



# Прикладные задачи на экстремумы.

---



# Введение.

---

В мире не происходит ничего, в чем не был бы  
виден смысл какого-нибудь максимума или  
минимума. *Л. Эйлер.*



# Введение.

---

Решая некоторые задачи, я встретил такие понятия, как «наибольшее значение», «наименьшее значение», «выгодное», «наилучшее», и меня заинтересовало решение таких задач. Оказывается, что в математике исследование задач на максимум и минимум началось очень давно – двадцать пять веков назад. Долгое время к задачам на отыскание экстремумов (с лат. «экстремум» – «крайний») не было единых подходов.



# Введение.

---

Но примерно триста лет назад – были созданы первые общие методы решения и исследования задач на экстремумы. Тогда же выяснилось, что некоторые специальные задачи оптимизации играют очень важную роль в естествознании. Задачи на максимум и минимум на протяжении всей истории математики играли важную роль в развитии этой науки.



# Введение.

---

За всё это время накопилось большое число красивых, важных, ярких и интересных задач в геометрии алгебре и других науках. В решении конкретных задач принимали участие крупнейшие учёные прошлых эпох: Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Торричелли, Иоганн и Якоб Бернулли, Исаак Ньютон и многие другие. Решение конкретных задач стимулировало развитие теории, и в итоге были выработаны приёмы, позволяющие единым методом решать задачи самой разнообразной природы.



# Введение.

---

В алгебре экстремальные задачи встречаются в темах: «Линейная функция», «Рациональные дроби», «Неравенства», «Системы линейных уравнений и неравенств», «Квадратичная функция», «Последовательности и арифметическая прогрессия». На примере нескольких задач я расскажу о нахождении наибольшего и наименьшего значения в темах «Линейная функция», «Системы линейных неравенств и уравнений», «Рациональные дроби», «Квадратичная функция» и «Геометрия».



# Линейная функция.

---

Наиболее простые, но не менее интересные задачи на экстремумы встречаются в теме «Линейная функция». Вот одна из них:

Имеются ящики, в которые нужно упаковать 78 самоваров. Одни ящики вмещают 3 самовара, другие – 5 самоваров. Какое наименьшее количество ящиков нужно использовать, чтобы упаковать все самовары (недогрузка не допускается)?



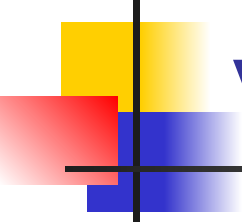
# Линейная функция.

---

Решение: Обозначим количество одних ящиков через  $x$ , а других – через  $y$ . Тогда условие задачи даёт неопределённое уравнение вида  $3x+5y=78$ . Пары чисел  $(26; 0)$ ,  $(21; 3)$ ,  $(16; 6)$ ,  $(11; 9)$ ,  $(6; 12)$ ,  $(1; 15)$  являются решениями данного уравнения.  $(1; 15)$  – оптимальное решение задачи.

Ответ: нужно использовать 16 ящиков.





# Системы линейных уравнений и неравенств.

---

На соревнованиях каждый стрелок делал 10 выстрелов. За каждое попадание он получал 5 очков, за каждый промах снималось 2 очка. Победителем считался тот, кто набрал не менее 30 очков. Сколько раз стрелок должен был попасть в мишень, чтобы быть в числе победителей?



# Системы линейных уравнений и неравенств.

---

Решение: Обозначив число попаданий через  $x$ , число промахов – через  $y$ , получим неравенство  $5x - 2y \geq 30$ . Составим систему

$$\begin{cases} 5x - 2y \geq 30, & 5x - 20 \leq 2x \geq 30, & x > 7, \\ x + y = 10; & y = 10 - x; & y < 3. \end{cases}$$

Решив систему получаем, что  $x = \{8, 9, 10\}$ ;  $y = \{2, 1, 0\}$ .  $(8; 2)$  – оптимальное решение.

Ответ: наименьшее число попаданий – 8.



