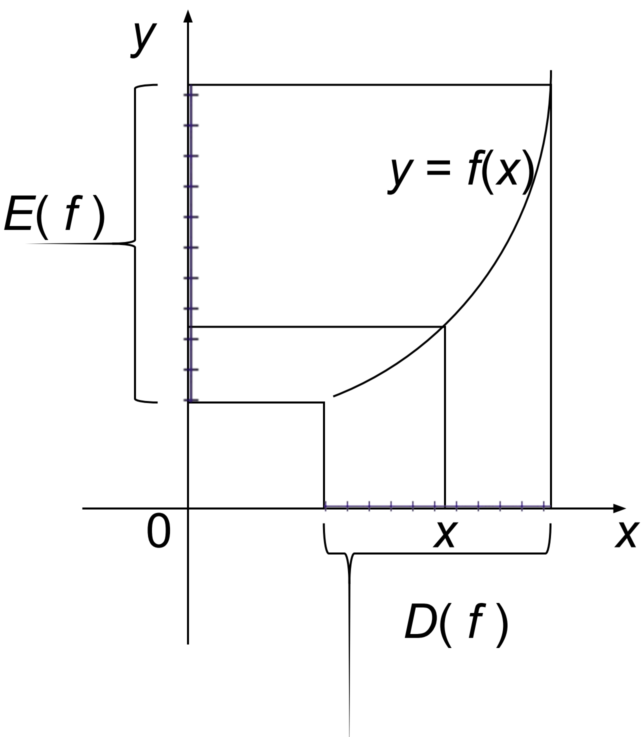
Взаимно обратные функции



Если каждому значению *x* из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу *f* число *y*, то, говорят, что на этом множестве определена функция.

Прямая Задача.

$y = f(x)$, x - !

Найти значение ***y*** при заданном значении ***x***.

Дано: $y = 2x + 3$

Найти: $y(5)$

Решение:

$y(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

Ответ: $y(5) = 13$

Обратная Задача.

$y = f(x)$, y- !

Найти значение ***x*** при заданном значении ***y***.

Дано: $y = 2x + 3$, $y(x) = 42$

Найти: x

Решение:

$42 = 2x + 3$

$2x = 39$

$x = 19{,}5$

Ответ: $y(19{,}5) = 42$

Дано: $v(t) = v_0 - gt$

Найти: ***t – ?***

Решение:

$$v_0 - gt = v$$

$$gt = v_0 - v$$

$t = \dfrac{v_0 - v}{g}$, т.е. $t(v) = \dfrac{v_0 - v}{g}$

Обратимая функция

Обратная функция к ***v(t)***

Если функция *y* = *f* (*x*) принимает каждое своё значение *y* только при одном значении *x*, то эту функцию называют обратимой.

$$y = 2x + 2$$

$$y = x^2$$

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

$$x_1 = \sqrt{y} \qquad x_2 = -\sqrt{y}$$

$$y = x^3$$

Пусть *y* = *f*(*x*) – обратимая функция. Тогда каждому *y* из множества значений функции соответствует одно определённое число *x* из области её определения, такое, что *f*(*x*) = *y*. Это соответствие определяет функцию *x* от *y*, которую обозначим *x* = *g*(*y*). Поменяем местами *x* и *y*: *y* = *g*(*x*).

Функцию *y* = *g*(*x*) называют обратной к функции *y* = *f*(*x*).

Дано: $y = \dfrac{1}{x-2}$

Найти функцию, обратную данной $y = f^{-1}(x)$.

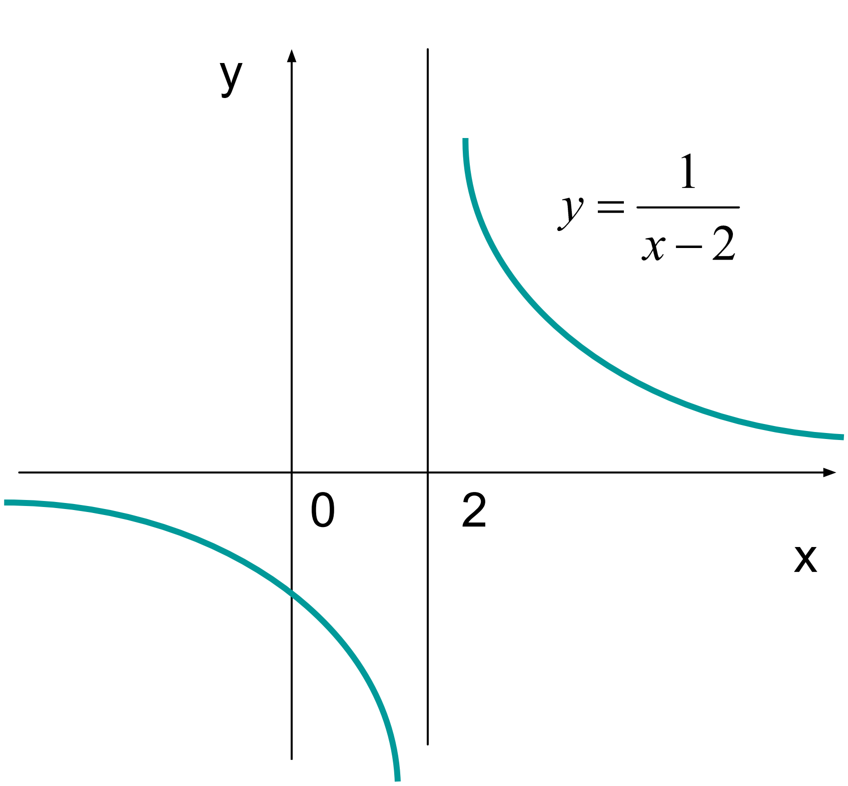
Решение:

