

$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$\operatorname{ctg} x = a$$

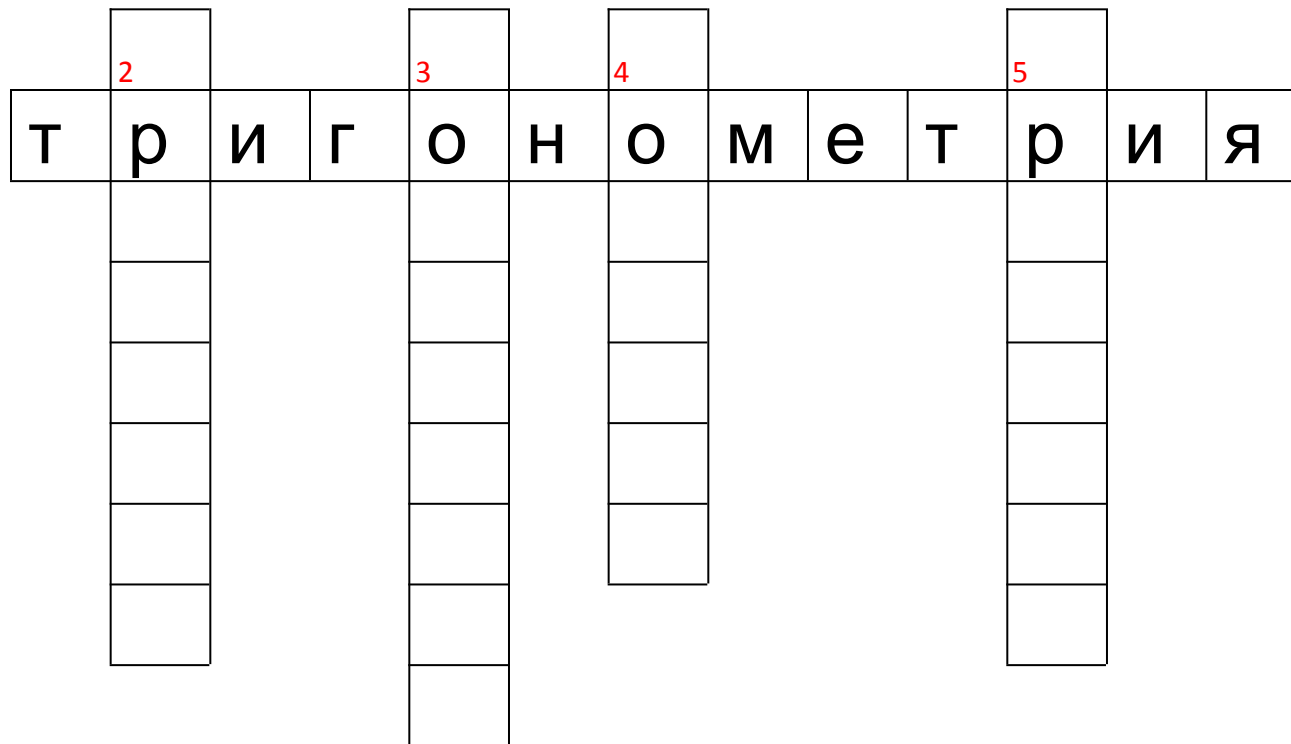
# ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИ ЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Учитель 1 квалификационной категории  
Алейникова Л.В.

