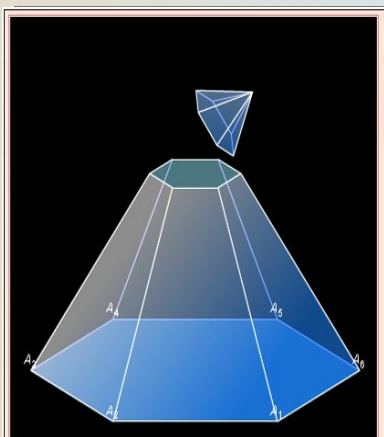


# УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА

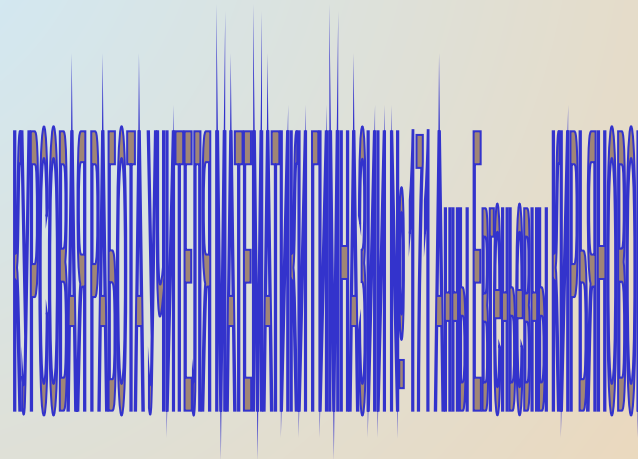
СТЕРЕОМЕТРИЯ



КЛАСС

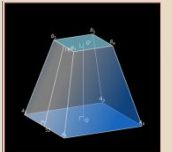


ПИРАМИДА

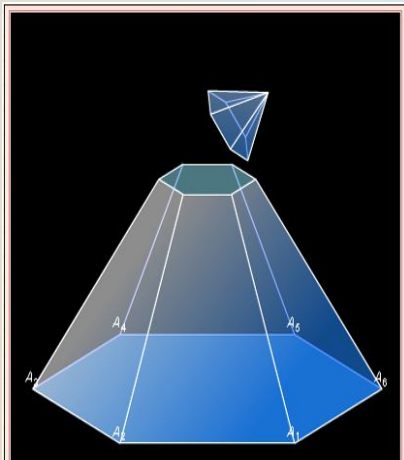
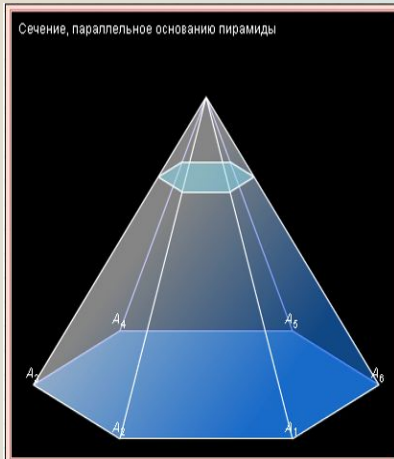


# СОДЕРЖАНИЕ

- ПОНЯТИЕ ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ
- ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИДА
- ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ
- ЗАДАЧИ



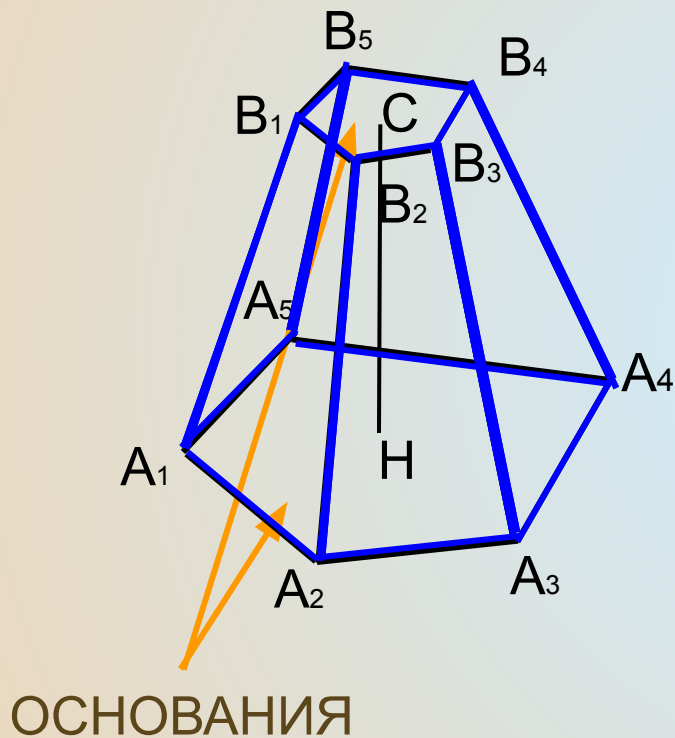
# ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Плоскость параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой.
- *Усеченная пирамида* – это часть полной пирамиды, заключенная между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды



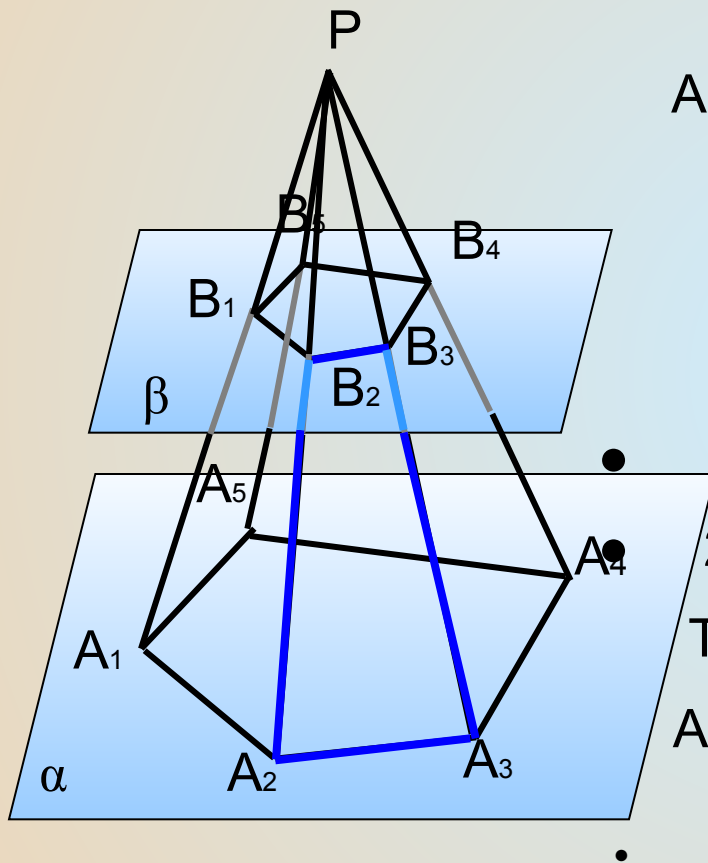
# ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ



- Многоугольники  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и  $B_1B_2B_3B_4B_5$  - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$  - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники  $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots$  - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок  $CH$  – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды.



# УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



Докажем, что боковые грани  $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$  являются трапециями.

Рассмотрим четырехугольник  $A_1B_1B_2A_2$ .

1.  $\alpha \parallel \beta$

$(PA_2A_3) \cap \alpha = A_2A_3$

$(PA_2A_3) \cap \beta = B_2B_3$

значит  $A_2A_3 \parallel B_2B_3$

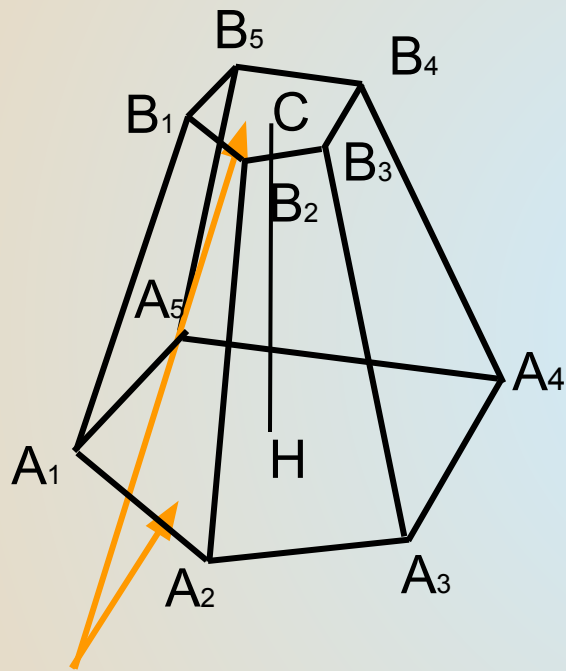
2.  $A_2P \cap A_3P = P$ , значит  $A_2B_2 \parallel A_3B_3$

Т.о.  $A_1B_1B_2A_2$  – трапеция по определению

Аналогично доказывается и про остальные боковые грани.



