно ли, не решая уравнений, сделать вывод о неразрешимости предложенных уравнений:

$$\sqrt{7-x} = -8+x;$$

$$\sqrt{x-3} = -\sqrt{x^2-1}$$

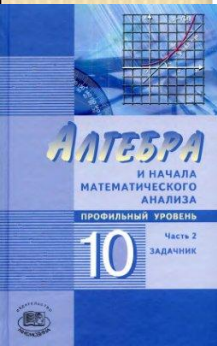
$$\sqrt{3-x} = 5 - \sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{5x+7} + \sqrt{3-4x-x^2} + 2 = 0$$



# Методы решения иррациональных уравнений

- *Введение новой переменной*
- *Исследование ОДЗ*
- *Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.*
- *Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной.*
- *Выделение полного квадрата*



# Методы решения иррациональных уравнений

- *Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение*
- *Использование свойств монотонности функций*
- *Использование векторов*
- *Функционально - графический метод*
- *Метод равносильных преобразований*
- *Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень*



# Введение новой переменной

- Решить уравнение.

$$x^2 + 3x - 18 + 4 \cdot \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$$

Пусть  $x^2 + 3x - 6 = t$ ,  $t$  – неотрицательное число, тогда имеем  $t - 12 + 4\sqrt{t} = 0$ .

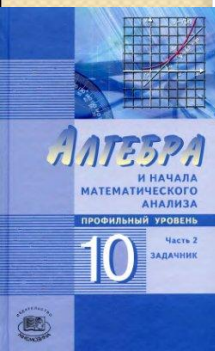
Отсюда,  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = 36$ .

Проверкой убеждаемся, что  $t = 36$  – посторонний корень.

Выполняем обратную подстановку

$$x^2 + 3x - 6 = 4$$

Отсюда,  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 2$ .



# Исследование ОДЗ

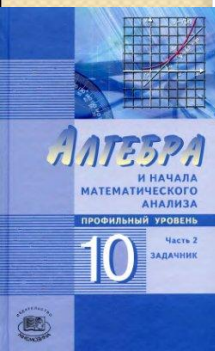
- Решить уравнение

$$3 \cdot \sqrt{3x+1} - 4 \cdot \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x-1} = -(2 + \sqrt{1-x})$$

*Решение.*

Замечаем, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки  $x=1$ .

Проверкой убеждаемся, что  $x=1$  – решение уравнения.





## Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель

- Решить уравнение  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$ .

*Решение.* Умножим обе части уравнения на  $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$

$$\text{Получим, } x+3 - x-8 = 5 \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8}).$$

$$\text{Имеем, } \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = -1, \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда, } 2 \cdot \sqrt{x+3} = 4, \quad x = 1.$$

Проверкой убеждаемся, что  $x = 1$  является корнем данного уравнения.



## Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной

- Решить уравнение  $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ .

Решение. Положим  $u = \sqrt[3]{x-2}$ ,  $v = \sqrt{x+1}$ .

Тогда  $u+v=3$ . Так как  $u^3=x-2$ ,  $v^2=x+1$ , то  $v^2 - u^3 = 3$ .

Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases} v + u = 3, \\ v^2 - u^3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u, \\ u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2, \\ u = 1. \end{cases}$$

Значит,  $x=3$ .



# Выделение полного квадрата

## ● Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + 2 \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2 \cdot \sqrt{x+1} = 2.$$

Заметим, что  $x+2 + 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2$

$$x+2 - 2 \cdot \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 1)^2.$$

Следовательно, имеем уравнение

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + 1 \geq 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 < 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 \geq 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

Ответ:  $-1 \leq x \leq 0$ . ИЛИ

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 < 0, \\ \sqrt{x+1} + 1 + 1 - \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

Решением первой системы будет  $x=0$ , решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству  $-1 \leq x < 0$ .

## Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение

● Решить уравнение  $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2 - x^2$ .