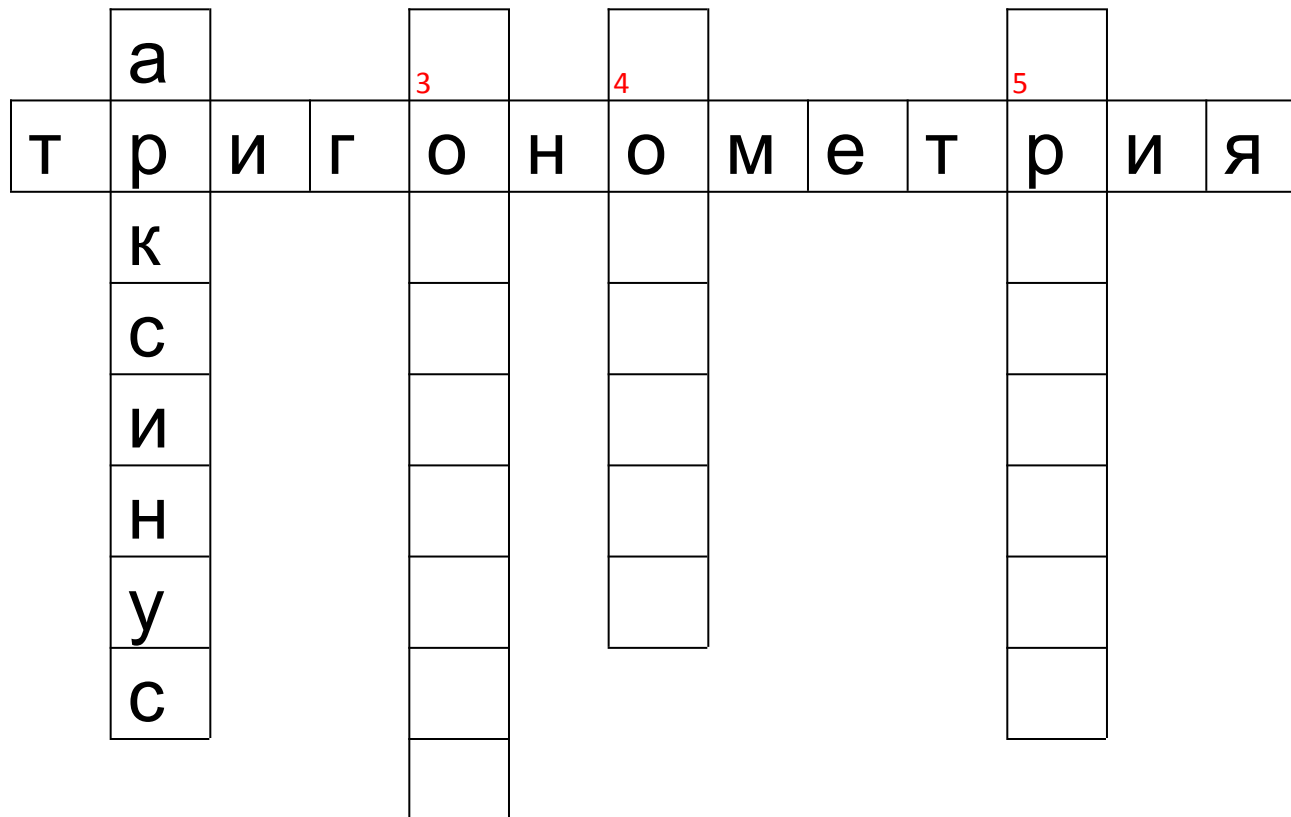
МБОУ «Гатчинская средняя  
общеобразовательная школа №1»



