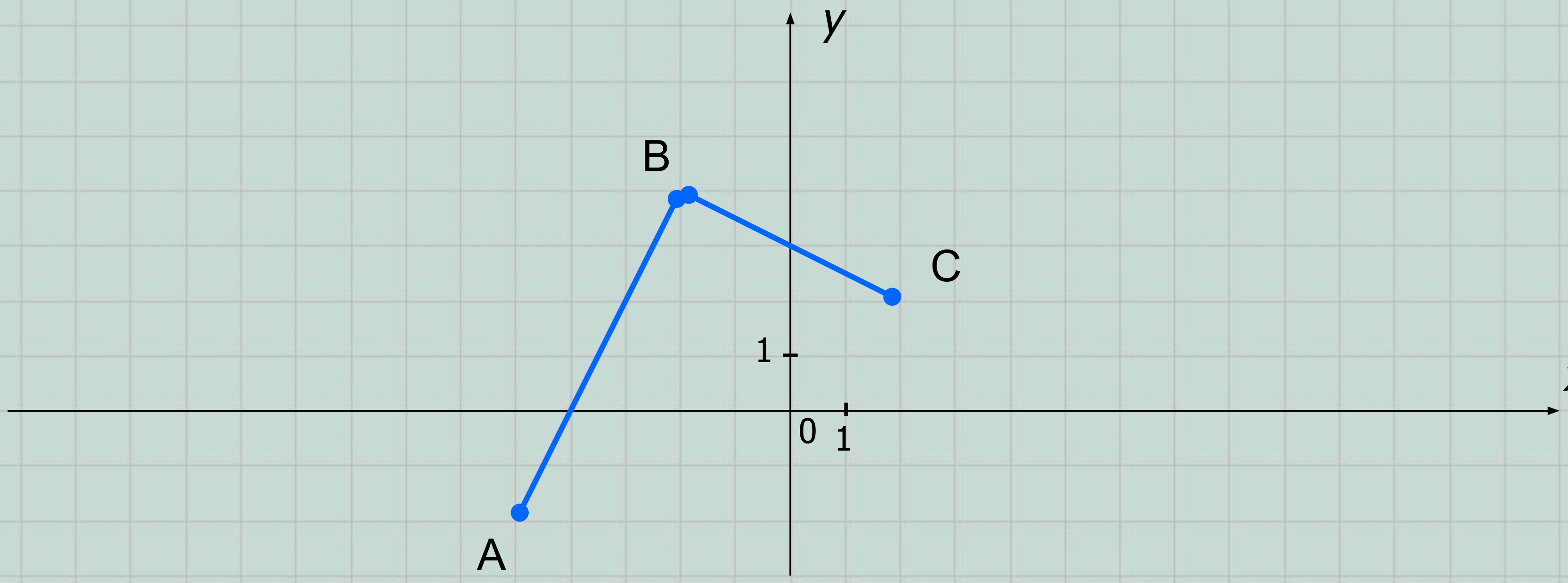
Преобразования графиков функций.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

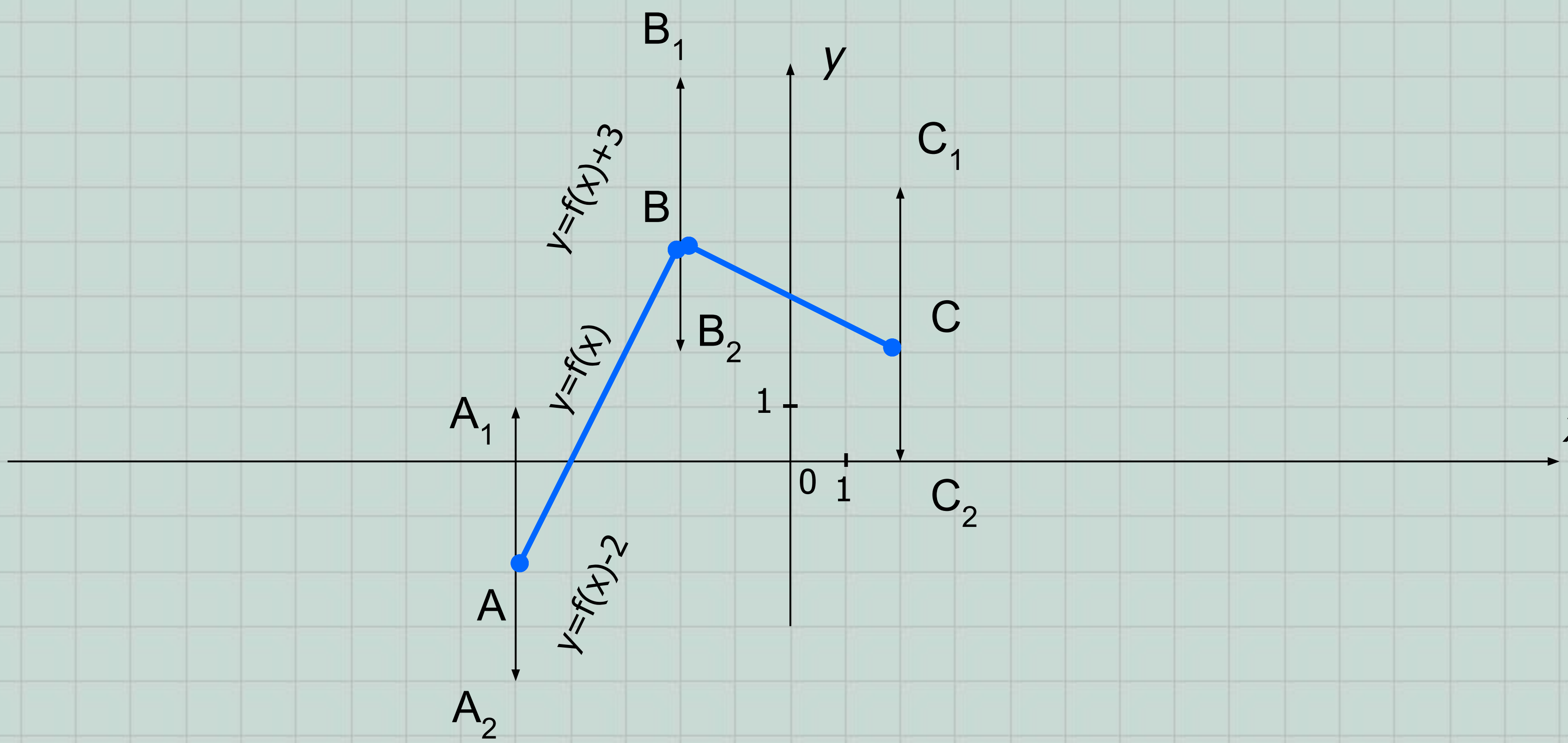
Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

В качестве исходного графика функции y=f(x) выберем ломанную, состоящую из двух звеньев, заданных точками A(-5;-2), B(-2;4) и C(2;2).