# Рациональные дроби.

---

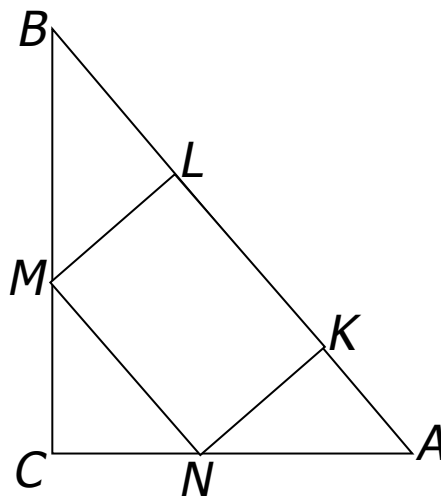
На автомобиле новые шины. Шина на заднем колесе выдерживает пробег в 24000 км, а шина на переднем колесе – в 16000 км. Какой максимальный путь можно совершить на этих шинах?

Решение: Износ шины на заднем колесе будет равен  $1/16000$  км, а износ шины на переднем колесе –  $1/24000$  км. Износ шин на обоих колёсах равен:  $1/16000 + 1/24000 = 1/9600$ .

Максимальный путь равен  $1/(1/9600) \cdot 2 = 19200$  (км).

# Квадратичная функция.

А вот геометрическая задача на составление квадратичной функции: В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом  $60^\circ$  вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?





# Квадратичная функция.

---

Решение:  $AB=16$  см.  $NK:KA=\operatorname{tg}60^0=\sqrt{3}$ . По свойству пропорции получаем:  $KA=x\sqrt{3}/3$ . Треугольник  $ABC$  подобен треугольнику  $MVL$  по двум углам. Составим отношение между сторонами треугольников:  $VL:BC=ML:AC$ . По теореме Пифагора  $BC=8\sqrt{3}$ . Находим, что  $VL=x\sqrt{3}$ .  $KL=16-4x\sqrt{3}/3$ . Площадь прямоугольника находим по формуле:

$$S=x(16-4\sqrt{3}x/3)=-4\sqrt{3}x^2/3+16x=-4\sqrt{3}/3(x-2\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}$$

Площадь будет наибольшей при  $x=2\sqrt{3}$ . Значит,  $KL=16(4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}):3=8$ (см). Ответ:  $2\sqrt{3}$ см



# Метод оценки.

---

Некоторые задачи на экстремумы решаются методом оценки. В методе оценки следует коснуться неравенства Коши для нескольких переменных:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n.$$

На одном из предприятий стоимость  $x$  деталей, изготовленных рабочим сверхурочно, определяется по формуле  $y = 0,1x^2 + 0,5x + 2$ . Определите количество деталей, при котором себестоимость одной детали была бы наименьшей.



# Метод оценки.

---

Решение: Найдём среднее арифметическое для  $0,1x^2$ ,  $0,5x$  и  $2$ :  $(0,1x^2 + 0,5x + 2)/x = 0,5 + 0,1x + 2/x$ . Из трёх величин одна постоянная ( $0,5$ ), а две другие – переменные. Среднее геометрическое для переменных  $0,1x$  и  $2/x$  равно  $\sqrt{0,2}$ . Используя неравенство Коши для двух переменных получаем:  $0,5 + (2/x + 0,1x) \geq 0,5 + 2\sqrt{0,8}$ ;  $0,5 + (2/x + 0,1x) \geq 0,5 + \sqrt{0,8}$ . Левая часть неравенства принимает наименьшее значение равное  $0,5 + \sqrt{0,8}$ .



## Метод оценки.

---

Решаем уравнение  $0,1x^2 - \sqrt{0,8}x + 2 = 0$ ;  
 $D = 0,8 - 0,8 = 0$ ;  $x = \sqrt{0,8}/0,2 = \sqrt{20}$ . Но так как  $x$  – это количество деталей, то  $x = 4$  или  $x = 5$ .

Ответ: 4 или 5 деталей.