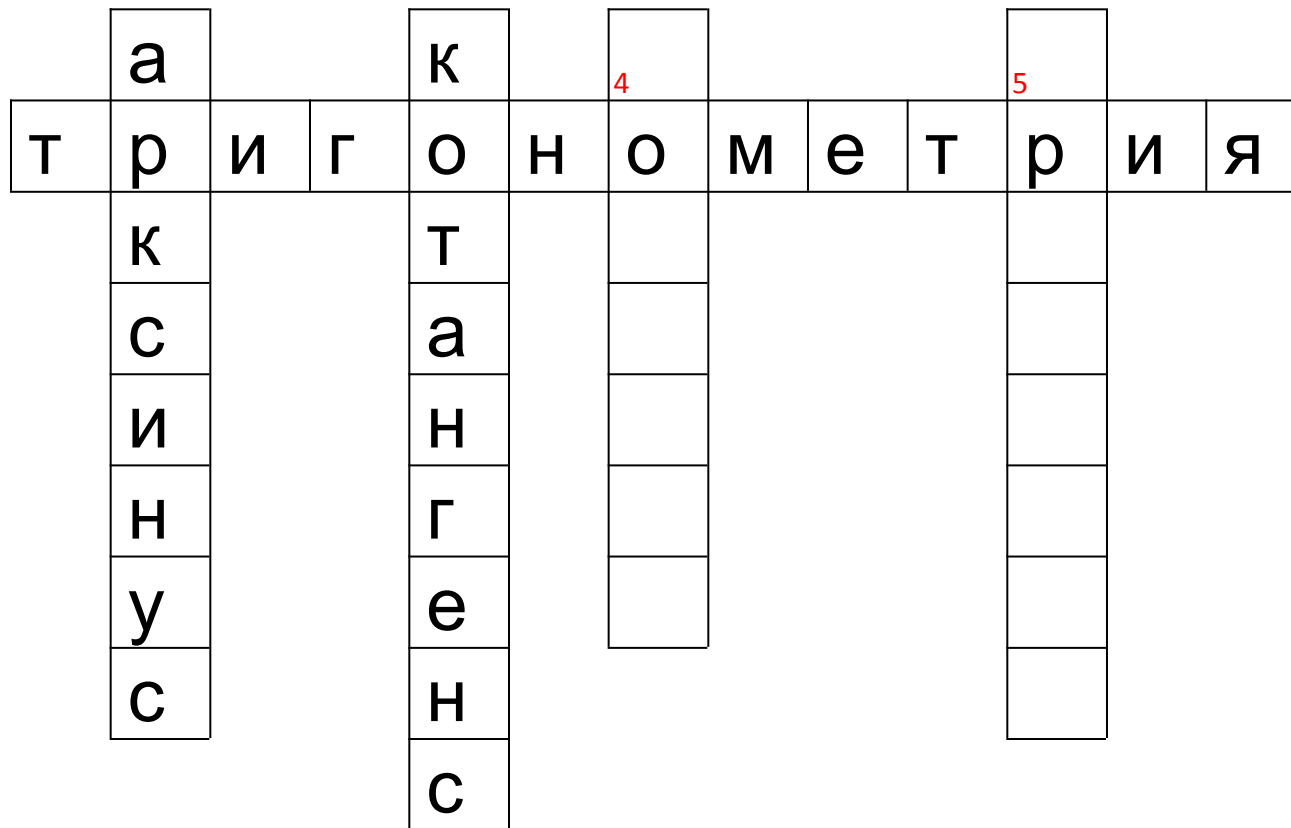
# КРОССВОРД



# КРОССВОРД

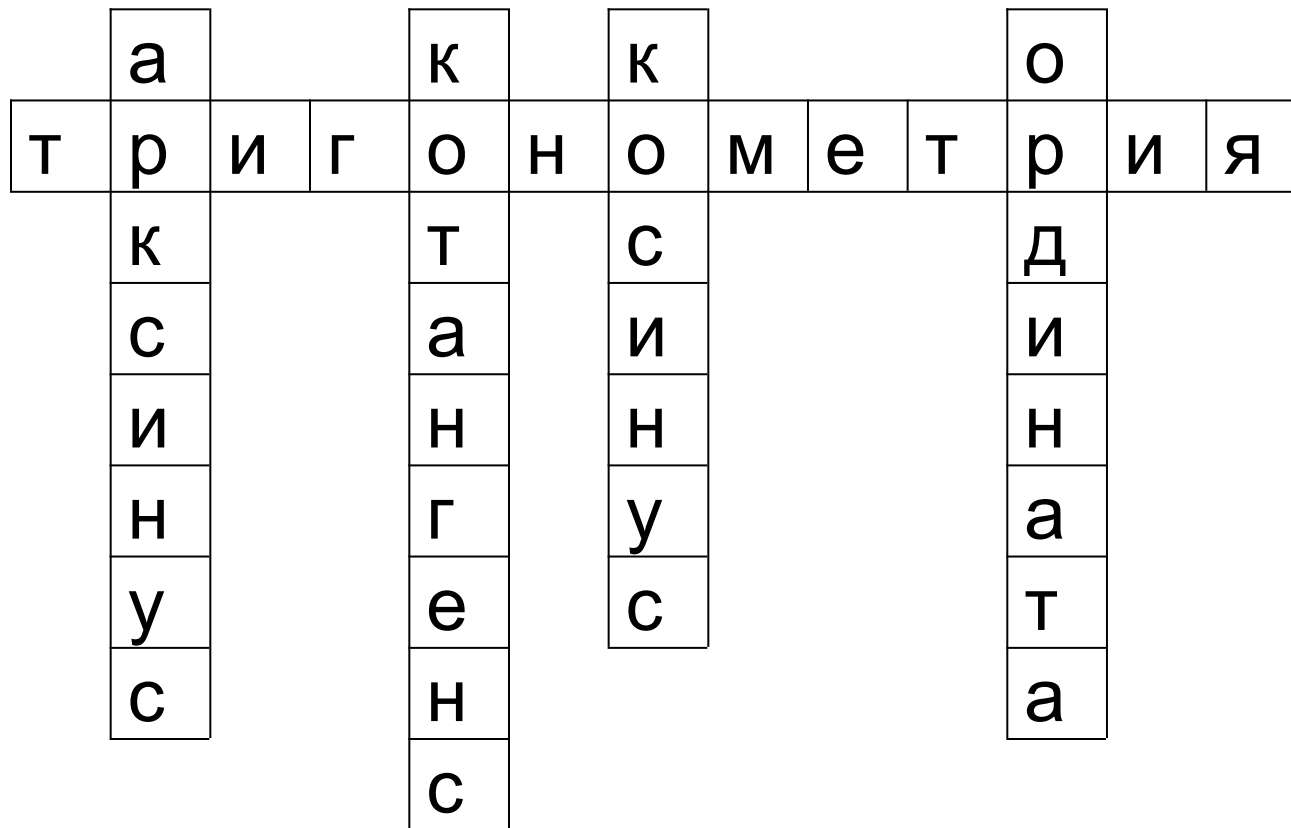


# КРОССВОРД





# КРОССВОРД



# ЧТОБЫ ПРАВИЛЬНО РЕШАТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НАДО:

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для координат точек числовой окружности;
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.



# ВЫЧИСЛИ УСТНО:

$$\sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin 0$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\arccos \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg} 1$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