Так как  $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$  и  $\sqrt[4]{x^4 + 1} \geq 1$  для любых значений  $x$ ,

то левая часть уравнения не меньше двух для  $x \in \mathbb{R}$

Правая часть  $2 - x^2 \leq 2$  для  $x \in \mathbb{R}$ .

Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения  $x$ , при которых

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^4 + 1} = 2, \\ 2 - x^2 = 2. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем  $x=0$ .

Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак,  $x=0$  – корень уравнения.



# Использование свойств монотонности функций

- Решить уравнение  $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{29-x}$ .

Если функция  $u(x)$  монотонная, то уравнение  $u(x) = A$  либо не имеет решений, либо имеет единственное решение. Отсюда следует, что уравнение  $u(x) = v(x)$ , где  $u(x)$  - возрастающая, а  $v(x)$  - убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Подбором находим, что  $x=2$  и оно единственно.



# Использование векторов

● Решите уравнение  $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$ .  
ОДЗ:  $-1 \leq x \leq 3$ .

Пусть вектор  $\vec{a} = \{x; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x}\}$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}.$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+3-x} = 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$$

Получили  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  Отсюда,  $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

Возведем обе части в квадрат. Решив уравнение, получим

$$x = 1; x = 1 \pm \sqrt{2}$$



# Самостоятельная работа с последующей проверкой

ВАРИАНТ 1

$$\sqrt{|x^2 - 5| + 4|x + 4| - 9} = |x + 7| - 1,$$

$$(2) \quad (x + 2) \sqrt{x^2 - x - 20} = 6x + 12,$$

$$\sqrt[3]{5} + x \frac{63}{13} \sqrt[3]{5 - x} = \sqrt[6]{25 - x^2}.$$

ВАРИАНТ 2

$$\sqrt[3]{4 - x^2} + 10\sqrt{x - 1},$$

$$\sqrt[5]{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 3,$$

$$\sqrt[6]{x} \sqrt{x^7} + 25 \cdot \sqrt[4]{x} \sqrt{x} = 54.$$





# Домашнее задание

- Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

Решите уравнения:

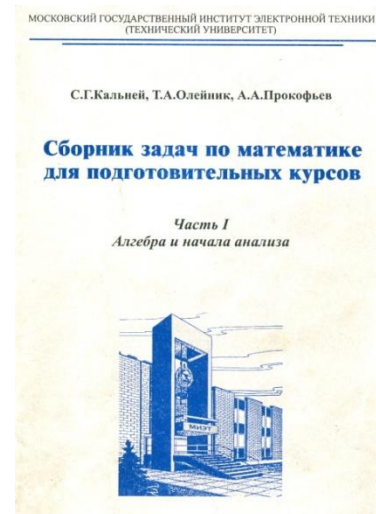
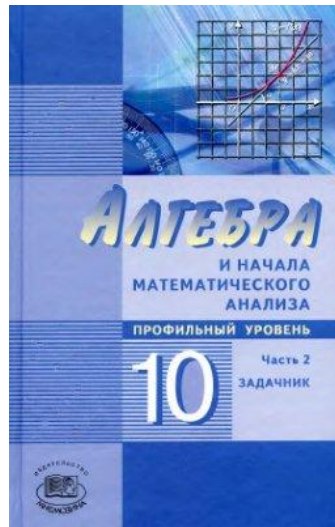
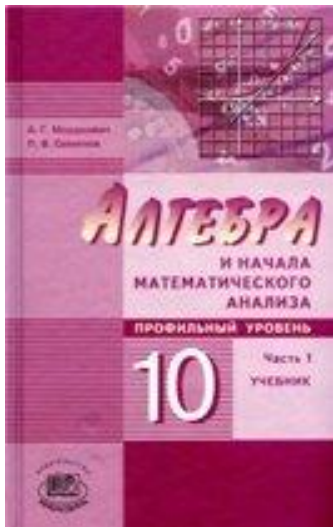
$$\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4.$$





# Источники



<http://rudocs.exdat.com/docs/index-18133.html>

<http://dist-tutor.info/mod/lesson/view.php>

<http://ru.wikibooks.org/wiki/>



**спасибо за урок,  
всего доброго!**