Функции и графики в школьном курсе математики

Prezented.Ru

ТМОМ
Методика изучения основных разделов предметного содержания школьного курса математики
Тема *4*

План

1. Различные подходы к определению понятия функция
2. Методика введения понятия функции в учебниках различных авторов
3. Методические особенности изучения отдельных классов функций.

Обоснование функциональной линии как ведущей для школьного курса математики — одно из крупнейших достижений современной методики.

Фундаментальность понятия порождает многообразие путей разворачивания содержания данной линии и различные трактовки самого понятия

Генетическая трактовка понятия «функция»

Генетическая трактовка понятия функции основана на понятиях

- переменная величина,
- функциональная **зависимость** переменных величин,
- формула (выражающая одну переменную через некоторую комбинацию других переменных),
- декартова система координат на плоскости.

Генетическая трактовка понятия «функция»

Достоинства генетической трактовки*:*

- «динамический» характер понятия функциональной зависимости,
- легко выявляемый модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы. ,
- Легко устанавливаемая связь с остальным содержанием курса алгебры, поскольку большинство функций, используемых в нем, выражаются аналитически или таблично.

Генетическая трактовка понятия «функция»

Недостатки генетической трактовки:

- переменная при таком подходе всегда неявно (или даже явно) предполагается пробегающей непрерывный ряд числовых значений. Поэтому понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента

Логическая трактовка понятия «функция»

Логическая трактовка понятия функции:

- понятие функции выводится из понятия отношения,
- функция выступает в виде **отношения** специального вида между двумя множествами

Логическая трактовка понятия «функция»

Достоинства логической трактовки:

- Обогащение языка школьной математики за счет иллюстрирования понятия с помощью разных средств;
- Обобщенность понятия, позволяющая устанавливать различные связи.

Недостатки логической трактовки:

- Выработанное понятие не востребовано, т. к. в дальнейшем в основном используются только числовые функции

- **В практике современной школы в качестве ведущего подхода принят генетический подход с одновременным использованием всего полезного из генетического подхода**.

Система компонентов понятия «функции»

- представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах и в математике;
- представление о функции как о соответствии;
- построение и использование графиков функций, исследование функций;
- вычисление значений функций, определенных различными способами.

Введение понятия функции — длительный процесс, завершающийся формированием представлений о всех компонентах этого понятия в их взаимной связи и о роли, играемой им в математике и в ее приложениях.

Изучение разных способов задания функции – важный методический прием.

Направления введения понятия «функция»

- упорядочение имеющихся представлений о функции, развертывание системы понятий, характерных для функциональной линии:
  - способы задания и общие свойства функций,
  - Графическое истолкование области определения, области значений, возрастания и т. д.;
- глубокое изучение отдельных функций и их классов;
- расширение области приложений

Особенности первого направления

- Однозначности соответствия аргумента и определенного по нему значения функции отводится значительное место.

- Для формирования понятия привлекаются различные способы задания функции, хотя в дальнейшем все способы задания функций играют соподчиненную роль аналитическому способу задания

Причины важности рассмотрения разных способов задания функции

- Во-первых, оно связано с практической потребностью:

  и таблицы, и графики, как правило, служат для удобного в определенных обстоятельствах представления функции, имеющей аналитическую форму записи.

- Во-вторых, оно важно для усвоения всего многообразия аспектов понятия функции:

  формула выражает функцию лишь будучи включенной в соответствующую систему представлений и операций, а эта система такова, что различные компоненты понятия функции могут быть отображены наиболее естественно различными средствами.

Система заданий на установление связей между тремя основными способами задания функции (формулой, графиком, таблицей) включает

- 6 типов упражнений с изменением формы
- 3 типа с сохранением формы

Основные подходы к введению понятия «функции»

Индуктивный подход

- Изначально рассмотрение большого числа примеров, с помощью которых интуитивно выявляется суть понятия,
- последующее более строгое определение основных понятий.

Дедуктивный подход

- Изначально полное и сжатое изложение учебного материала, пусть даже малопонятного при первом прочтении,
- дальнейшая углубленная проработка всех примеров, терминов и определений с помощью иллюстраций.