# ОТВЕТЫ:

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

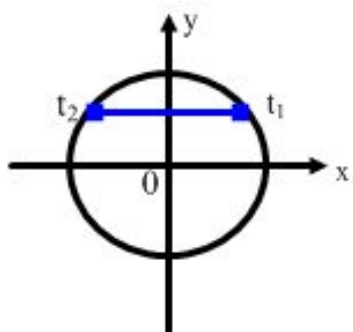
$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

# ДЛЯ КАЖДОГО РИСУНКА ПОДБЕРИТЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

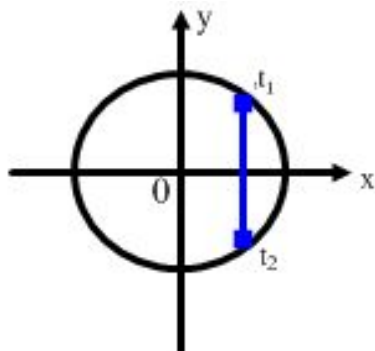
А)



1)

$$\cos t = \frac{1}{2}$$

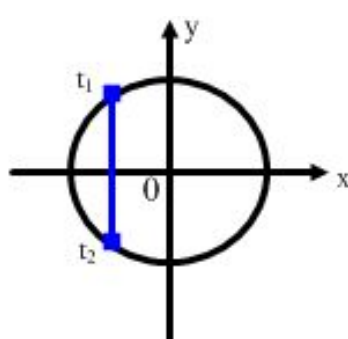
Б)



2)

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

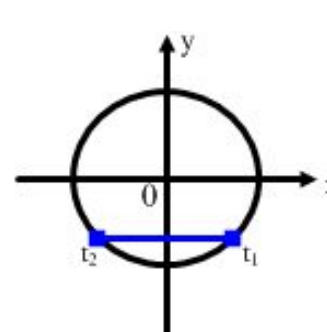
В)



3)

$$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Г)

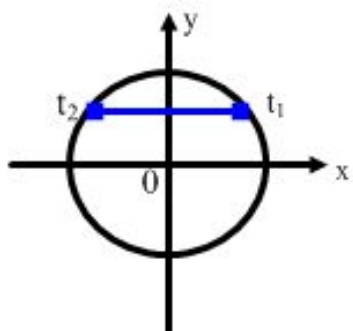


4)

