Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех и т. д. членов прогрессии. Получим:

$$S_1 = b_1;$$

$$S_2 = b_1 + b_2;$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$

$$\ldots$$

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$$

Получили последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют

суммой геометрической прогрессии.

! Обратите внимание: называют не суммой n членов геометрической прогрессии, а суммой геометрической прогрессии.

Если же эта последовательность расходится, то о сумме n геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме членов - S_n можно, естественно, и в том случае.

Если знаменатель q *геометрической прогрессии* (b_n) *удовлетворяет неравенству* $|q|<1$ *, то сумма прогрессии вычисляется по формуле*

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Доказательство.

Как известно ,сумма первых n членов геометрической прогрессии $S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ может быть высчитана по формуле:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Как ранее мы установили: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{b_1}{1-q}$.

А так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ мы назвали суммой геометрической прогрессии, то формула доказана $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Пример.

Найти сумму геометрической прогрессии:

27, 9, 3, 1, …

Решение.

Имеем: $b_1 = 27$; $q = \frac{1}{3}$.

Так как знаменатель прогрессии $\frac{1}{3} < 1$, то можно воспользоваться формулой, доказанной нами только что:

$S = \frac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = 40.5$

Практические задания

1. Найдите сумму геометрической прогрессии:

$а)$ $32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ldots;$ $б)$ $24,\ -8,\ \frac{8}{3},\ -\frac{8}{9},\ldots$

2. Вычислите:

$а)$ $125+25+5+1+\ldots;$ $б)$ $-6+\frac{2}{3}-\frac{2}{27}+\frac{2}{243}-\ldots$

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

$а)$ $S=-\frac{9}{4},\ b_1=-3;$ $б)$ $S=1.5,\ b_1=2.$

4. Найдите n член геометрической прогрессии (b_n), если:

$а)$ $S=15,\ q=-\frac{1}{3},\ n=3;$ $б)$ $S=-20,\ q=-16,\ n=4.$