Рассмотрим случаи преобразования данного графика, связанные с изменениями формулы, задающей эту функцию.

I. $y=f(x)+a$, где $a\in$ □.



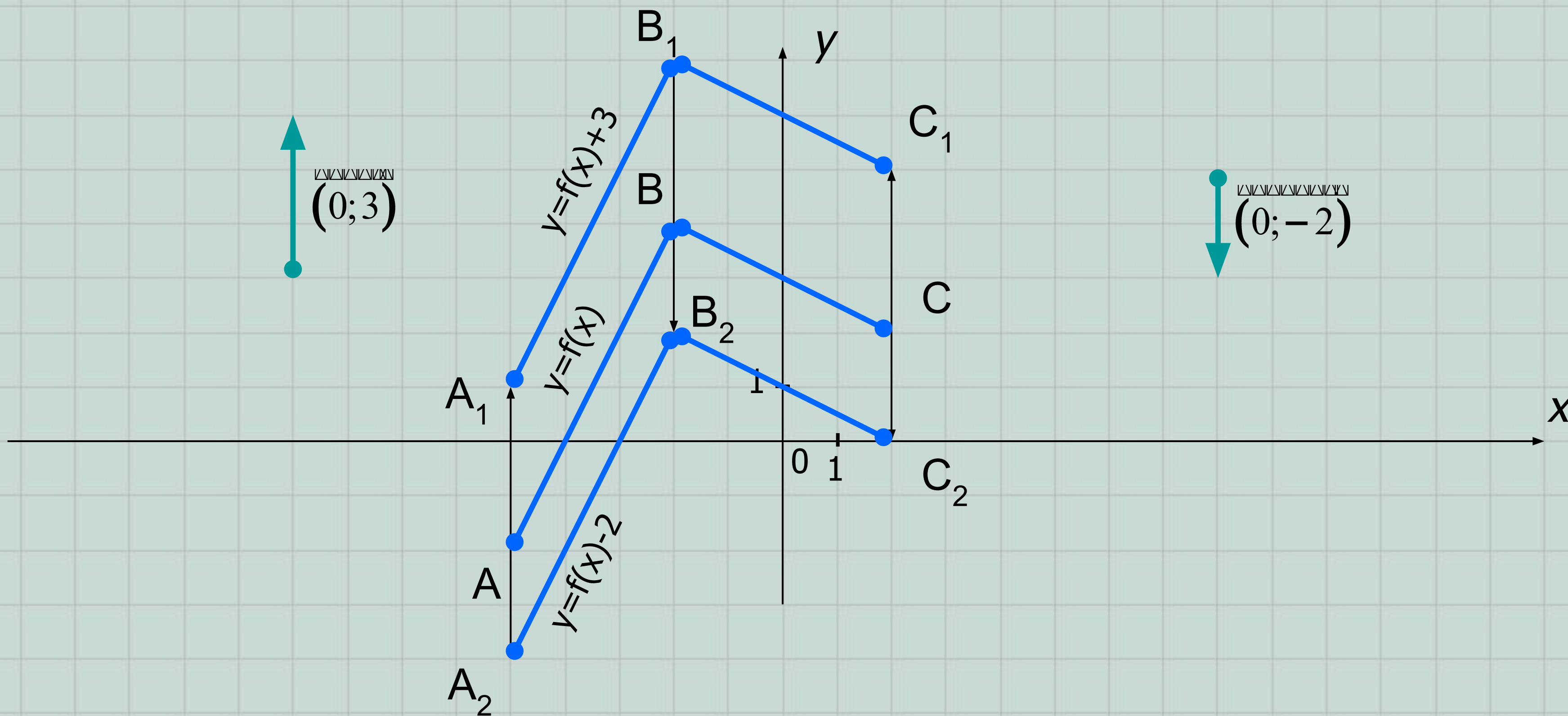
В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на число a, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Оу:

1) вверх на a ед.отр., если $a>0$ или

2) вниз на a ед.отр., если $a<0$.

Например: 1) $y=f(x)+3$; или 2) $y=f(x)-2$.