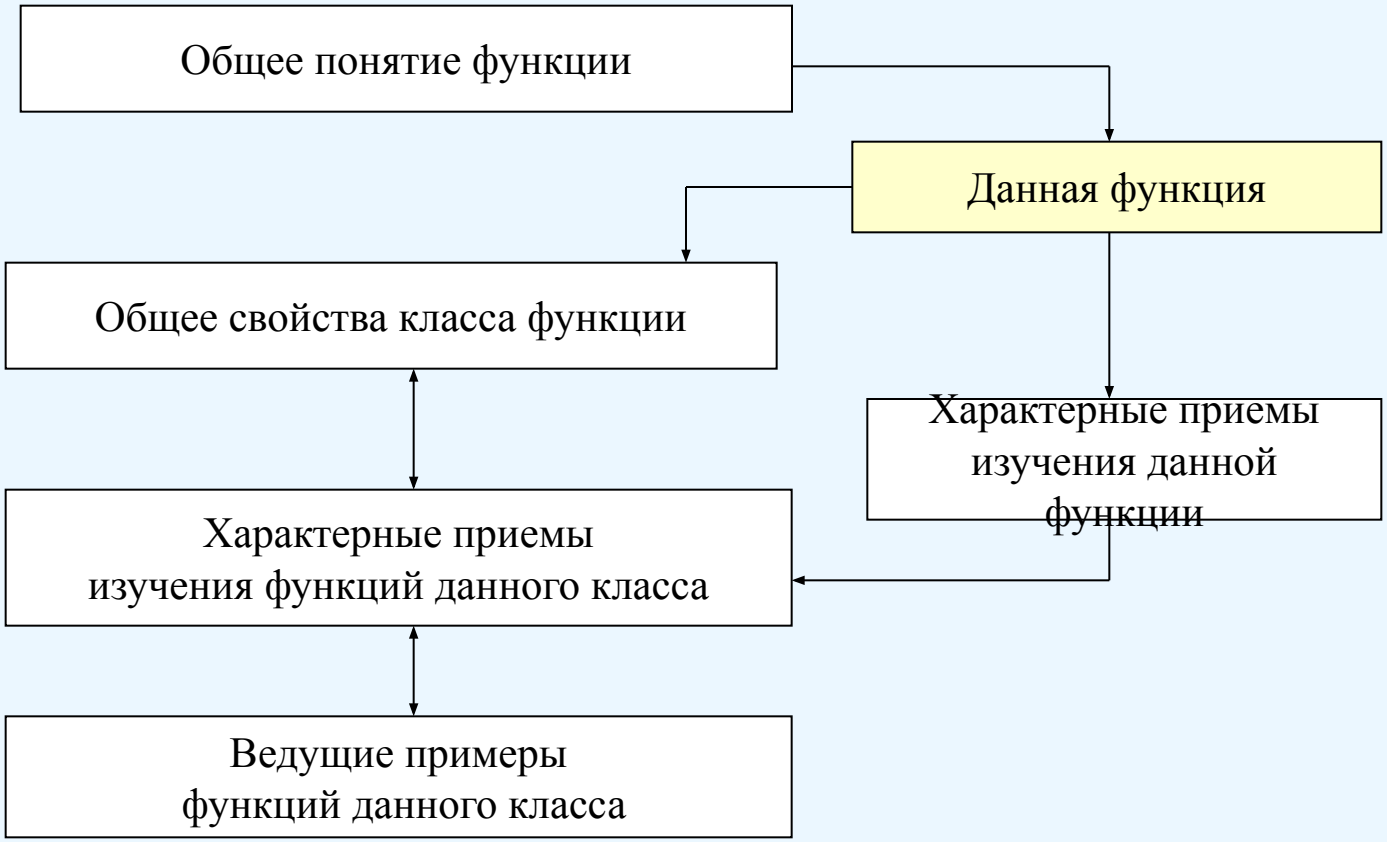
Изучение классов функций

Класс функций – множество функций, обладающих общностью аналитического способа задания (формулы) и исходящими из этого сходными особенностями графика, областей применения.

