ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Верно ли, что:

$$a)\ \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};\qquad б)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4};$$

$$в)\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3};\qquad г)\ \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11\pi}{6};$$

$$д)\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.\qquad е)\ arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Имеют ли смысл выражения:

$a)\ \arccos(-\frac{2}{3});$

$б)\ \arcsin\frac{5}{3};$

$в)\ \arcsin\sqrt{2};$

$г)\ \arccos(-\sqrt{3});$

$д)\ \arccos(1-\sqrt{2});$

$е)\ arctg(-\sqrt{3}).$

Решить уравнение:

$a)\sin x = \dfrac{1}{2};$

$x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi \cdot k, k \in Z.$

$б)\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$x = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k, k \in Z.$

$в)\sqrt{2}cosx - 1 = 0;$

$x = \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k, k \in Z.$

$г)tg2x = 1;$

$x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi \cdot k}{2}, k \in Z.$

Пример 1. Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Решение.

Введём новую переменную **$t = \sin x$.** Тогда данное уравнение примет вид **$2t^2 + t - 1 = 0$.**

Решим его: $D = 1 + 8 = 9$,

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

Следовательно,

$\sin x = 1/2$ или **$\sin x = -1$.**

1) sinx = 1/2,

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi\cdot k, k\in Z,$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi\cdot k, k\in Z.$$

2) sinx = -1,

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n, n\in Z.$$

$$Ответ:(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi\cdot k, k\in Z, \quad -\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n, n\in Z.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0.$$

Решение.

Заменяя $\mathbf{\sin^2 x}$ на $\mathbf{1-\cos^2 x}$, получим квадратное уравнение относительно $\mathbf{\cos x}$.

$6(1-\cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0,$

$-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0,$

$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0.$

Пусть $\mathbf{\cos x = t}$, тогда $6t^2 - 5t - 4 = 0,$

$t_1 = -1/2, \quad t_2 = 4/3.$

Следовательно, **cos x = - 1/2** или **cos x = 4/3**.

Решая уравнение **cos x = -1/2**, находим:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\cdot k, k \in Z.$$

Уравнение cos x = 4/3 не имеет решений, так как 4/3 > 1.

$$\mathit{Ответ}: \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\cdot k, k \in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x = 3.$$

Решение.

Поскольку $\mathrm{ctg}x = \dfrac{1}{tgx}$,

то уравнение можно записать в виде:

$$tgx + \frac{2}{tgx} = 3.$$

Обозначим **tgx** через **t**. Получим уравнение $t + \dfrac{2}{t} = 3,$

которое приводится к квадратному

- 3t + 2 = 0, $(t \neq 0)$

$t^2 - 3t + 2 = 0.$

По теореме, обратной теореме Виета,

$t_1 = 2, \quad t_2 = 1.$

$$1)\, tgx = 2,$$

$$x = arctg\,2 + \pi \cdot n, n \in Z.$$

$$2)\, tgx = 1,$$

$$x = arctg\,1 + \pi \cdot k, k \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, k \in Z.$$

$$Ответ: arctg\,2 + \pi \cdot n, n \in Z, \quad \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k, k \in Z.$$

Пример 4. $\sin^2 4x = 1/4$

Решение.

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4};$$

$\cos 2x = 1/2$

$X = \pm\pi/6 + \pi n;\ n \in Z$

Пример 5. **3 sin x +4 cos x =0;**

Решение.

Поделим обе части уравнения на **cos x** $\neq 0$.

3 tg x + 4 =0 ;

tg x = -4/3 ;

$$Ответ: -arctg(4/3) + \pi \cdot k, k \in Z.$$