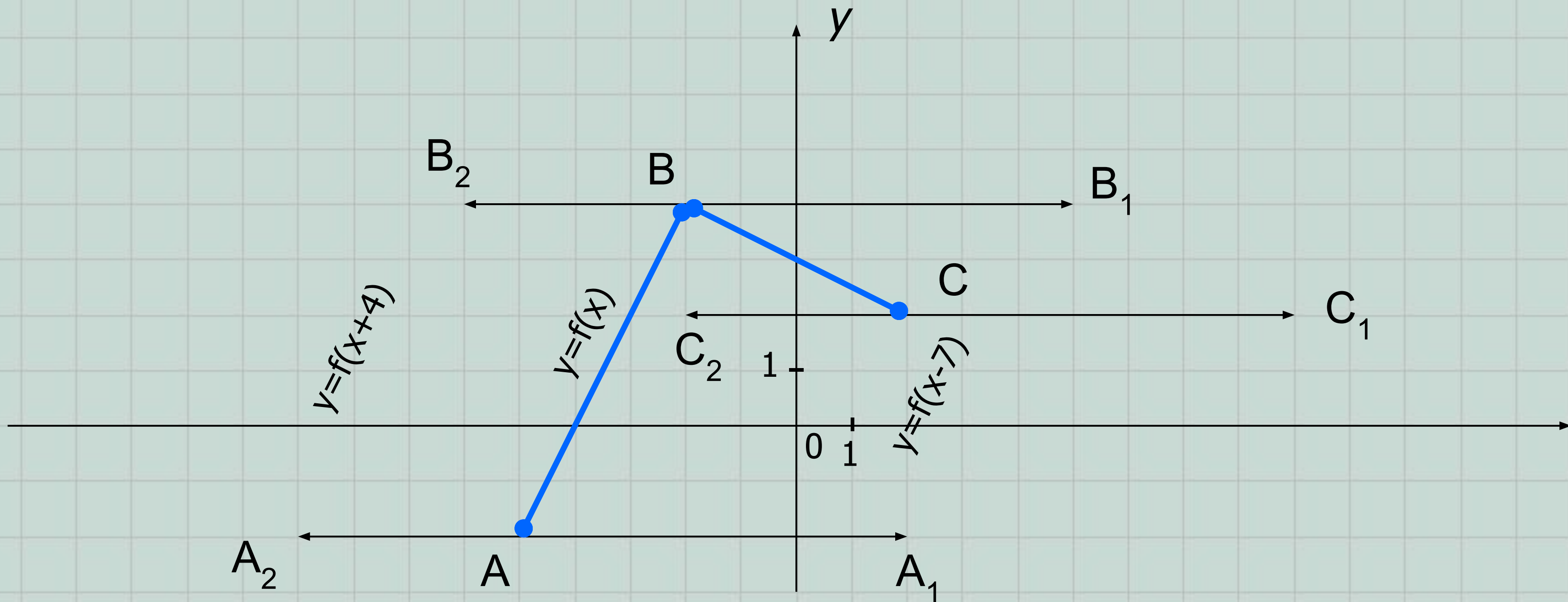
I. y=f(x)+a, где a∈□.



Понятие «параллельного переноса вдоль оси Оу вверх..., вниз...» можно заменить на «параллельный перенос на вектор с координатами $\overline{(0;a)}$ ».

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

II. $y=f(x-a)$, где $a \in \square$.



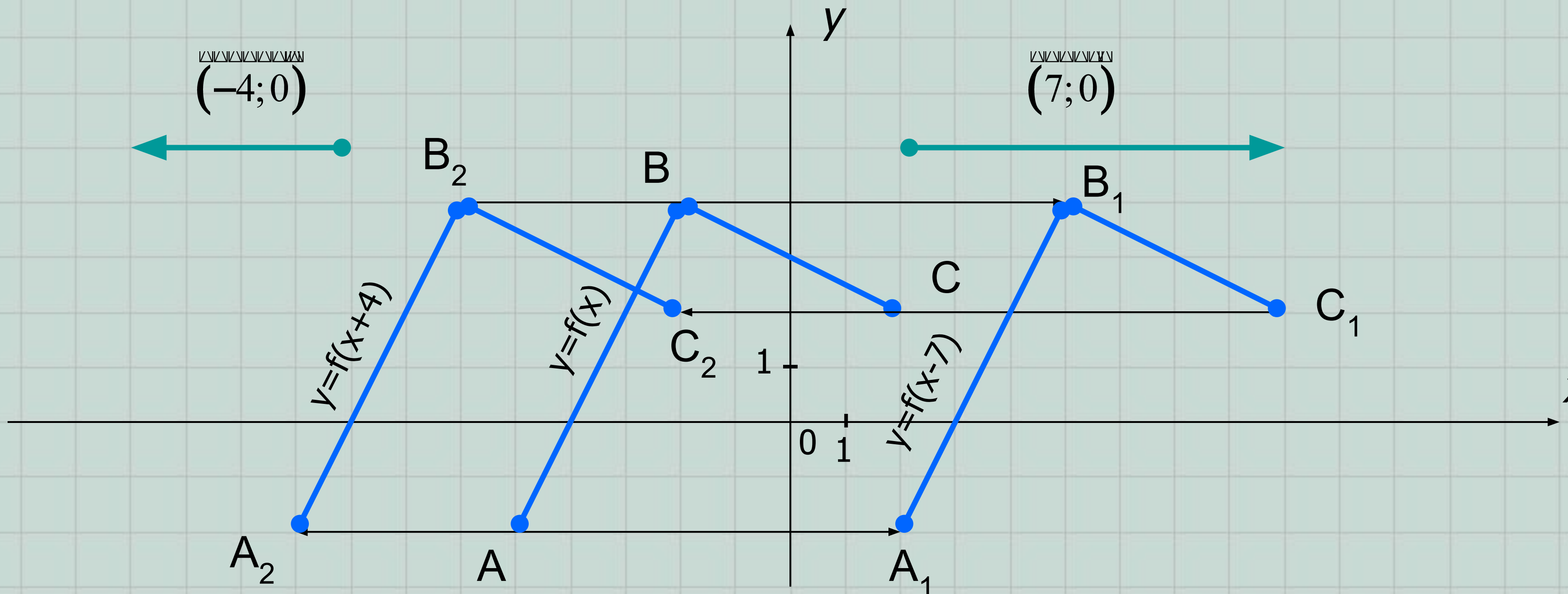
В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на число a, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Ох:

1) вправо на a ед.отр., если $a>0$ или

2) влево на a ед.отр., если $a<0$.

Например: 1) $y=f(x-7)$ или 2) $y=f(x-(-4))=f(x+4)$.