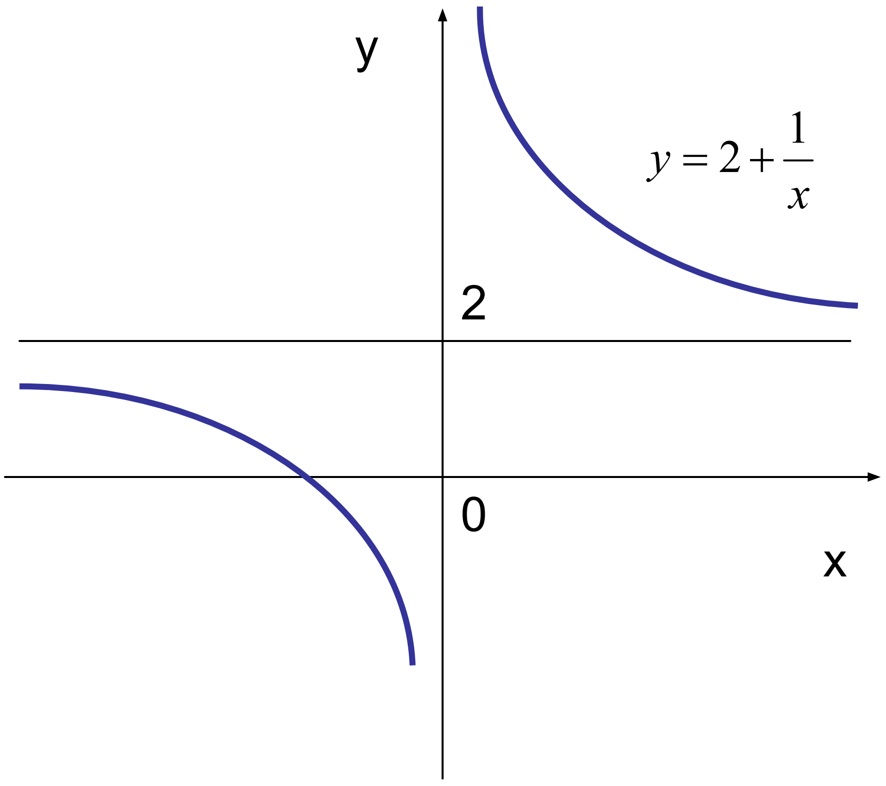
$$\frac{1}{x-2} = y$$

$$x - 2 = \frac{1}{y}$$

$$x = 2 + \frac{1}{y} \Longrightarrow y = 2 + \frac{1}{x}$$

Ответ: $f^{-1}(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$





1. D(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)
2. E(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)

1. D(y)=(-∞;0)∪(0;+∞)
2. E(y)=(-∞;2)∪(2;+∞)

Свойства обратных функций.

1. *Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной f, а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f:*

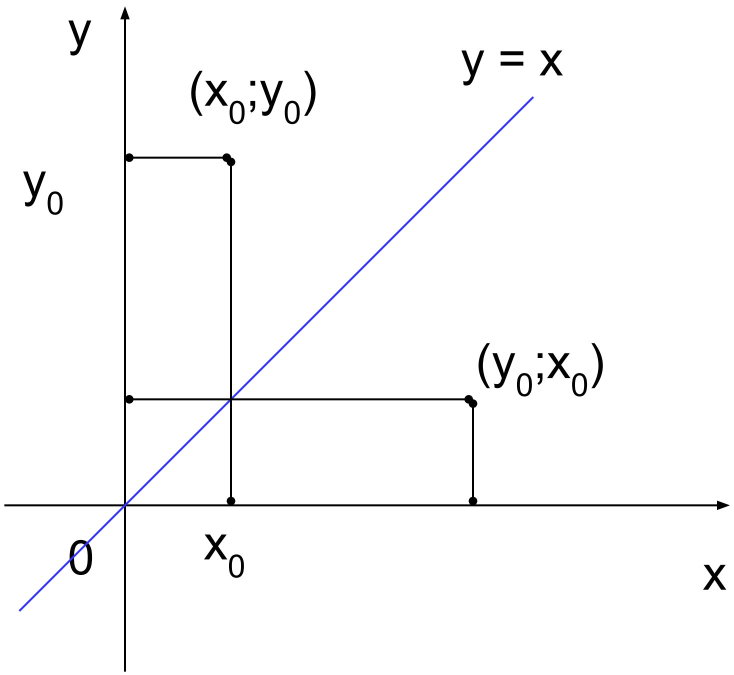
   $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$.