Для функций, входящих в класс, изучение идет в **двух аспектах** :

- Изучение данной функции как члена класса;
- Изучение свойств всего класса на примере типичной функции, входящей в класс.

Методическая схема изучения функции, входящей в класс



Методические особенности изучения прямой и обратной пропорциональной зависимости

- Опора на знания о пропорции и пропорциональной зависимости величин.
- Индуктивный подход к введению понятия.
- Использование приема «загущения» точек при построении графика.

Последовательность действий построения графиков функций методом «загустения» точек

- нанесение нескольких точек;
- наблюдение — все построенные точки расположены на одной прямой;
- проведение этой прямой;
- проверка:
  - берем произвольное значение аргумента и вычисляем по нему значение функции;
  - наносим точку на координатную плоскость — она принадлежит построенной прямой.
- вывод о графике данной функции.

Изучение линейной функции

- Представление о линейной функции выделяется при построении графика некоторой линейной функции.

- **Основная мысль**, которую необходимо обосновать, состоит в том, что рассмотрение графика отдельно взятой линейной функции не может дать полного представления об основных свойствах графиков всех линейных функций.

Построение графиков линейной функции

- Построение первой из рассматриваемых функций проводится методом «**загустения**» **точек**.

- Затем на основе вывода о виде линии, являющейся графиком любой линейной функции, геометрически обосновывается второй способ построения графика линейной функции – «**по двум точкам**».

- Следует сразу отметить, что первый способ является универсальным (т.е. общим для всех функций), а второй – специфическим для линейной функции.

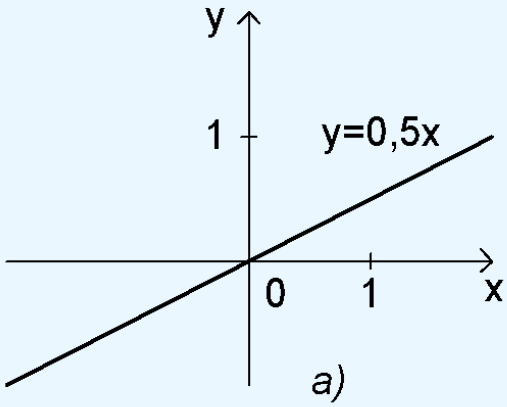
Изучение свойств линейной функции

- **Новая для учащихся познавательная задача**

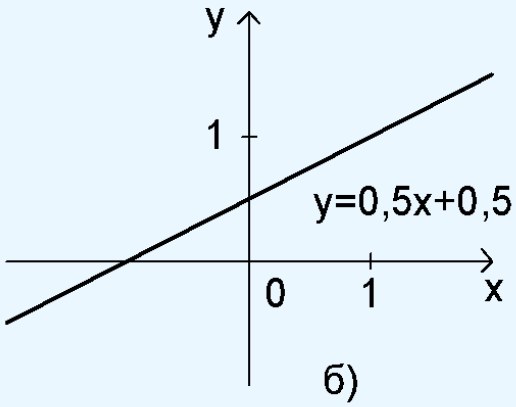
  Исследовать класс функций **y=kx+b** в зависимости от параметров, установить геометрический смысл параметров.
- **Методический прием исследования***:*

  Рассмотреть одновременно нескольких функций, у которых один из параметров изменяется, а другой остается постоянным.
- **Простейшая система**, **реализующая этот прием**, состоит из четырех заданий с их последующим анализом и установлением связей между ними.

