

Производная степенной функции

Математики о производной.

« Слова **«производная»** и **«произошло»** имеют похожие части слова, да и смысл похож: производная происходит от исходной функции (переложив на отношения человека: исходная функция - **«мама»**, её производная - **«дочь»**).

Производная - часть математической науки, одно из её звеньев. Нет этого звена - прерваны связи между многими понятиями. »

Что называется производной?

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

«Алгоритм нахождения производной»

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



**Исследуя функции, можно
встретить случаи, когда
функция определена, но не
дифференцируема. Что это?
Почему так происходит?
Можно ли этому найти
объяснения?**



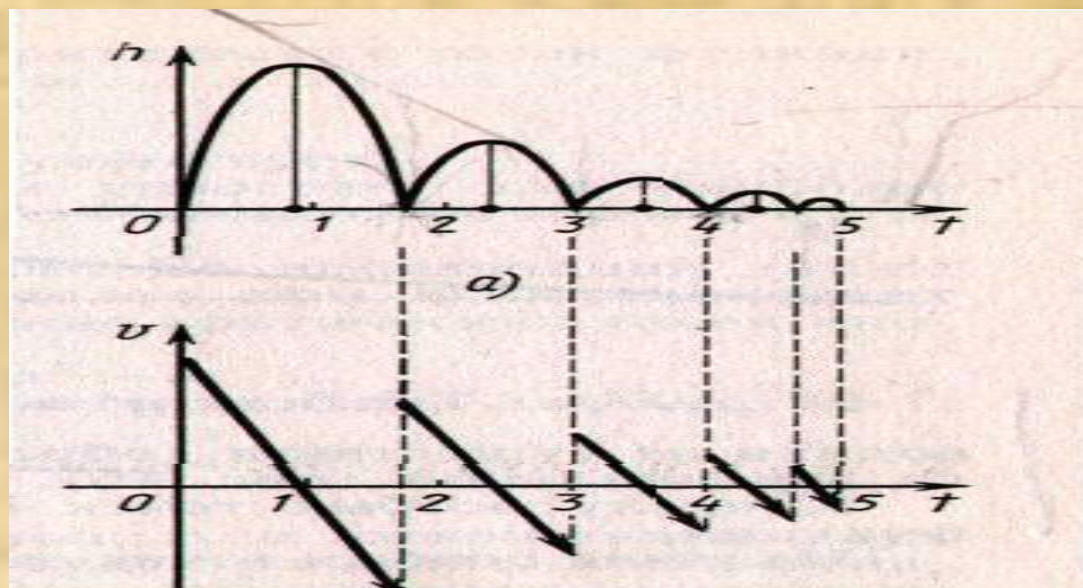
Взгляд из детства.

Всем с детства известно такое явление, как движение мяча, падающего на пол и упруго отскакивающего от него.

Это явление можно объяснить с помощью законов физики.

Попробуем переложить всё это на математический язык.

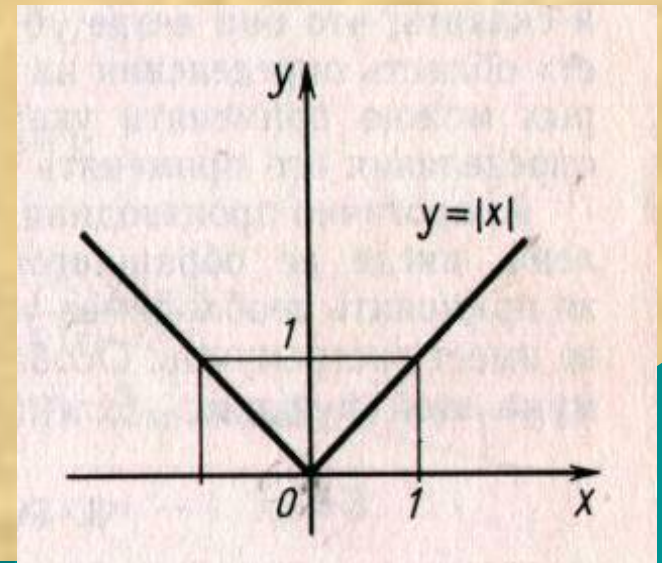
При отскоке от пола (при $h=0$) направление движения мяча меняется (и функция достигает минимума), однако в эти моменты скорость мяча не равна нулю, касательную к графику h провести нельзя. На графике скорости мяча мы видим: в момент отскока скорость мяча однозначно найти нельзя - график скорости в эти моменты имеет разрывы. (Производная в этих точках не существует).



Примеры функций, имеющих особые ТОЧКИ.

Все функции вида $y = |f(x)|$, при $f(x)=0$ имеют особые точки - точки излома.