# Геометрия.

---

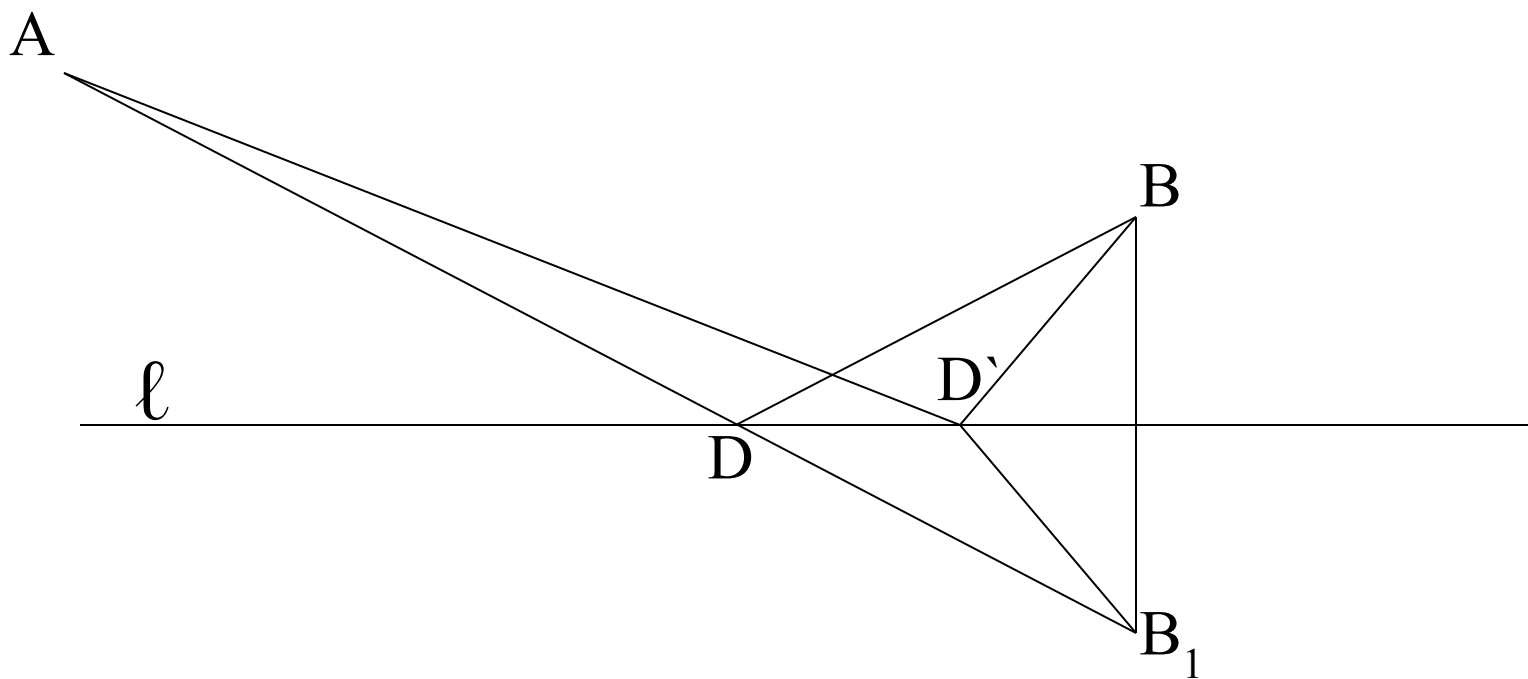
Основу задач по геометрии на максимум и минимум составляют задачи на преобразование плоскости. Основной задачей является старинная задача, написанная в I веке до н. э. Вот как она звучит:

*Даны две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от прямой  $\ell$ . Требуется найти на  $\ell$  такую точку  $D$ , чтобы сумма расстояний от  $A$  до  $D$  и от  $B$  до  $D$  была наименьшей.*



# Геометрия.

---





# Геометрия.

---

Решение: Пусть точка  $B_1$  – точка, симметричная точке  $B$  относительно прямой  $\ell$ . Соединим  $A$  с  $B_1$ . Тогда точка  $D$  пересечения  $AB_1$  с прямой  $\ell$  – искомая. Действительно, для любой точки  $D'$ , отличной от  $D$ , имеет место неравенство:  $AD' + D'B_1 > AB_1$  (т.к. в треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны);  $AD' + D'B > AD + DB$ .



# Заключение.

---

Я коснулся только нескольких задач на экстремумы, так как задачи на экстремумы встречаются в природе, сельском хозяйстве, в различных областях промышленности. Большое число задач оптимизации возникает в космонавтике, химической промышленности и технике. Это задачи управления технологическими процессами, приборами и системами. Траектории света и радиоволн, движения маятников и планет, течения и многие другие движения являются решениями некоторых задач на максимум и минимум.