«Показательные уравнения и неравенства»

Маргиева Нелли Александровна
Учитель математики
Республиканского физико-математического лицея-интерната.

«Показательные уравнения и неравенства»

<u>Цель урока:</u> *обобщение знаний о способах решения показательных уравнений и неравенств, подготовка к ЕГЭ.*

«Показательные уравнения и неравенства»

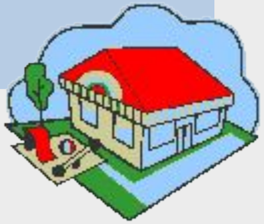
- Повторение теоретического материала
  - показательные уравнения
  - показательные неравенства
- Повторение некоторых способов решения уравнений и неравенств
- Работа в группах
- Тест
- Проверка теста
- Домашнее задание
- Оценка своей работы

Показательные уравнения

1. $$a^x = b \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

- **если** $b > 0$ **, то** $x = \log_a b$
- **если** $b \leq 0$ **, то** ***<u>решений нет</u>***

2. $$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$



Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводиться к решению неравенств

$$a^x > a^в \quad \text{или} \quad a^x < a^в$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

- если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$
- если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$

Задание № 1

Укажите промежуток, на котором лежит корень уравнения

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} = 39.$$

Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} = 39,$$

$$\boxed{9} \cdot 3^{x} + 3 \cdot 3^{x} + 3^{x} = 39,$$

$$\boxed{13} \cdot 3^{x} = 39,$$

$$3^{x} = \boxed{3,}$$

$$x = \boxed{1}\ .$$

Из данных промежутков только промежуток $\boxed{(0;2)}$ содержит найденный корень.

Ответ:

(1) [-2;0]; **(2)** [2;4]; **(3)** (4;9]; **(4)** (0;2).

Номера правильных ответов $\boxed{4}$

Задание № 2

Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$4^x + 2^{x+1} = 3.$$

Решение:

$$4^x + 2^{x+1} = 3,$$

$$4^x + \boxed{2} \cdot 2^x - 3 = 0,$$

Сделаем замену переменных. Пусть $y = 2^x$. Уравнение принимает вид $\boxed{y^2} + 2y - 3 = 0.$

Полученное уравнение имеет корни $\boxed{-3;\ 1}$

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} 2^x = -3, \\ 2^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = \boxed{1} \Leftrightarrow x = \boxed{0}.$

Из данных промежутков только промежуток $\boxed{[0;1)}$ содержит найденный корень.

Ответ:

(1) $[\log_2 6;\ 3)$; **(2)** [0;1); **(3)** [3;4); **(4)** [5;5).

Номера правильных ответов. $\boxed{2}$

Задание № 3

Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{5^{3x+1} - 1}.$$

Решение:

Составим неравенство $5^{3x+1}-1\geq$ 0 . Решив его, получим:

$x\in$ [-1/3; +∞)

Подробнее. $5^{3x+1}-1\geq 0 \Leftrightarrow 5^{3x+1}\geq$ 1 $\Leftrightarrow 5^{3x+1}\geq 5^{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+1\geq$ 0 $\Leftrightarrow x\geq$ -1/3

Ответ: **(1)** (-∞;-1/3]; **(2)** [1/3; +∞); **(3)** [- 1/3;+∞); **(4)** (-∞;-1/3).

Номера правильных ответов: 3

Задание № 4

Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}-1.}$$

Решение:

Составим неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}-1\geq$ 0 Решив его, получим:

$x\in$ (-∞;7/3]

Подробнее. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}-1\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}\geq$ 1 $\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-7}\geq 3^{0}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-7\leq$ 0 $\Leftrightarrow x\leq$ 7/3.

Ответ:

(1) [7/3;∞); **(2) (-**∞;-7/3]; **(3)** (-∞;7/3]; **(4)** (-∞;7/3).

Номера правильных ответов. 3

Способы решения показательных уравнений и неравенств

- Уравнивание оснований
- Вынесение общего множителя за скобку
- Введение вспомогательной переменной
  (замена переменной)

Работа в группах

1. Составить и решить уравнение и неравенство
2. Найти ошибку в решении (Бланк №2)

Укажите промежуток, содержащий корень уравнения

$$(0{,}125)^{2-\frac{x}{3}}=16$$

Решение.

$$(0{,}125)^{2-\frac{x}{3}}=16,$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{2-\frac{x}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4},$$

$$6-x=-4,$$

$$x=10.$$

<u>1) (9;11)</u> **2) (9;10)** **3) (3;5]** **4) [0;3]**

Укажите множество решений неравенства

$$(1{,}5)^{x-1} > \frac{4}{9}.$$

Решение.

$$(1{,}5)^{x-1} > \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2},$$

$$1 - x < 2,$$

$$x > -1.$$

<u>1) (-1;+∞)</u> 2) (- ∞;-1) 3) (3;+ ∞) 4) (- ∞;3)

Тест

- Выберите уровень задания на Бланке №3 и приступайте к его выполнению.
- Время на выполнения задания **6 минут**.

Ответы теста

I уровень:

1) 2

2) **-2,5**

3) **-2;2**

4) **(5;+∞)**

5) **(-∞;-2]**

II уровень:

1) 1

2) 0

3) **-2;2**

4) **[5; +∞)**

5) (-2;2)

Критерии:

I уровень

5 заданий - «4»

4 задания - «3»

3 задания - «2»

II уровень

5 заданий - «5»

4 задания - «4»

3 задания - «3»

2 задания - «2»

С 1. Решите уравнение $3\cdot 9^{x}-28\cdot 3^{x}+11=\left(\sqrt{2-2x^{2}}\right)^{2}+2x^{2}.$

Возможная запись решения ученика.

$$3\cdot 9^{x}-28\cdot 3^{x}+11=\left(\sqrt{2-2x^{2}}\right)^{2}+2x^{2}.$$

$$\begin{cases}3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+11=2-2x^{2}+2x^{2},\\ 2-2x^{2}\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+9=0,\\ 1-x^{2}\geq 0;\end{cases}$$

$$3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+9=0$$

$y=3^{x}, y>0$, тогда $3y^{2}-28y+9=0,$

$y=9$ или $y=\frac{1}{3}$

$3^{x}=9$ или $3^{x}=\frac{1}{3}$

$x=2$ или $x=-1$

т.к. $1-x^{2}\geq 0$, то $x=-1$

$Ответ: -1$

- Задание с использованием показательных функций, показательных уравнений и неравенств являются весьма популярными заданиями во всех вариантах ЕГЭ.
- *Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.*

Л. Эйлер

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **Учебно-методический комплект:**
- **Математика. Алгебра и математический анализ.** ***Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О.С., Мордкович А.Г.*** **11 класс. Учебное пособие.**
- Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. Контрольные и самостоятельные работы под редакцией М.Л.Галицкого и др.