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

# ДЛЯ КАЖДОГО РИСУНКА ПОДБЕРИТЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

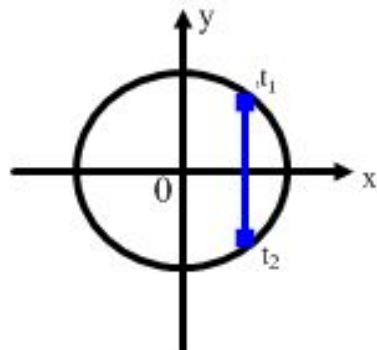
А)



2)

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

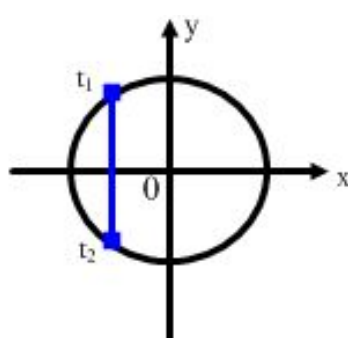
Б)



1)

$$\cos t = \frac{1}{2}$$

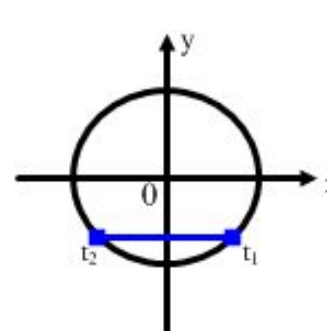
В)



4)

$$\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Г)



3)

$$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1)  $\sin x = 0$

a)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

2)  $\cos x = -1$

б)  $\pi k, k \in Z$

3)  $\sin x = 1$

в)  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$


4)  $\operatorname{tg} x = 1$

г)  $\pi + 2\pi k, k \in Z$

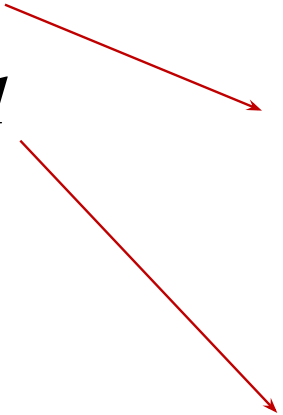
5)  $\operatorname{ctg} x = 0$

д)  $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

- |                               |                                      |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sin x = 0$               | a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ |
| 2) $\cos x = -1$              | b) $\pi k, k \in Z$                  |
| 3) $\sin x = 1$               | в) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$  |
| 4) $\operatorname{tg} x = 1$  | г) $\pi + 2\pi k, k \in Z$           |
| 5) $\operatorname{ctg} x = 0$ | д) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$  |
- 

# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

- |                               |                                      |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sin x = 0$               | a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ |
| 2) $\cos x = -1$              | b) $\pi k, k \in Z$                  |
| 3) $\sin x = 1$               | в) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$  |
| 4) $\operatorname{tg} x = 1$  | г) $\pi + 2\pi k, k \in Z$           |
| 5) $\operatorname{ctg} x = 0$ | д) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$  |
- 

# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1)  $\sin x = 0$

2)  $\cos x = -1$

3)  $\sin x = 1$

4)  $\operatorname{tg} x = 1$

5)  $\operatorname{ctg} x = 0$

a)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

б)  $\pi k, k \in Z$

в)  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

г)  $\pi + 2\pi k, k \in Z$

д)  $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$



# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1)  $\sin x = 0$

2)  $\cos x = -1$

3)  $\sin x = 1$

4)  $\operatorname{tg} x = 1$

5)  $\operatorname{ctg} x = 0$

а)

б)

в)

г)

д)

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

# УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1)  $\sin x = 0$

а)

2)  $\cos x = -1$

б)

3)  $\sin x = 1$

в)

4)  $\operatorname{tg} x = 1$

г)

5)  $\operatorname{ctg} x = 0$

д)

