

Производная функции

- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Производная неявно заданной функции
- Логарифмическое дифференцирование

Определение производной

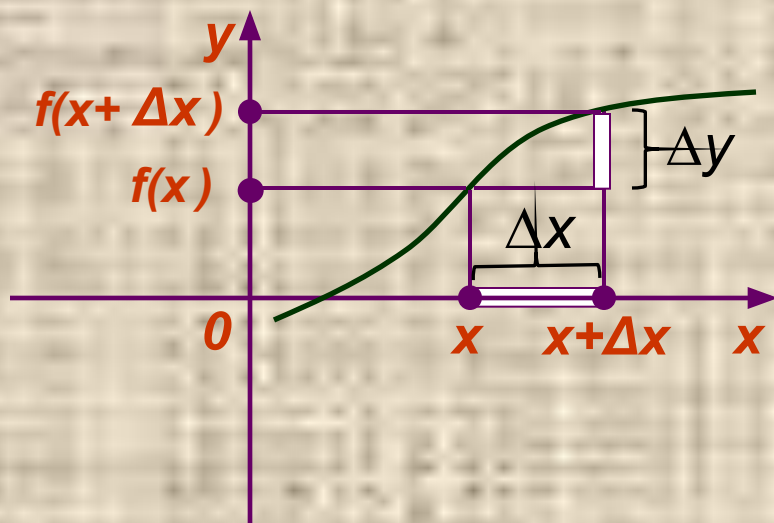
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

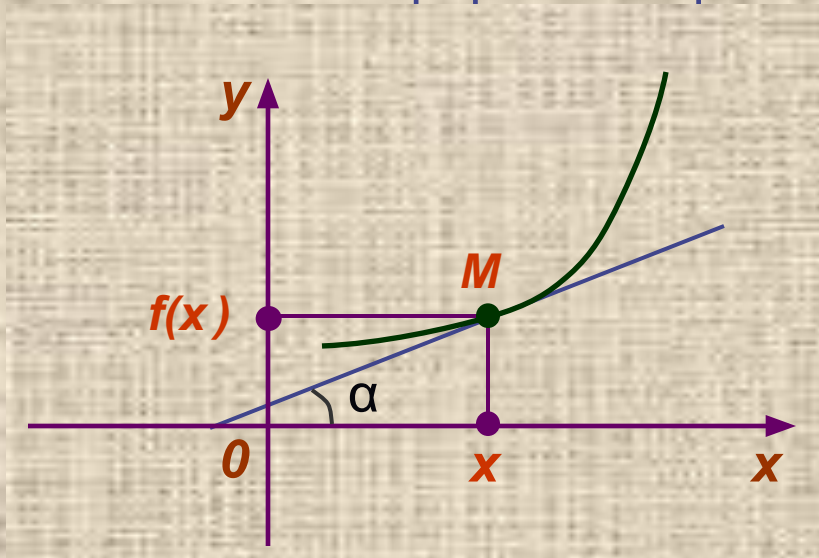
Значение производно функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y' \Big|_{x_0}$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной
Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

(где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Производные основных элементарных функций

1 Степенная функция: $y = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$

Придадим аргументу x приращение Δx , тогда функция получит приращение:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Формула бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

k – факториал

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

Производные основных элементарных функций

По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = \\ &= (\cancel{x^n} + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n) - \cancel{x^n}\end{aligned}$$

Тогда:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1} \right) =$$

$$= nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

Производные основных элементарных функций

2 Логарифмическая функция: $y = \ln x$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$$

Аналогично выводятся правила дифференцирования других основных элементарных функций.

при $\Delta x \rightarrow 0$

Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = f(\varphi(g(x)))$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x} \right)'$$

$$= \frac{(1 + \sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot (x^3 \cdot \ln x)'}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1' + (\sin x)') \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot ((x^3)' \cdot \ln x + x^3 (\ln x)')}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1 + \sin x) \cdot (3x^2 \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin(\ln^{12} x)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то говорят, что функция задана в **явном виде**.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно y :

$$F(x; y) = 0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию от x , и полученное выражение разрешить относительно производной.

$$[x^3 + y^3 - 3xy]' = [0]' \Rightarrow (x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{3}x^2 + \cancel{3}y^2 \cdot y' - \cancel{3}(x'y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала *прологарифмировать*, а затем результат *продифференцировать*.

Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow$$

$$[\ln y]' = \left[2 \ln x + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 5 \ln(2x+5) \right]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-1)'}{x-1} + 1 - 5 \frac{(2x+5)'}{2x+5} \Rightarrow$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{4x-4} + 1 - \frac{10}{2x+5} \right) \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5}$$

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется **степенно – показательной**.

Производная такой функции находится только с помощью логарифмического дифференцирования.

$$y = (\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = [(x^2 + 1) \cdot \ln(\sin x)]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = (x^2 + 1)' \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot (\ln(\sin x))' \Rightarrow$$

$$y' = \left(2x \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{x^2+1}$$