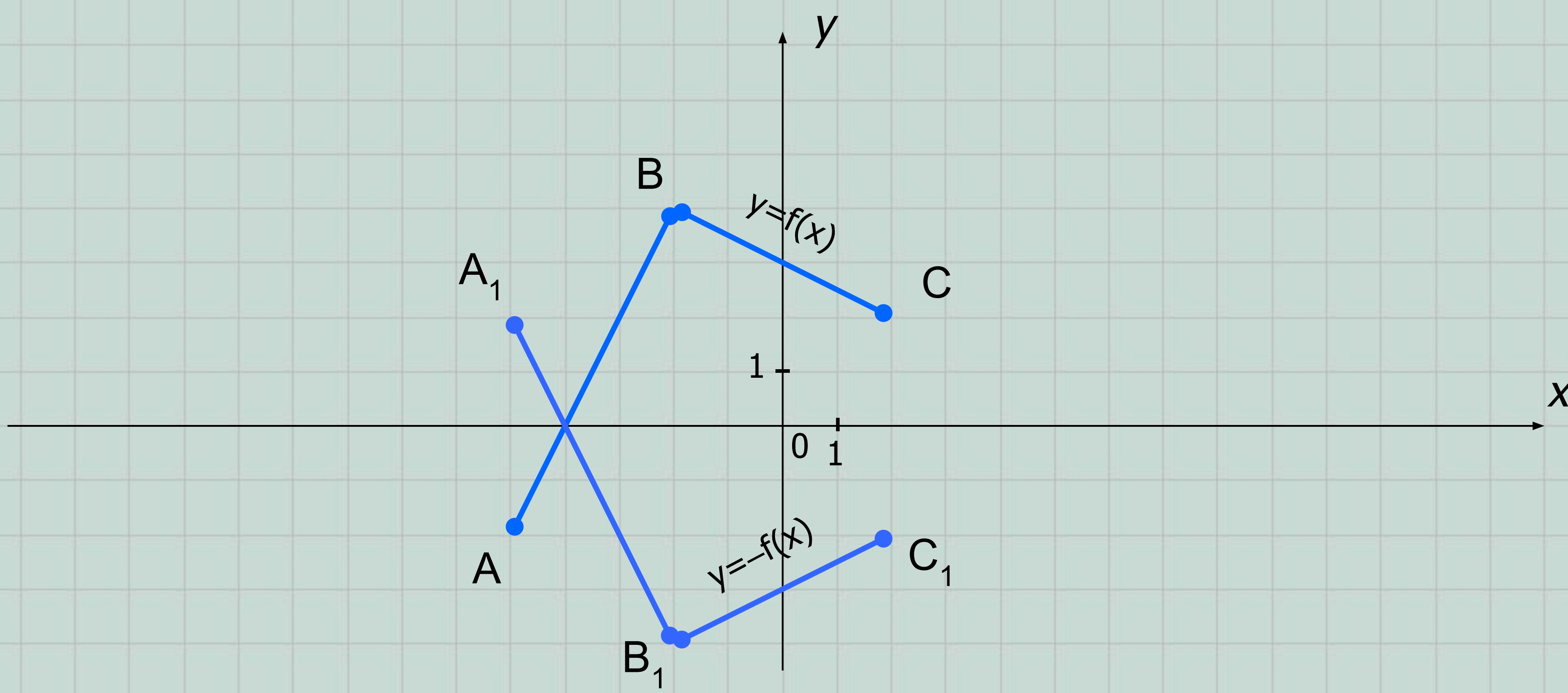
II. $y=f(x-a)$, где $a\in$□.



Вместо понятия «параллельный перенос вдоль оси Ох вправо…, влево…» можно использовать понятие «параллельного переноса на вектор с координатами $\overrightarrow{(a;0)}$.»

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

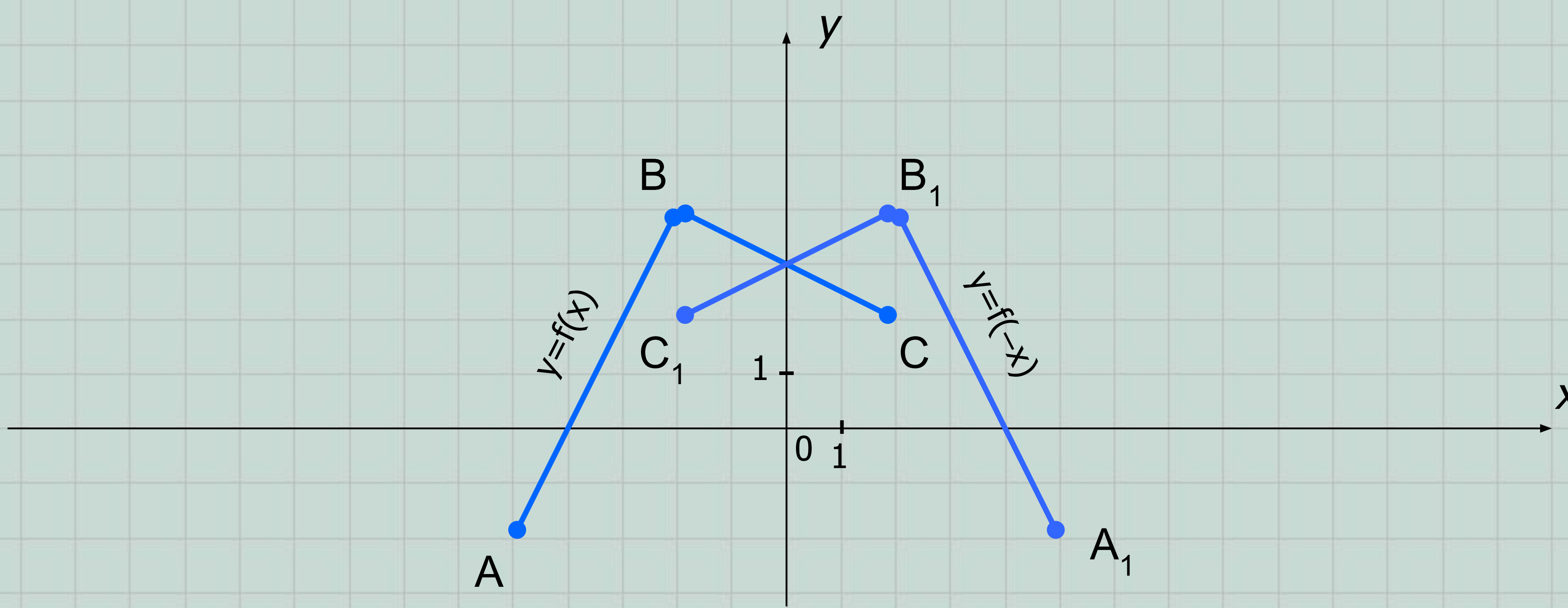
III. y=–f(x).