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$$

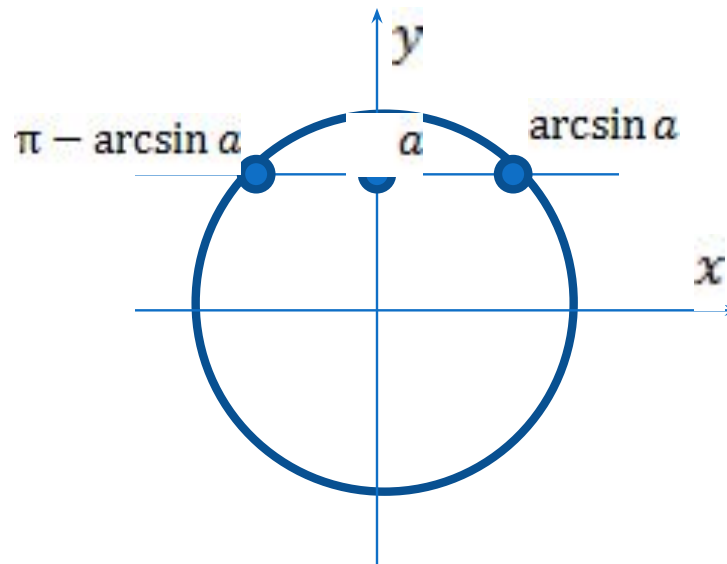
$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

# арксинус и решение уравнений $\sin t = a$

Решим при помощи  
числовой окружности  
уравнение  $\sin t = a$ ,  $|a| < 1$ .  
Корни, симметричные  
относительно оси  $OY$   
можно записать как

$$t = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В общем виде  $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



$$\sin t = a, |a| \leq 1$$

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$a = 0$$

$$t = \pi k, \\ k \in \mathbb{Z}$$

$$a = -1$$

$$t = \pi/2 + 2\pi k, \\ k \in \mathbb{Z}$$

$$a = 1$$

$$t = \pi/2 + 2\pi k, \\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

t	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin t$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

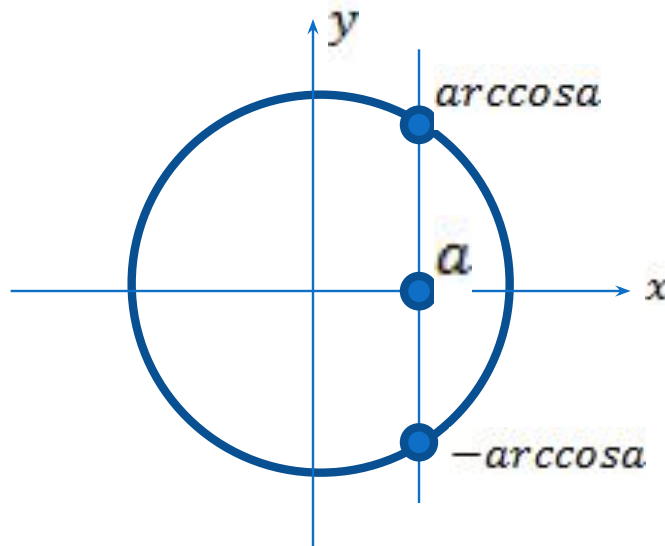
# арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$

Решим при помощи  
числовой окружности  
уравнение  $\cos t = a$ ,  $|a| < 1$ .

Корни, симметричные  
относительно оси  $Ox$   
можно записать как

$$t = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В общем виде  $t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



$$\cos t = a, \quad |a| \leq 1$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$a = 0$$

$$t = \pi/2 + \pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$a = -1$$

$$t = \pi + 2\pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$a = 1$$

$$t = 2\pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

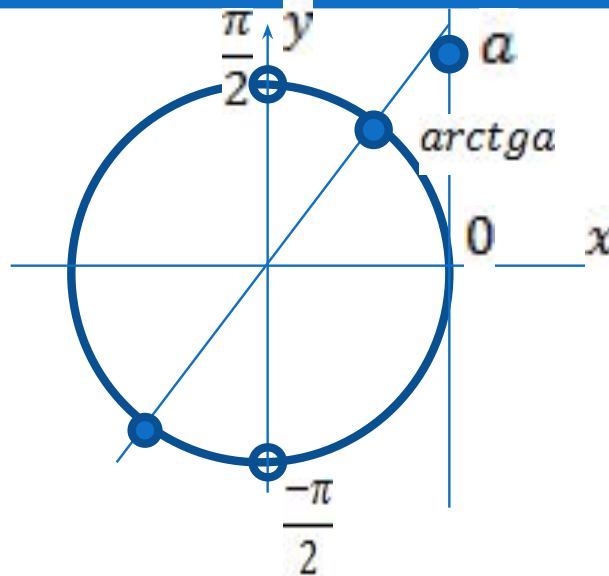
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

t	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
cost	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

# арктангенс и решение уравнений $\operatorname{tg} t = a$

Решим при помощи  
числовой окружности  
уравнение  $\operatorname{tg} t = a$ .