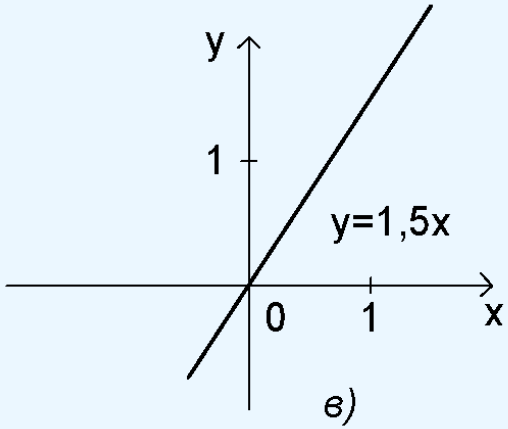
Изучение свойств линейной функции



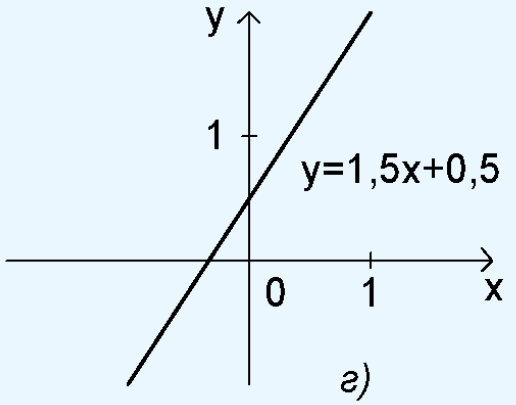
а)



б)



в)



г)

Изучение свойств линейной функции

- Графики (а) и (б) образуют с осью абсцисс одинаковые углы, это же имеет место и для графиков (в) и (г).
- Графики (а) и (б) образуют с осью абсцисс меньшие углы, чем (в) и (г).
- Коэффициенты при переменной в формуле для первой и второй функций одинаковы и меньше, чем соответствующие коэффициенты у третьей и четвертой функций.
- Сформулировать вывод о зависимости рассмотренного угла от коэффициента.
- Ввести термин «угловой коэффициент»

Изучение свойств линейной функции

Аналогичную работу необходимо провести для отрицательного коэффициента k и коэффициента b.

Рассмотренный прием называют **оценочным исследованием функции**

Особенности изучения квадратичной функции

- Изучение *квадратичной функции* учащимися можно начать
  - с построения параболы,
  - с изучения физических процессов, где зависимость между величинами может быть выражена с помощью многочленов второй степени,

Особенности изучения квадратичной функции

- Для изучения квадратичной функции могут быть применены все приемы, использованные для изучения линейной функции:
  - построение графика методом «загустения» точек;
  - оценочное исследование функции.

- Однако, для изучения свойств квадратичной функции этих приемов недостаточно, т.к. свойства квадратичной функции существенно отличаются от

Особенности изучения квадратичной функции

- **Свойства квадратичной функции**, **требующие расширения приемов ее исследования и выполнения заданий особого вида**:
  - функция не монотонна на области определения;
  - характер изменения функции не является равномерным;
  - ее график симметричен относительно некоторой прямой.

Особенности изучения квадратичной функции

Главная особенность квадратичной функции: не все ее параметры имеют ясный геометрический смысл, как в случае с линейной функцией

Именно поэтому к изучению класса квадратичных функций привлекается прием, основанный на преобразовании выражения, задающего функцию, к виду $y = a(x - b)^2 + c$, и использовании геометрических преобразований для построения графика произвольной квадратичной функции из параболы стандартного положения, т.е.

Особенности изучения квадратичной функции

Последовательность рассмотрения частных видов квадратичной функции:

1. $y = x^2$,
2. $y = ax^2$, $a \neq 0$.
3. $y = ax^2 + c$, $a \neq 0$.
4. $y = a(x + b)^2$, $a \neq 0$.
5. $y = a(x + b)^2 + c$, $a \neq 0$.

Способы построение графиков квадратичной функции

В результате всестороннего изучения свойств квадратичной функции и ее графиков должны быть сформированы два способа построения графика:

- по характеристическим точкам;
- с помощью преобразования графика простейшей функции $y = x^2$,

Изучение степенной, показательной и логарифмической функций

- Строится по аналогичным схемам.
- Главной особенностью является
  - наличие больших ограничений на параметры.
  - ограничение области определения функций.

Изучение тригонометрических функций

- Главное внимание уделяется свойствам четности/нечетности и периодичности функций;
- Обобщаются все известные ранее приемы исследования функций и построения графиков;

Дальнейшее обобщение общие представления о свойствах функций и их графиков осуществляется в курсе начал

Благодарю за внимание!

Prezented.Ru