В данной формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Ox.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

IV. y=f(–x).

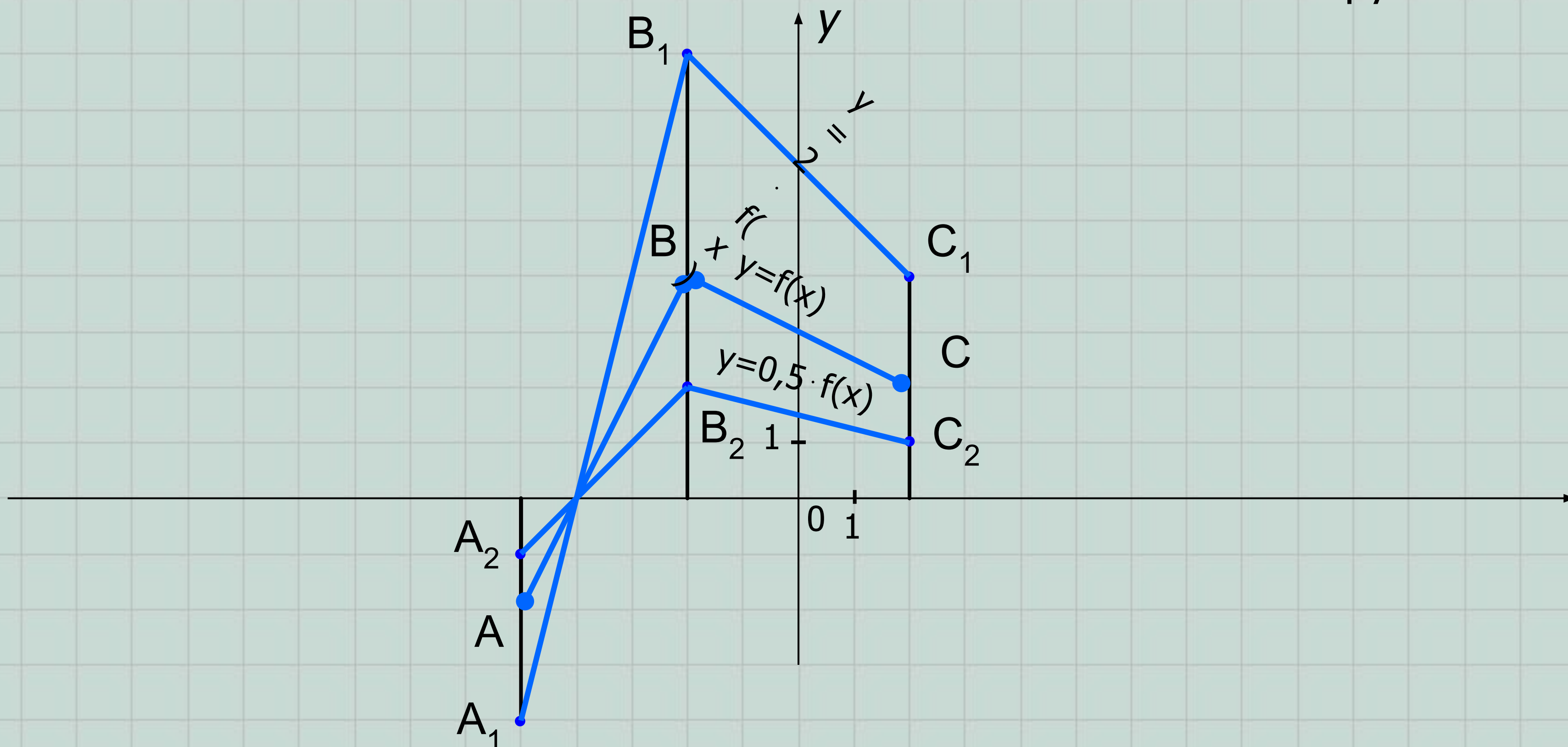


В данной формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Оу.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

V. $y = k \cdot f(x)$, $k > 0$.

Если $k < 0$, то данный случай комбинируют с III.



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к :

1) «растяжению» графика функции от оси Ох в k раз, если $k > 1$ или

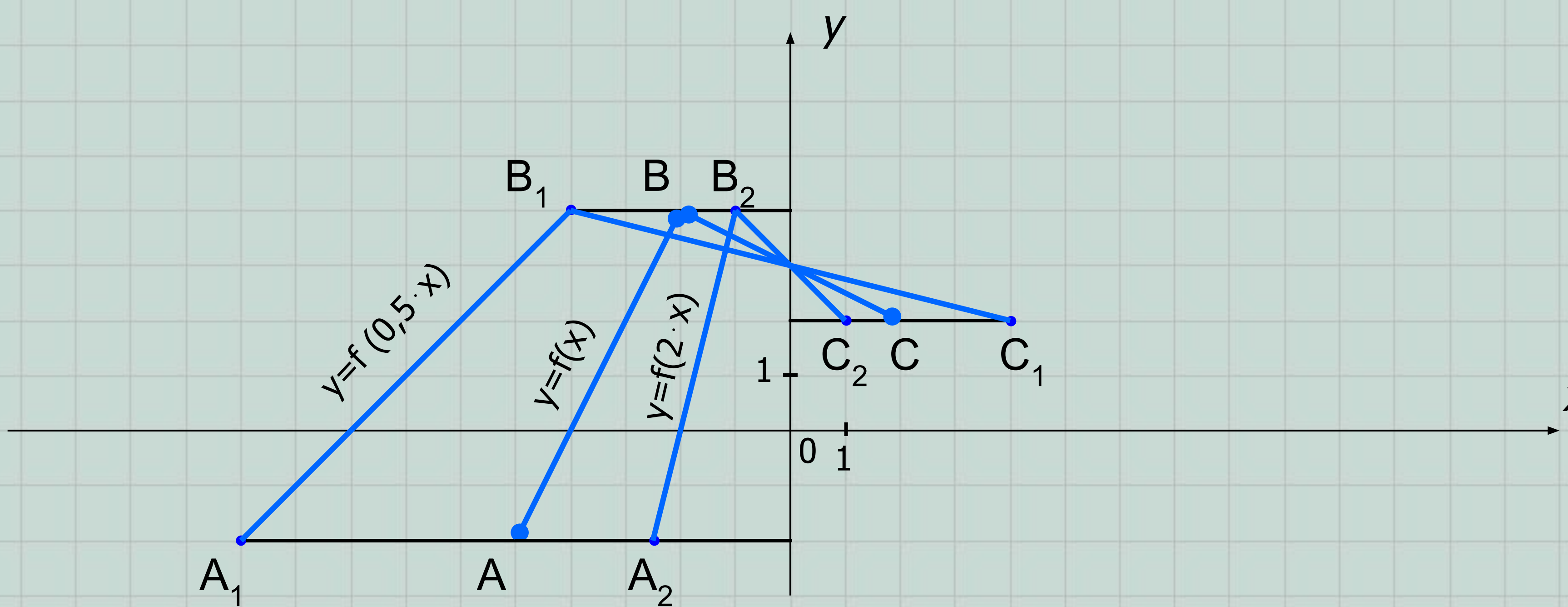
2) «сжатию» графика функции к оси Ох в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $k < 1$.

