

«Показательные уравнения и неравенства»



*Маргиева Нелли Александровна
Учитель математики
Республиканского физико-математического
лицея-интерната.*

«Показательные уравнения и неравенства»



Цель урока: обобщение знаний о способах решения показательных уравнений и неравенств, подготовка к ЕГЭ.

«Показательные уравнения и неравенства»

- ▣ Повторение теоретического материала
 - показательные уравнения
 - показательные неравенства
- ▣ Повторение некоторых способов решения уравнений и неравенств
- ▣ Работа в группах
- ▣ Тест
- ▣ Проверка теста
- ▣ Домашнее задание
- ▣ Оценка своей работы

Показательные уравнения

1. $a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$

- если $b > 0$, то $x = \log_a b$
- если $b \leq 0$, то решений нет

2. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$



Показательные неравенства

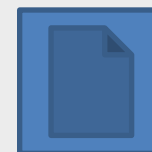
Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \quad \text{или} \quad a^x < a^b$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

- если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$
- если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$



Укажите промежуток, на котором
лежит корень уравнения

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39.$$



Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39,$$

$$9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 3^x = 39,$$

$$13 \cdot 3^x = 39,$$

$$3^x = 3,$$

$$x = 1.$$

Из данных промежутков только промежуток $(0; 2)$ содержит найденный корень.

Ответ:

(1) $[-2; 0]$; (2) $[2; 4]$; (3) $(4; 9]$; (4) $(0; 2)$.

Номера правильных ответов 4



Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$4^x + 2^{x+1} = 3.$$



Решение:

$$4^x + 2^{x+1} = 3,$$

$$4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0,$$

Сделаем замену переменных. Пусть $y = 2^x$. Уравнение принимает вид $y^2 + 2y - 3 = 0$.

Полученное уравнение имеет корни $-3; 1$

Сделаем обратную замену: $\begin{cases} 2^x = -3, \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Из данных промежутков только промежуток $[0;1)$ содержит найденный корень.

Ответ:

(1) $[\log_2 6; 3)$;

(2) $[0;1)$;

(3) $[3;4)$;

(4) $[5;5)$.

Номера правильных ответов.

2



Найдите область определения
функции

$$y = \sqrt{5^{3x+1} - 1}.$$



Решение:

Составим неравенство $5^{3x+1} - 1 \geq 0$. Решив его, получим:

$$x \in [-1/3; +\infty)$$

|| Подробнее. $5^{3x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{3x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 5^{3x+1} \geq 5^0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$

Ответ:

(1) $(-\infty; -1/3]$; **(2)** $[1/3; +\infty)$; **(3)** $[-1/3; +\infty)$; **(4)** $(-\infty; -1/3)$.

Номера правильных ответов.

3



Найдите область определения
функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}} - 1.$$



Решение:

Составим неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1 \geq 0$ Решив его, получим:

$$x \in (-\infty; 7/3]$$

Подробнее. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7} \geq 3^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7/3.$$

Ответ:

(1) $[7/3; \infty)$; (2) $(-\infty; -7/3]$; (3) $(-\infty; 7/3]$; (4) $(-\infty; 7/3)$.

Номера правильных ответов.

3



Способы решения показательных уравнений и неравенств

- Уравнивание оснований
- Вынесение общего множителя за скобку
- Введение вспомогательной переменной
(замена переменной)





Работа в группах



1. Составить и решить уравнение и неравенство
2. Найти ошибку в решении (Бланк №2)



Укажите промежуток, содержащий корень уравнения

$$(0,125)^{2-\frac{x}{3}} = 16$$

Решение.

$$(0,125)^{2-\frac{x}{3}} = 16,$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2-\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$6 - x = -4,$$

$$x = 10.$$

- 1) (9;11) 2) (9;10) 3) (3;5] 4) [0;3]



Укажите множество решений неравенства

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9}.$$

Решение.

$$(1,5)^{x-1} > \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$1-x < 2,$$

$$x > -1.$$

1) $(-1; +\infty)$ 2) $(-\infty; -1)$ 3) $(3; +\infty)$ 4) $(-\infty; 3)$



Тест

- Выберите уровень задания на Бланке №3 и приступайте к его выполнению.
- Время на выполнения задания **6 минут**.



Ответы теста

I уровень:

1)

2)

3)

4)

5)

II уровень:

1)

2)

3)

4)

5)

Критерии:

I уровень

5 заданий - «4»

4 задания - «3»

3 задания - «2»

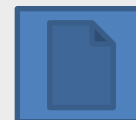
II уровень

5 заданий - «5»

4 задания - «4»

3 задания - «3»

2 задания - «2»



C 1. Решите уравнение $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2$.

Возможная запись решения ученика.

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 11 = \left(\sqrt{2 - 2x^2}\right)^2 + 2x^2.$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 11 = 2 - 2x^2 + 2x^2, \\ 2 - 2x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0, \\ 1 - x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$y = 3^x, y > 0, \text{ тогда } 3y^2 - 28y + 9 = 0,$$

$$y = 9 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 9 \quad \text{или} \quad 3^x = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x = -1$$

$$\text{т.к. } 1 - x^2 \geq 0, \text{ то } x = -1$$

Ответ: -1



- Задание с использованием показательных функций, показательных уравнений и неравенств являются весьма популярными заданиями во всех вариантах ЕГЭ.
- *Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.*

Л. Эйлер



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Учебно-методический комплект:
- Математика. Алгебра и математический анализ. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О.С., Мордкович А.Г.* 11 класс. Учебное пособие.
- Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Контрольные и самостоятельные работы под редакцией М.Л.Галицкого и др.