# ПОНЯТИЕ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

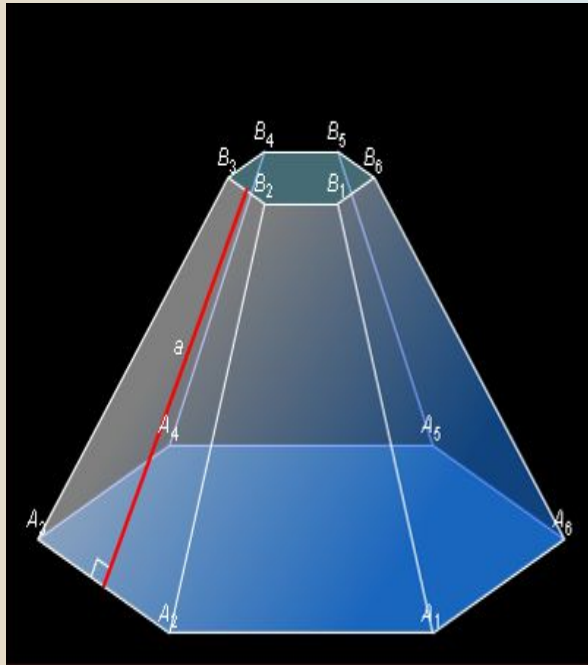


ОСНОВАНИЯ

- Многоугольники  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и  $B_1B_2B_3B_4B_5$  - *нижнее и верхнее основания* усечённой пирамиды
- Отрезки  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$  - *боковые ребра* усечённой пирамиды
- Четырёхугольники  $A_1B_1B_2A_2, A_2B_2B_3A_3, \dots$  - *боковые грани* усечённой пирамиды. Можно доказать, что все они являются трапециями.
- Отрезок  $CH$  – перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки верхнего основания к нижнему основанию – называется *высотой* усечённой пирамиды



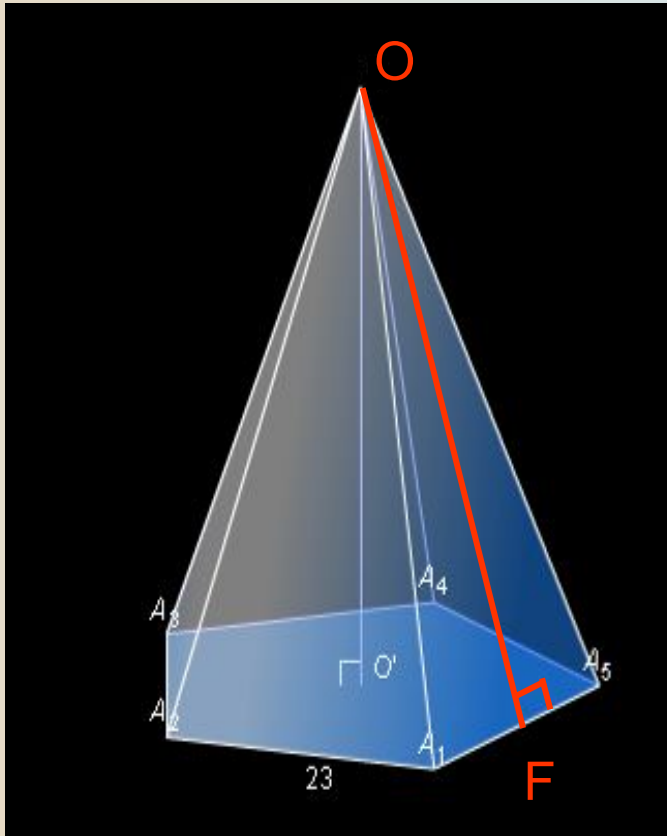
# ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



- Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию.
- Основания - правильные многоугольники .
- Боковые грани – равные равнобедренные трапеции (?).
- Высоты этих трапеций называются *апофемами*.



# ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

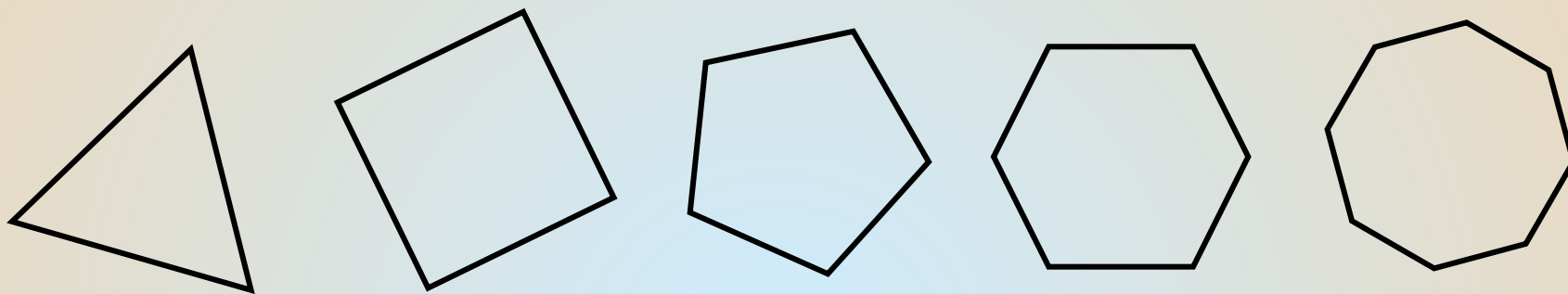


- Пирамида называется *правильной*, если её основание – правильный многоугольник, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину с центром основания, является её высотой.
- Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а грани являются равными равнобедренными треугольниками.
- Высота боковой грани правильной пирамиды называется **апофемой**. Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

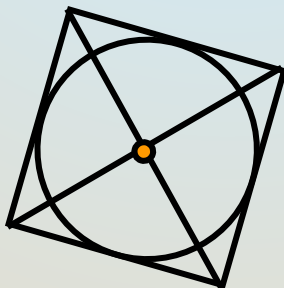
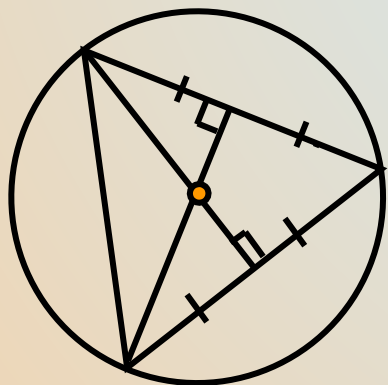




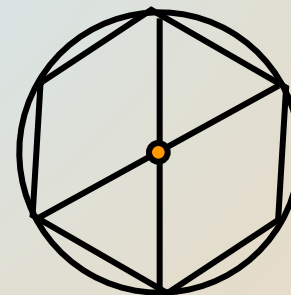
*Правильным многоугольником* называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.