Например: 1) $y = 2 \cdot f(x)$; или 2) $y = 0{,}5 \cdot f(x)$.

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VI. y=f(k · x), k>0.

Если k<0, то данный случай комбинируют с IV.



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к :

1) «растяжению» графика функции от оси Оу в $\frac{1}{k}$ раз, если k<1 или

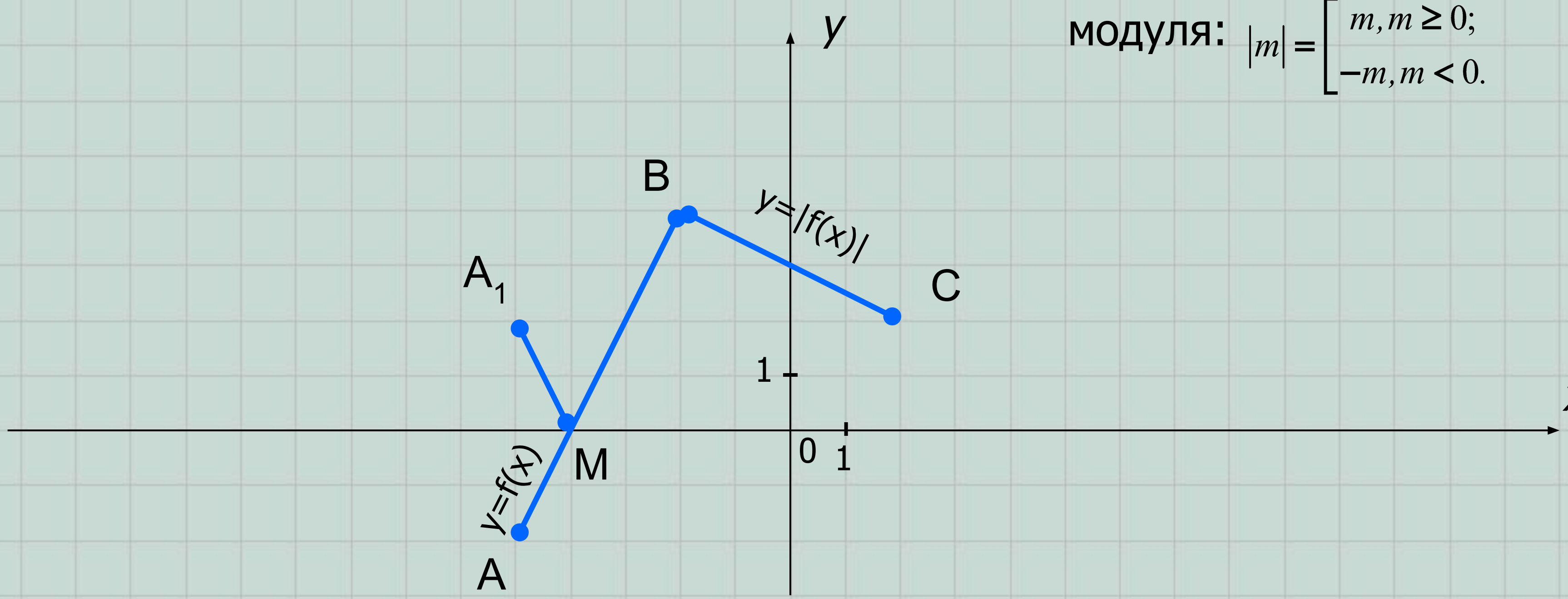
2) «сжатию» графика функции к оси Оу в k раз, если k>1.

Например: 1) y=f(0,5 · x); или 2) y=f(2 · x).

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VII. y=|f(x)|.

