Первообразная и интеграл

Учитель: Савичева Наталья Геннадьевна
ЦО 109
Москва, 2013

Первообразная

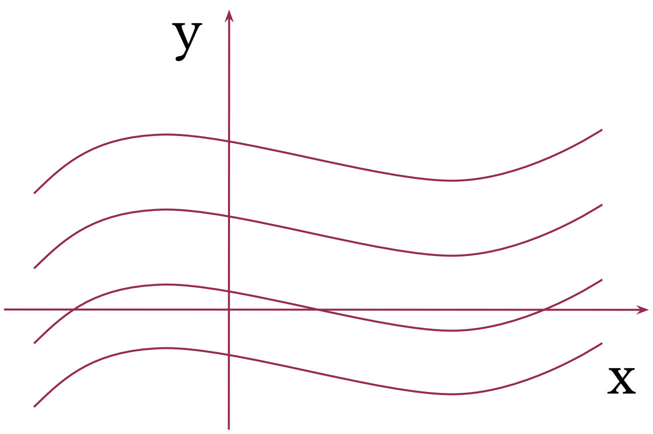
- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.
  - Пример:

    Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Основное свойство первообразных

- Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y.

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции f(x) называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad ,$$

где С – произвольная постоянная.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=a, x=b (a<b) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), называется криволинейной трапецией

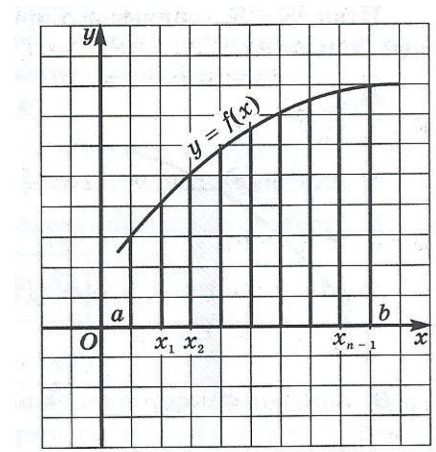
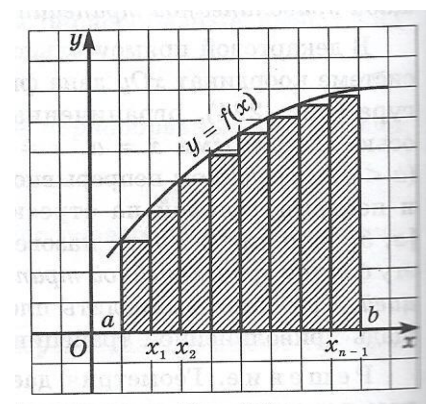


Рис. 224

Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок [a;b] на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY. Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.



$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, его называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b] и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Связь между определенным интегралом и первообразной
(Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная функции f(x).

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

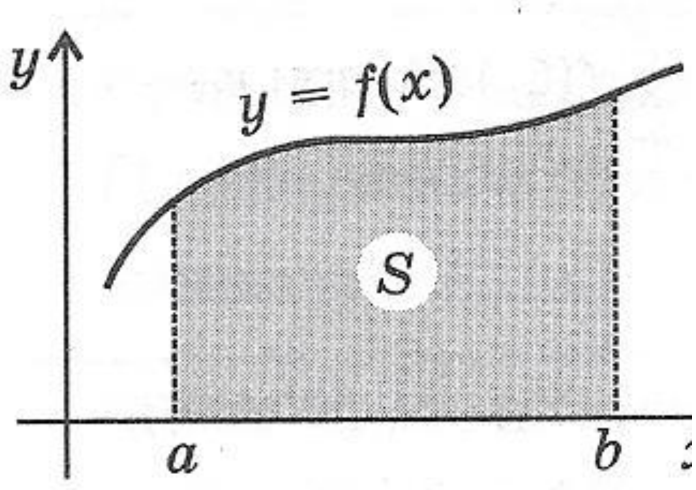
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

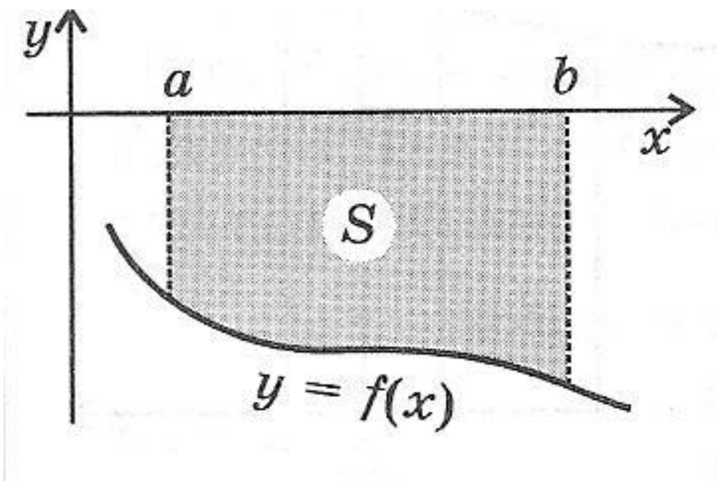
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:

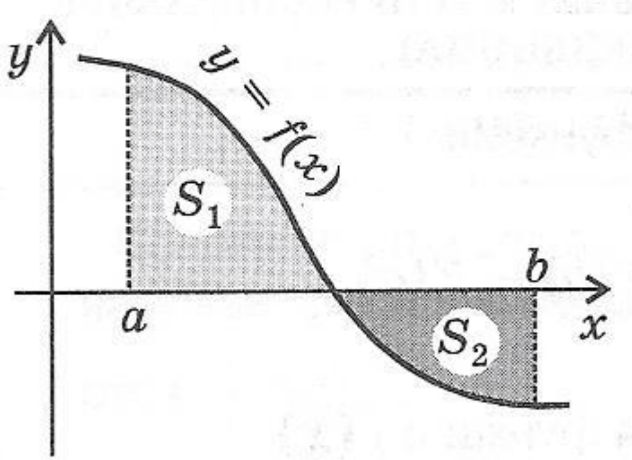


$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

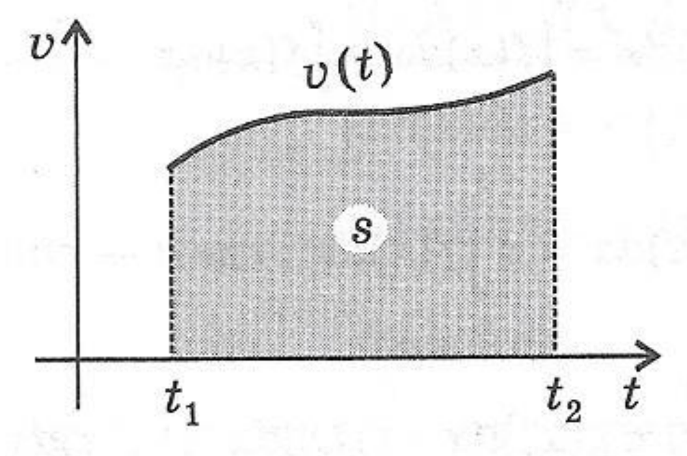
- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке [a;b] , то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$



Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t:



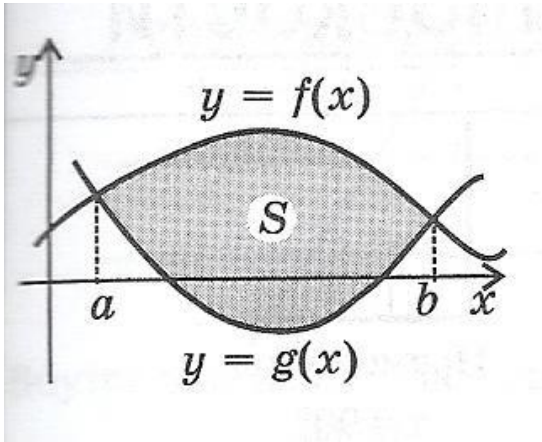
$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

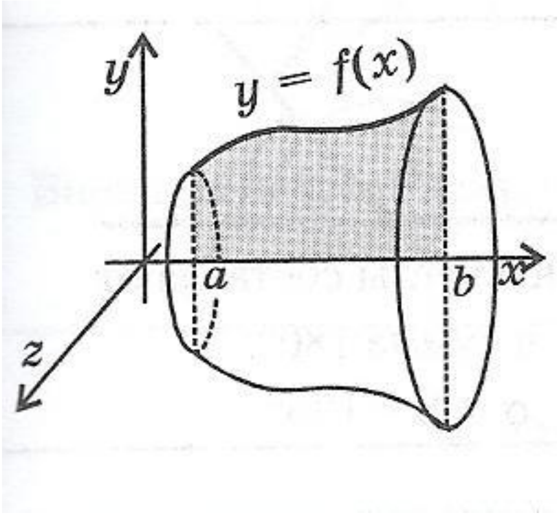
- Ограниченной графиками непрерывных функций y=f(x) и y=g(x) таких, что $f(x) \geq g(x)$ для любого x из [a;b], где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции y=f(x) на отрезке [a;b]:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$