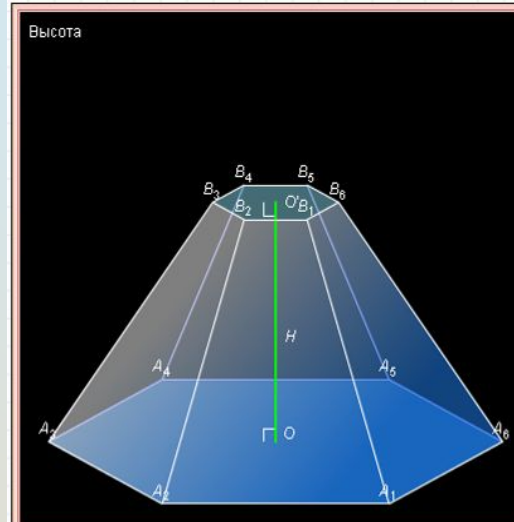
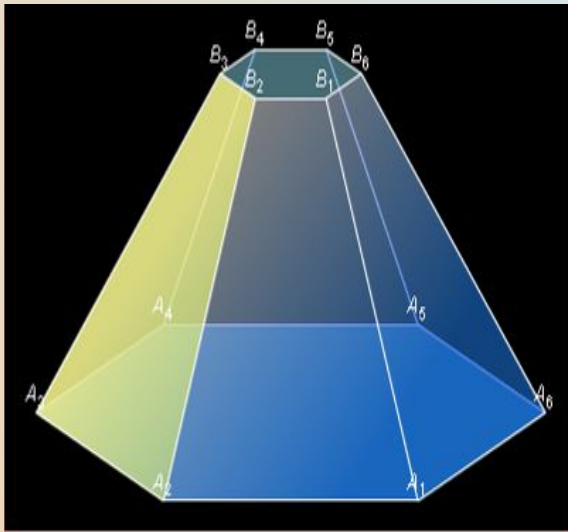
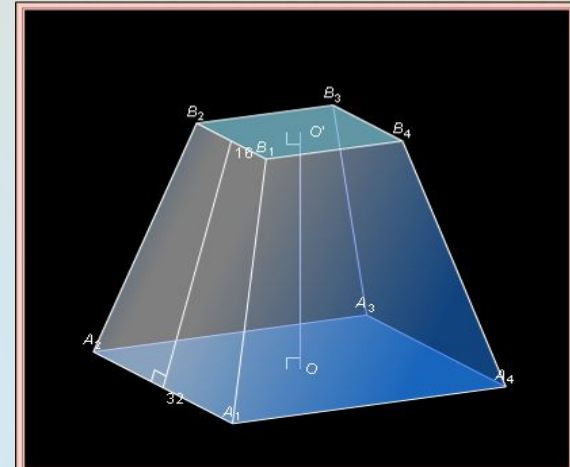
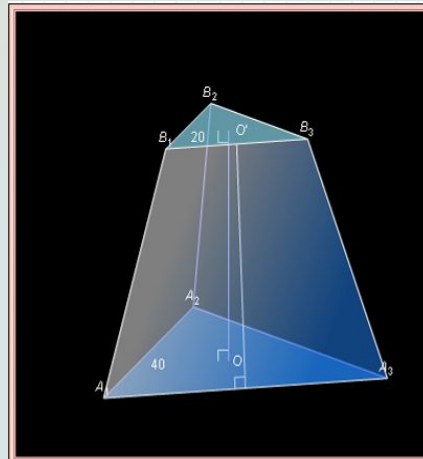
Центр окружности, описанной около правильного многоугольника совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник, и называется *центром правильного многоугольника*. Для его нахождения достаточно определить в какой точке находится центр либо вписанной либо описанной окружности.



ПИРАМИДА



# УСЕЧЕННЫЕ ПИРАМИДЫ



ПИРАМИДА

[СОДЕРЖАНИЕ](#)

# ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

- *Площадью полной поверхности* ( $S_{\text{полн}}$ ) пирамиды называется сумма площадей всех её граней: основания и всех боковых граней.
- *Площадью боковой поверхности* ( $S_{\text{бок}}$ ) пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

- *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды* равна половине произведения периметра основания на апофему.
- *Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды* равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему. [Доказать.](#)

$$S_{\text{полн.усеч.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн.осн.}} + S_{\text{нижн.осн.}}$$



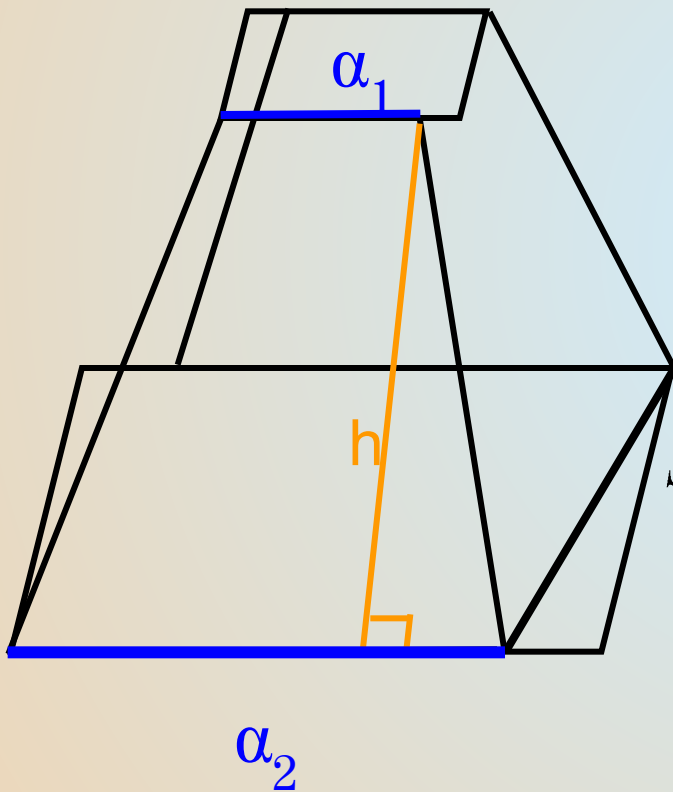
# ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ УСЕЧЁННОЙ ПИРАМИДЫ