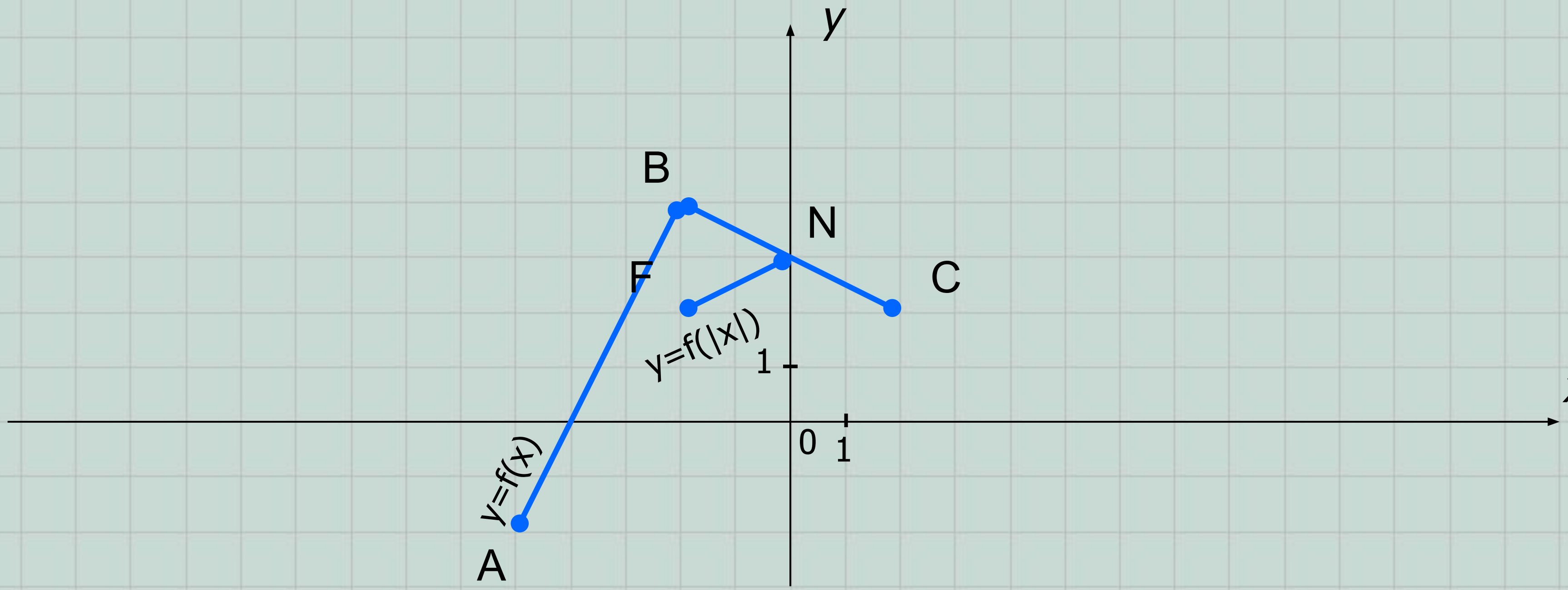
Вспомните определение модуля: $|m| = \left[\begin{array}{l} m, m \geq 0; \\ -m, m < 0. \end{array}\right.$



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными ординатами (т.е. находящихся в нижней полуплоскости относительно оси Ox) и симметричному отображению этих частей относительно оси Ox.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

VIII. y=f(|x|).



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными абсциссами (т.е. находящихся в левой полуплоскости относительно оси Оу) и замещению их частями исходного графика, симметричными относительно оси Оу.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

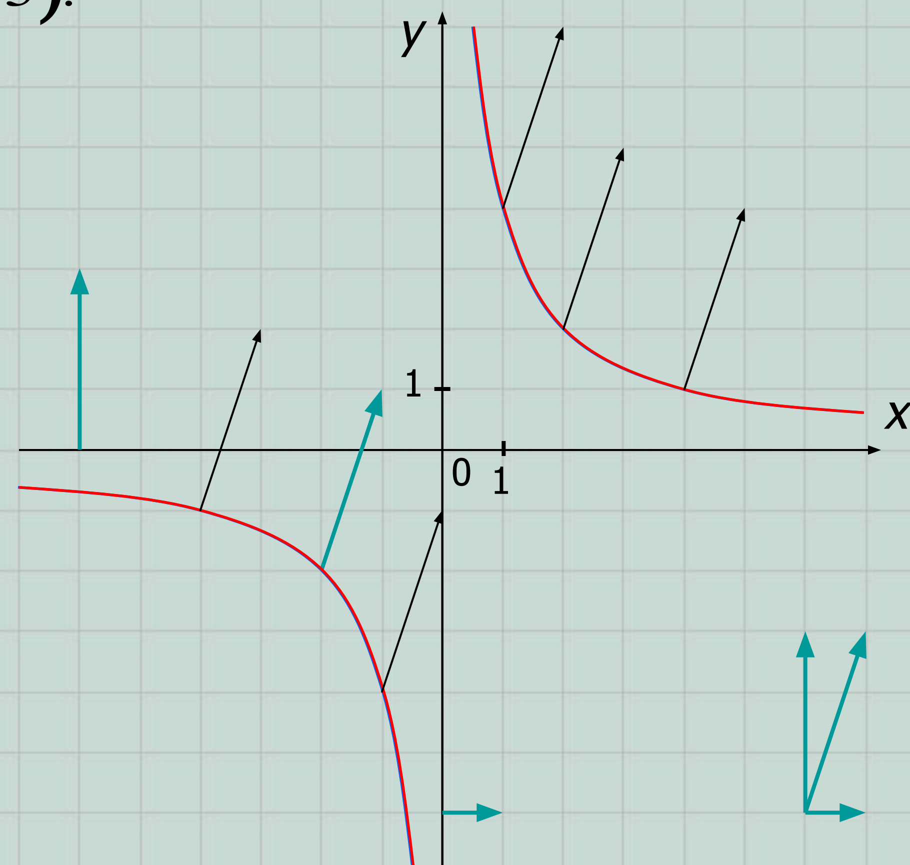
Рассмотрим несколько примеров применения вышеизложенной теории.

<u>*ПРИМЕР 1*</u>. Построить график функции, заданной формулой $y=\dfrac{3x+1}{x-1}.$

Решение. Преобразуем данную формулу: $y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3.$

1) Построим график функции $y=\dfrac{4}{x}.$

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $(1;3)$.