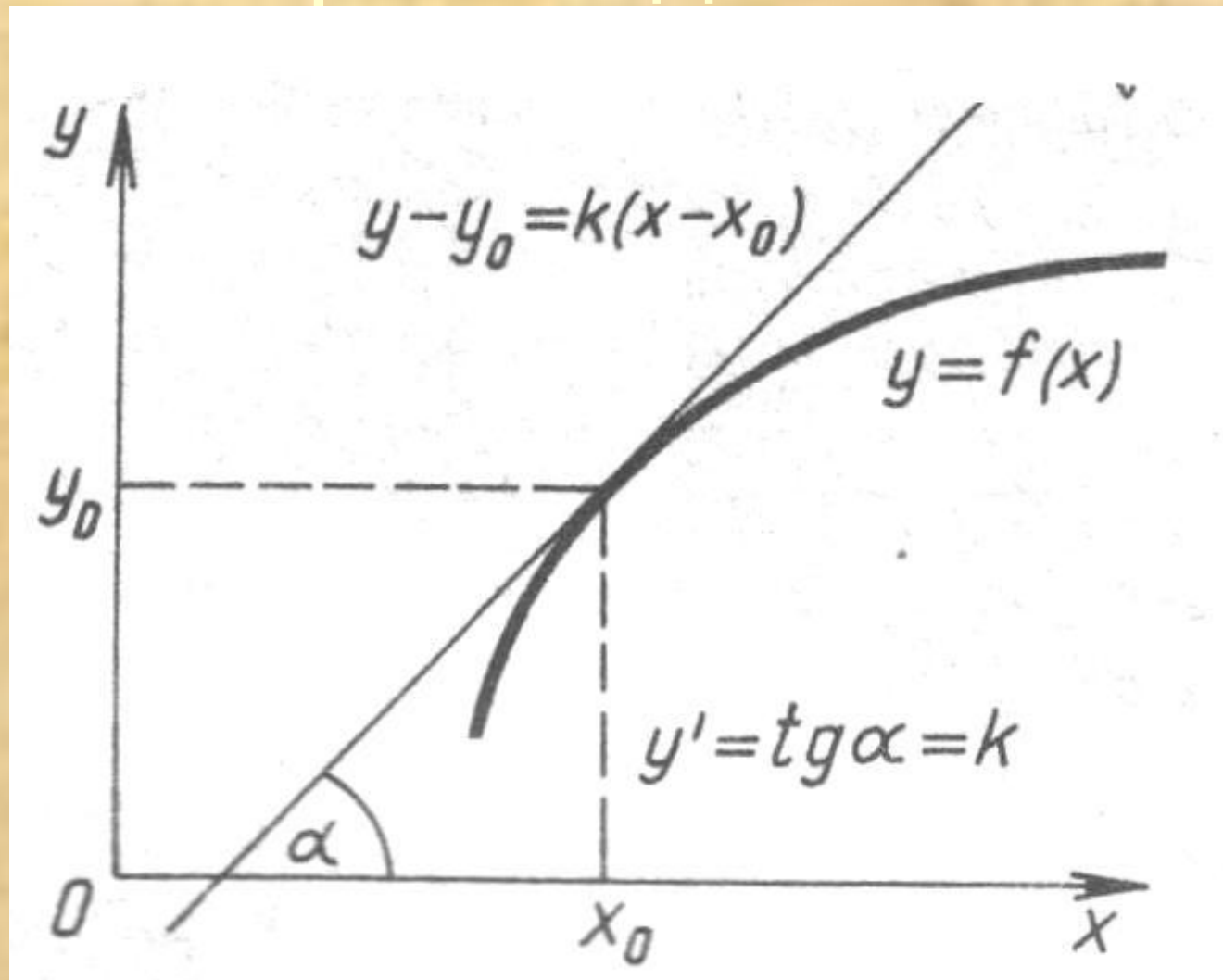
Частный случай: $y = |x|$,
где $x=0$ - особая точка.



$$f'(x) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

- ◆ Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $y=f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0

Геометрический смысл производной



Физический смысл

$$y = f(x)$$

$$f'(x_0)$$

$$f''(x_0)$$

скорость

ускорение

Производная от перемещения по времени является мгновенная скорость.

Производная от скорости по времени является ускорением.

Задача 1

Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^3 - 3t$.

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=2c$.

Решение.

$$\text{а) } V(t) = S'(t) = (2t^3 - 3t)' = 6t^2 - 3$$

$$\text{б) } V(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(\text{м / с})$$

Задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону $S(t) = t^2 + 2t + 3$:

а) в момент времени t ;

б) в момент времени $t=3$ с.

Решение.

$$а) V(t) = S'(t) = (t^2 + 2t + 3)' = 2t + 2$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = 2$$

$$б) V(3) = 2 * 3 + 2 = 8(м / с)$$

$$a(3) = 2(м / с^2)$$

Проблемная задача

- ◆ **Две материальные точки движутся прямолинейно по законам**

$$S_1(t) = 2,5t^2 - 6t + 1,$$

$$S_2(t) = 0,5t^2 + 2t - 3.$$

В какой момент времени скорости их равны, т.е.

$$V_1(t_0) = V_2(t_0), t_0 - ?$$

Решение проблемной задачи

$$V_1(t) = (2,5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

$$V_1(t_0) = 5t_0 - 6$$

$$V_2(t) = (0,5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

$$V_2(t_0) = t_0 + 2$$

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$

Разбор некоторых задач самостоятельной работы

$$m(l) = 3l^2 + 5l \text{ (г)}, l_{AB} = 20 \text{ см},$$
$$\rho_{\text{сер}} = ?$$

Решение:

$$\text{Т.к. } \rho(l) = m'(l), \text{ то } \rho(l) = 6l + 5.$$
$$l = 10 \text{ см}, \rho(10) = 60 + 5 =$$
$$65(\text{г/см}^3)$$

Ответ: 65 г/см^3 .

Разбор некоторых задач самостоятельной работы

А7 Какая из указанных ниже функций имеет производную, график которой изображен на рисунке?

1) $f(x) = 1 - x^2$

2) $f(x) = x - x^2$

3) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

4) $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$