Найдем площадь одной из граней правильной n-угольной усечённой пирамиды.

$$S_{\text{грани}} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h$$

Т.к. эта усечённая пирамида правильная, то

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{грани}} \cdot n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h \cdot n = \frac{a_1 n + a_2 n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$



$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h$$



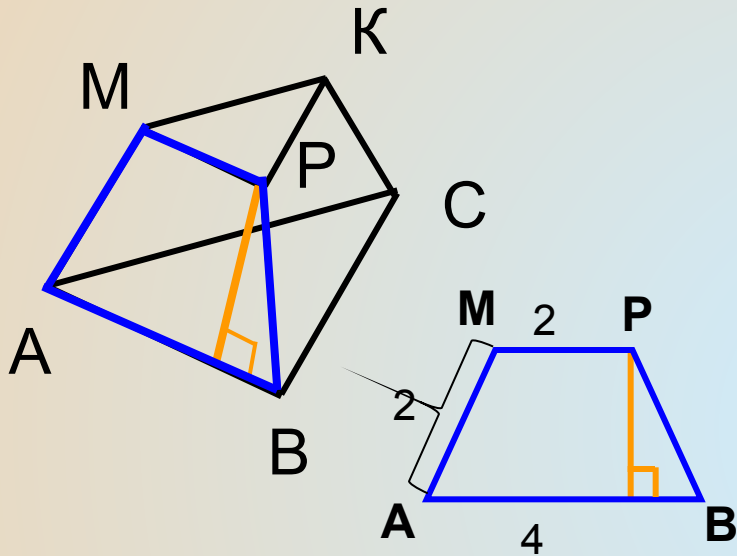
# ЗАДАЧА 1

*Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 2 см, а боковое ребро равно 2 см.*

*Найдите: 1. апофему пирамиды;  
2. площадь полной поверхности.*



# Ход решения задачи.



*Дано:* ABCMPK – правильная усечённая пирамида;

$\triangle ABC$  – нижнее основание;

$\triangle MPK$  – верхнее основание;

$AB = 4$  см,  $MP = 2$  см,  $AM = 2$  см.

*Найти:* 1. апофему;

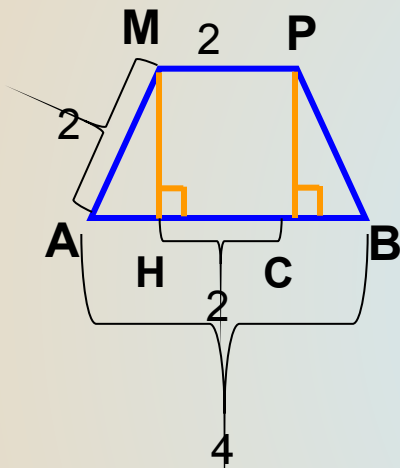
2.  $S_{\text{полн}}$

*План решения:*

1. Сделать чертёж.
2. Построить апофему и определить многоугольник, из которого можно её найти.
3. [Произвести необходимые вычисления.](#)



# РЕШЕНИЕ



$$AB = AH + AC + CB$$

$$CB = AH$$

$$HC = MP$$

$$AB = 2AH + MP$$

$$\text{Т.о. } 2AH = 2, AH = 1$$

$\triangle AMH$  – прямоугольный,  $\angle ANM = 90^\circ$

$AH = \sqrt{3}$  по теореме Пифагора.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{верхн.осн.}} + S_{\text{нижн.осн.}}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{2} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ т.к. в основании правильные треугольники}$$



# РЕШЕНИЕ

$$S_{\text{верхн.осн.}} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{нижн.осн.}} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн}} = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 14\sqrt{3}(\text{см}^2)$$

**Ответ:**  $\sqrt{3}\text{см}$ ,  $14\sqrt{3}\text{см}^2$ .



[СОДЕРЖАНИЕ](#)



# ЗАДАЧА 2

*Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усеченной пирамиды равна 4 см, а площадь её полной поверхности равна 186 см<sup>2</sup>.*

*Найдите высоту усечённой пирамиды.*



СПАСИБО ЗА ТЕРПЕНИЕ

ПИРАМИДА