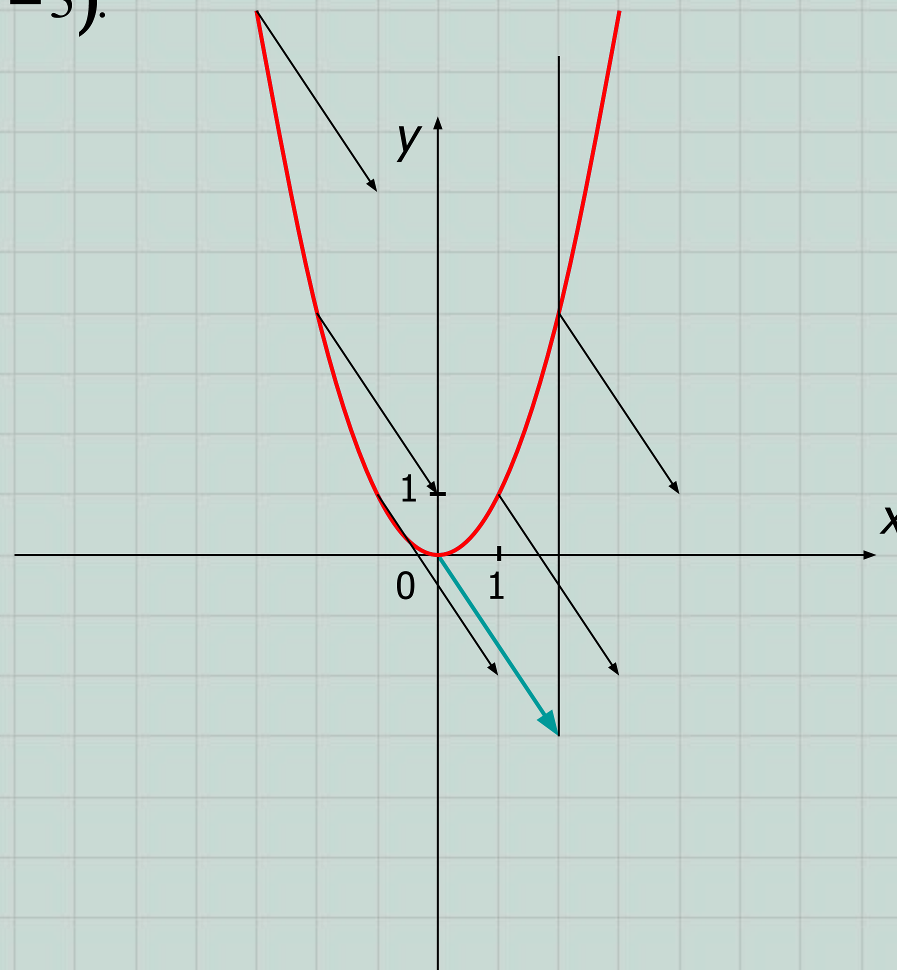


__ПРИМЕР 2__. Построить график функции, заданной формулой $y = x^2 - 4x + 1$.

Решение. Преобразуем данную формулу, выделив в данном квадратном трехчлене квадрат двучлена: $y = x^2 - 4x + 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2\right) - 4 + 1 = (x-2)^2 - 3$.

1) Построим график функции $y = x^2$.

2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $(2; -3)$.



ПРИМЕР 3. Построить график функции, заданной формулой $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1.$

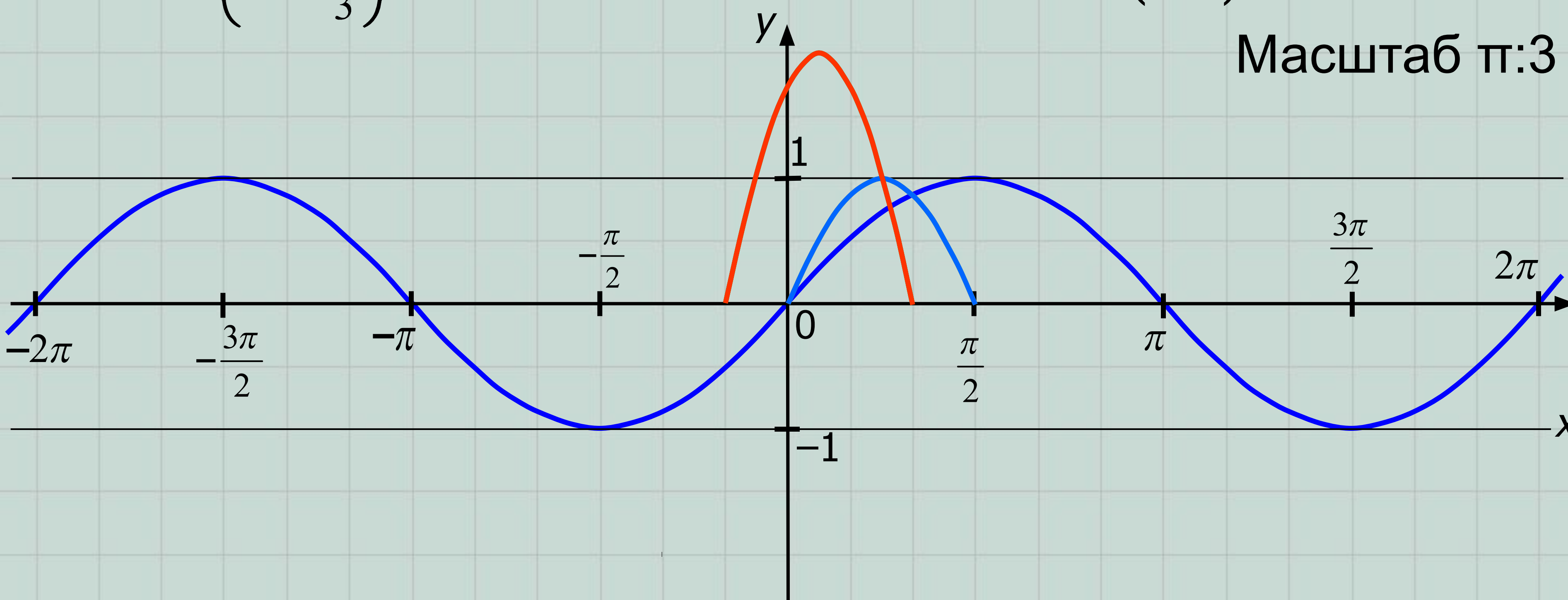
Решение. 1) $y=\sin x$; 2) $y=\sin(2x)$ – «сжатие» к оси *Oy* в два раза;

3) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(2\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ – параллельный перенос вдоль оси *Ox* влево на $\frac{\pi}{6}$ ед.отр.;

4) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ – «растяжение» от оси *Ox* в два раза;

5) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ – параллельный перенос на вектор $\vec{(0;-1)}$.

Масштаб π:3



Остается воспользоваться свойством периодичности любой тригонометрической функции (определите наименьший положительный период самостоятельно) и достроить полученную часть до полного графика на всей числовой оси: