Математическое моделирование и проектирование

Светлов Николай Михайлович
E-mail svetlov@timacad.ru
http://svetlov.timacad.ru

План

1. Цели и содержание курса
2. Методика преподавания
3. Типология математических моделей, применяемых в агрономии, и методов их исследования
4. Моделирование минерального питания растений
5. Моделирование сочетания культур
6. Моделирование системы земледелия
7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

1. Цели и содержание курса

Цели

- Развитие способности к формальному представлению исследуемых процессов и явлений
- Овладение системной научной парадигмой и методологией перспективизма
- Воспитание хозяйского отношения к делу

1. Цели и содержание курса

2. Методика преподавания

№ п/п	№ модуля и модульной единицы дисциплины	№ и название лабораторных/ практических/ семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий	Вид контрольного мероприятия	Кол-во часов
1.	**Модуль 1.** (Проектирование элементов системы земледелия)		Тестирование	**0,5**
	Модульная единица 1. (Моделирование минерального питания растений)	Лабораторная работа № 1. (Моделирование минерального питания растений)	Защита	4
	Модульная единица 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве)	Лабораторная работа № 2. (Моделирование сочетания культур в растениеводстве)	Защита	3,5
2.	**Модуль 2.** (Основы комплексного проектирования системы земледелия)		Тестирование	**0,5**
	Модульная единица 3 (Моделирование системы земледелия)	Лабораторная работа № 3 (Моделирование системы земледелия)	Защита	3,5

2. Методика преподавания

№ п/п	№ модуля и модульной единицы дисциплины	№ и название лабораторных/ практических/ семинарских занятий с указанием контрольных мероприятий	Вид контрольного мероприятия	Кол-во часов
3.	**Модуль 3.** (Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома)		Коллоквиум	**1**
	Модульная единица 4а (Моделирование севооборота)	Лабораторная работа № 4а (Моделирование севооборота)	Защита	3
	Модульная единица 4б (Моделирование роста и развития растений)	Лабораторная работа № 4б (Моделирование роста и развития растений)	Защита	
	Модульная единица 4в (Международный опыт моделирования в агрономии)	Лабораторная работа № 4в (Международный опыт моделирования в агрономии)	Защита	

2. Методика преподавания

Оценка дифференцированного зачёта выставляется на основании результатов защиты лабораторных работ, тестирования и коллоквиума

Преподаватель вправе объединить тестирование и коллоквиум по некоторым или всем модулям в одно контрольное мероприятие

2. Методика преподавания

Литература

1. *Франс Дж., Торнли Дж.* Математические модели в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
2. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / *Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М.* и др. СПб.: ИТК ГРАНИТ, 2009.

Учебные материалы в сети Internet

http://svetlov.timacad.ru/umk8/umk.htm

Рабочая программа учебной дисциплины

Компьютерные презентации к лекциям

Задания к лабораторным работам

3. Типология математических моделей

$$\max_{\mathbf{x}}(z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4)$$

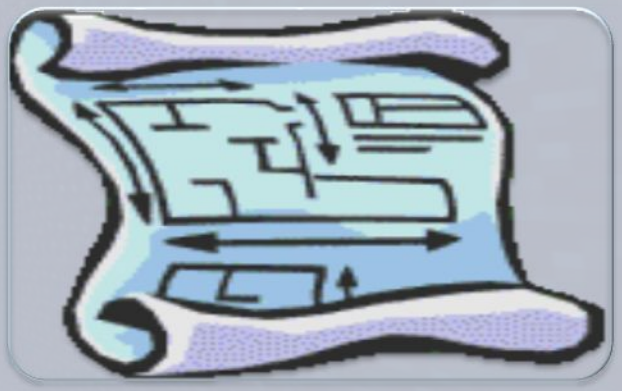
$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1)\cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2)\cdot \mathbf{x}_2 - \\ -\mathbf{i}\cdot(\mathbf{c}_3\mathbf{X}_3)$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 \le \mathbf{A}_2\mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3\mathbf{x}_1 \ge \mathbf{A}_4\mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{B}_3\mathbf{x}_1 \le (\mathbf{A}_5\mathbf{X}_3)\mathbf{i} \le \mathbf{B}_4\mathbf{x}_1)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6\cdot\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7\cdot\mathbf{x}_2 + \mathbf{i}\cdot(\mathbf{a}_8\mathbf{X}_3) \le b_5)$$



Математическая модель – совокупность математических соотношений, описывающих основные закономерности, присущие изучаемому объекту

Математическое моделирование – процесс исследования реального объекта при помощи математических моделей

3. Типология математических моделей

Оптимизационные модели

Математическое программирование
- Линейное программирование
- Выпуклое программирование
- Динамическое программирование
- Целочисленное программирование

Статистические модели

Регрессионный анализ
- OLE
- GMM
- GME

Проверка гипотез

Метод условных вероятностей

Имитационные модели

Теоретические модели

3. Типология математических моделей

- Дескриптивные (описательные) модели
- Аналитические (исследовательские) модели
- Синтетические (проектные) модели

3. Типология математических моделей

4. Моделирование минерального питания

$\min_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}\,|\,\mathbf{b}_{\min}\le\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{b}_{\max})$ – фиксированная продуктивность культуры

$\max_{\mathbf{x},y}(py-\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}\,|\,\mathbf{f}_{\min}(y)\le\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{f}_{\max}(y))$ – оптимальная продуктивность культуры

x – вектор объёмов внесения удобрений (*т/га*)

$\mathbf{b}_{\min}$, $\mathbf{b}_{\max}$ – векторы минимального и максимального количества действующего вещества (*т.д.в./га*)

A – матрица содержания действующего вещества в единице удобрения (*т.д.в./т*)

c – вектор цен удобрений (*тыс.руб./т*)

y – продуктивность культуры (*т/га*)

$\mathbf{f}_{\min}(y)$, $\mathbf{f}_{\max}(y)$ – мин. и макс. количество действующего вещества при продуктивности *y* (*т.д.в./га*)

p – цена продукции (*тыс.руб./т*)

Операции над векторами и матрицами

$$\mathbf{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$\mathbf{ix} = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{XY} = (\mathbf{Xy}_1; \mathbf{Xy}_2; \ldots; \mathbf{Xy}_m), \text{где } \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1; \mathbf{y}_2; \ldots; \mathbf{y}_m)$$

4. Моделирование минерального питания

Первая модель

- Проще
- Решается с помощью симплексного метода
- Исходные данные, как правило, доступны
- *Может быть решена для разных уровней продуктивности*

Вторая модель

- Мощнее
- Функции $\mathbf{f}_{min}(y)$ и $\mathbf{f}_{max}(y)$ обычно нелинейные ➔ градиентные методы решения
- Функции $\mathbf{f}_{min}(y)$ и $\mathbf{f}_{max}(y)$ обычно неизвестны
- Применение затруднено

4. Моделирование минерального питания

5. Моделирование сочетания культур

$$\max_{\mathbf{x}}((\mathbf{p}-\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{x}_1-\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{x}_2\,|\,\underbrace{\mathbf{i}\cdot\mathbf{x}\le b_1}_{\text{Пашня, } га};\underbrace{\mathbf{A}_1\mathbf{x}\le\mathbf{A}_2\mathbf{x}}_{\text{Предшественники, } га};\underbrace{\mathbf{A}_3\mathbf{x}_2\ge\mathbf{b}_2}_{\text{План заготовки кормов, } т})$$

$\mathbf{x}_1$ – вектор площадей пашни под товарными культурами, *га*

$\mathbf{x}_2$ – вектор площадей пашни под кормовыми культурами, *га*

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2$

$\mathbf{p}$ – вектор выручки, *руб./га*

$\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ – векторы производственных затрат на товарные/кормовые культуры, *руб./га*

$\mathbf{i} = (1,1,\ldots,1)$

b_1 – площадь пашни, *га*

$\mathbf{A}_1$ – матрица потребности в предшественниках, *га/га*

$\mathbf{A}_2$ – матрица способности быть предшественником, *га/га*

$\mathbf{A}_3$ – матрица выхода кормов, *т/га*

$\mathbf{b}_2$ – вектор потребности в кормах, *т*

5. Моделирование сочетания культур

Матрица потребности в предшественниках (пример)

	Пшеница озимая	Ячмень яровой	Ячмень+многолетние	Многолетние травы I	Многолетние травы II	Однолетние травы	Кормовая свёкла	Кукуруза на силос
Подсев многолетних трав				1				
Второй год польз. многолетних трав					1			
Предшественники зерновых	1	1	1					

Матрица способности быть предшественником

	Пшеница озимая	Ячмень яровой	Ячмень+многолетние	Многолетние травы I	Многолетние травы II	Однолетние травы	Кормовая свёкла	Кукуруза на силос
Подсев многолетних трав			1					
Второй год польз. многолетних трав				1				
Предшественники зерновых					1		1	

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}}(z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1)\cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2)\cdot \mathbf{x}_2 - $$
$$-(\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3)\cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \le \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid x_{1i}\mathbf{b}_{3i} \le \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \le x_{1i}\mathbf{b}_{4i}, i = 1 \ldots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i}\cdot(\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \le b_5)$$

$\mathbf{x}_1 = (x_{11},\ldots,x_{1i},\ldots x_{1n})$ – вектор площадей сельскохозяйственных культур, *га*

$\mathbf{x}_2$ – вектор поголовья сельскохозяйственных животных основного (маточного) стада, *гол.*

$\mathbf{X}_3 = (\mathbf{x}_{31},\ldots,\mathbf{x}_{3i},\ldots \mathbf{x}_{3n})$– матрица распределения удобрений по культурам, *тонн* (столбцы = культуры)

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_{31}|\mathbf{x}_{32}|\ldots\mathbf{x}_{3n}$, где $\mathbf{x}_{3j}$ – *j*-столбец матрицы $\mathbf{X}_3$

$\mathbf{p}_1$ ($\mathbf{p}_2$) – вектор выручки от реализации продукции растениеводства (животноводства), *тыс. руб./га* (*тыс. руб./гол.*)

$\mathbf{c}_1$ – вектор производственных затрат в растениеводстве (без удобрений и амортизации), *тыс.руб./га*

$\mathbf{c}_2$ – вектор производственных затрат в животноводстве (без кормов и амортизации), *тыс.руб./гол.*

$\mathbf{c}_3$ – вектор затрат на приобретение и внесение удобрений, *тыс.руб./т*

$\mathbf{A}_0$ – матрица использования сельскохозяйственных угодий под культуры, *га/га*

$\mathbf{b}_1$ – вектор площадей сельскохозяйственных угодий, *га*

$\mathbf{A}_1$ – матрица потребности в предшественниках, *га/га*

$\mathbf{A}_2$ – матрица способности быть предшественником, *га/га*

6. Моделирование системы земледелия

$$\max_{\mathbf{x}}(z(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4)$$

$$z(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1)\cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2)\cdot \mathbf{x}_2 - \\ -(\mathbf{c}_3 \mathbf{X}_3)\cdot \mathbf{i}$$

$$X_1 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_1 \le \mathbf{b}_1; \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 \le \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_1)$$

$$X_2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{A}_4 \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_2 \le \mathbf{b}_2)$$

$$X_3 = (\mathbf{x} \mid x_{1i}\mathbf{b}_{3i} \le \mathbf{A}_5 \mathbf{x}_{3i} \le x_{1i}\mathbf{b}_{4i}, i = 1 \ldots n)$$

$$X_4 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{i}\cdot(\mathbf{a}_8 \mathbf{X}_3) \le b_5)$$

$\mathbf{A}_3$ – матрица выхода кормов, *т/га* (столбцы = культуры)

$\mathbf{A}_4$ – матрица потребности животных в кормах *т/гол.основного стада* (столбцы = виды животных)

$\mathbf{b}_2$ – вектор скотомест для содержания основного стада животных, *гол.*

$\mathbf{b}_{3i}$ ($\mathbf{b}_{4i}$) – вектор минимального (максимального) внесения действующего вещества под культуру *i*, *тонн д.в./га*

$\mathbf{A}_5$ – матрица содержания действующего вещества в каждом удобрении, *тонн д.в./т* (столбцы = виды удобрений)

$\mathbf{a}_6$ ($\mathbf{a}_7$, $\mathbf{a}_8$) – векторы затрат оборотных средств в растениеводстве (животноводстве, на приобретение удобрений) в период их наибольшего дефицита, *тыс.руб./га* (*тыс. руб./гол.*, *тыс.руб./т*).

b_5 – размер оборотных средств в период их наибольшего дефицита (учитывая возможности получения кредита), *тыс. руб.*

Существуют и другие постановки этой задачи (с оптимизацией рационов, кредитов, использования труда и т.п.)

7. Моделирование в исследовательской и проектной деятельности агронома

Три модуля по выбору

моделирование севооборота

- **динамическое программирование**
- для тех, кто знаком с этим методом или желает в нём разобраться
- литературные источники предоставляет преподаватель

моделирование роста и развития растений

- **имитационное моделирование**
- литературные источники предоставляет преподаватель

международный опыт моделирования в агрономии

- **имитационное моделирование** (как правило)
- для тех, кто знает, в каком источнике можно найти математическую модель, полезную для агронома

Задание для лабораторного практикума и исходные данные студент определяет самостоятельно и согласует свой выбор с преподавателем

Допускается теоретическое изучение модели и отражение результатов её изучения в форме реферата (оценка минимальная)