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\mathbf{tg\ t = a}$$

$$t = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$a = 0$$

$$a = -1$$

$$a = 1$$

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = -\pi/4 + \pi k$$

$$t = \pi/4 + \pi k$$

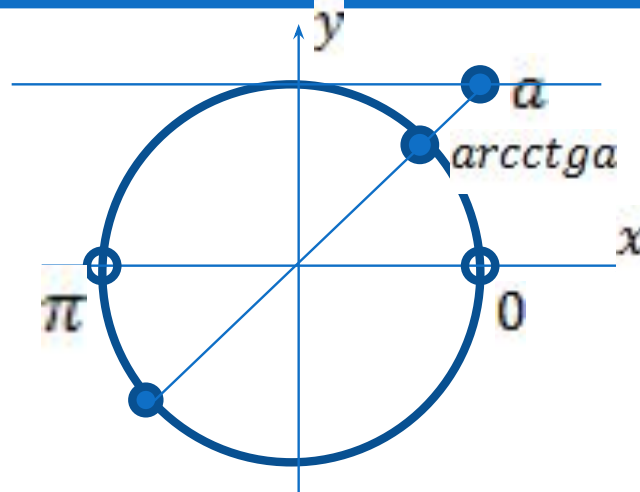
$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

t	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
tg t	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$



# арккотангенс и решение уравнений $\text{ctg } t = a$

Решим при помощи числовой окружности уравнение  $\text{ctg } t = a$ .



$$t = \text{arctg } a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t = a,$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

$$a = 0$$

$$t = \pi/2 + \pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$a = -1$$

$$t = 3\pi/4 + \pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$a = 1$$

$$t = \pi/4 + \pi k,$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arcctg} (-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

t	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
ctgt	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

# ЗАПОМНИ

$a=0$

$a=1$

$a=-1$

$|a| < 1$

$a \neq 0$

$$\sin t = a \quad t = \pi k \quad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad t = (-1)^k \arcsin a + \pi k$$

$$\cos t = a \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad t = 2\pi k \quad t = \pi + 2\pi k \quad t = \pm \arccos a + 2\pi k$$

$$\operatorname{tg} t = a \quad t = \pi k \quad t = -\frac{\pi}{4} + \pi k \quad t = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} t = a \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \left[ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ t = \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{array} \right. \quad t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Применение  
формул корней

$$\sin x = a$$

Метод введения  
новой переменной

$$\sin 2x = \frac{1}{2}, \text{ где}$$

$$t = 2x$$

Метод разложения  
на множители

$$2\cos x - 3\sin x \cos x = 0$$

**НАША ЗАДАЧА:  
СВЕСТИ ЛЮБОЕ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ  
УРАВНЕНИЕ  
К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ.**

# ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ

$$\cos \frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{2}{3}x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$\frac{2}{3}x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad | \quad \div \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \frac{9\pi}{8} + 3\pi k, k \in Z$$

*Ответ* :  $x = \pm \frac{9\pi}{8} + 3\pi k, k \in Z$

# ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad | \quad \div 2$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

# ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = 0$$

Это частный вид уравнения  $\cos t = 0$ ,  
 $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{3} - 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$-3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$-3x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad | \quad \div (-3)$$

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$



# ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad | :4$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

# РЕШИ САМ

Уровень А

Уровень Б

Решите уравнения:

1.  $\sin x = \frac{1}{2}$

1.  $\cos 3x + 4 = 0$

2.  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

2.  $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

3.  $2\cos(\pi - x) + 1 = 0$

3.  $2\sin 2x - 1 = 0$

н/н	ответ	код	н/н	ответ	код
1	Решений нет	С	5	$(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$	М
2	$\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$	К	6	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	Р
3	$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$	А	7	$(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$	П
4	$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	У	8	$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$	О

# РЕШИ САМ

Уровень А

УРА

Уровень Б

САМ

# ЗАДАЧА ПРАКТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Имеется функция  $I = 10 \sin(50 t + 1)$  ,

где  $I$  - сила переменного тока . Определить  
такие моменты времени  $t$ , когда сила тока  
 $I$  равна 2 амперам.