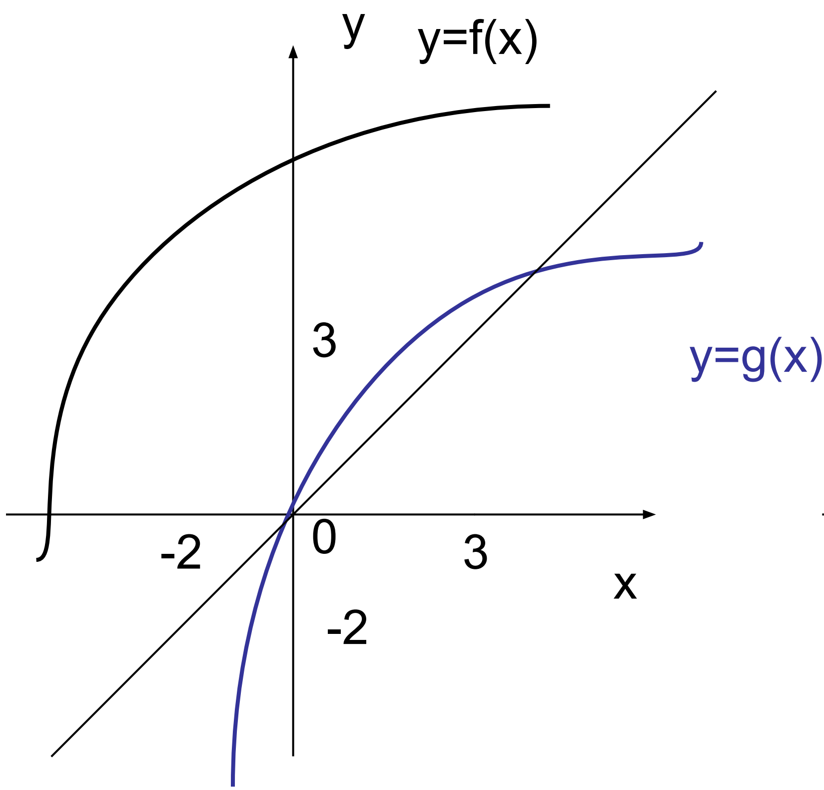
2. *Монотонная функция является обратимой:*

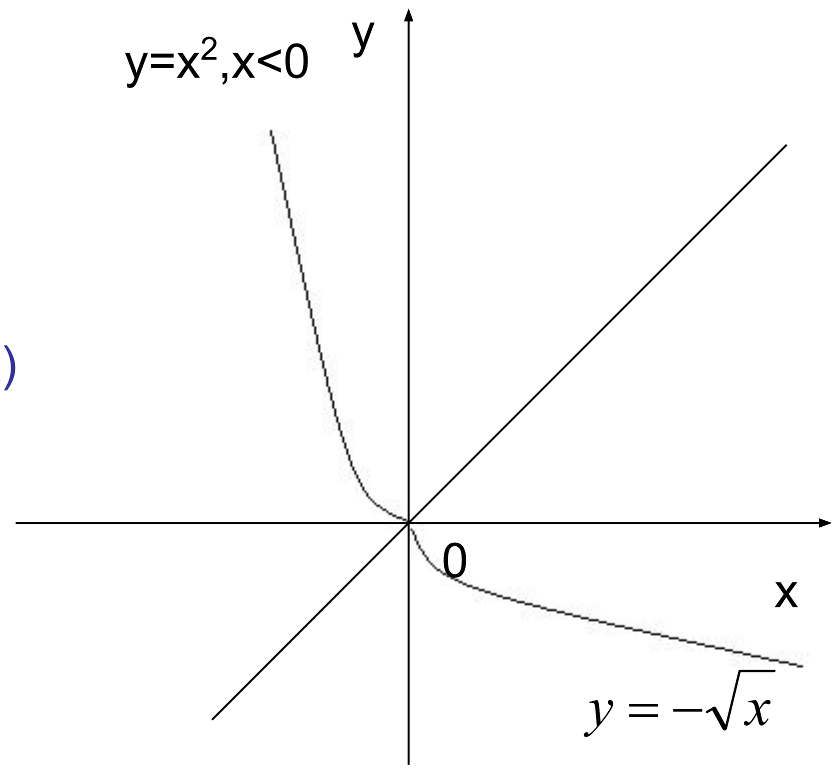
   если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;

   если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.

3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой y = x.







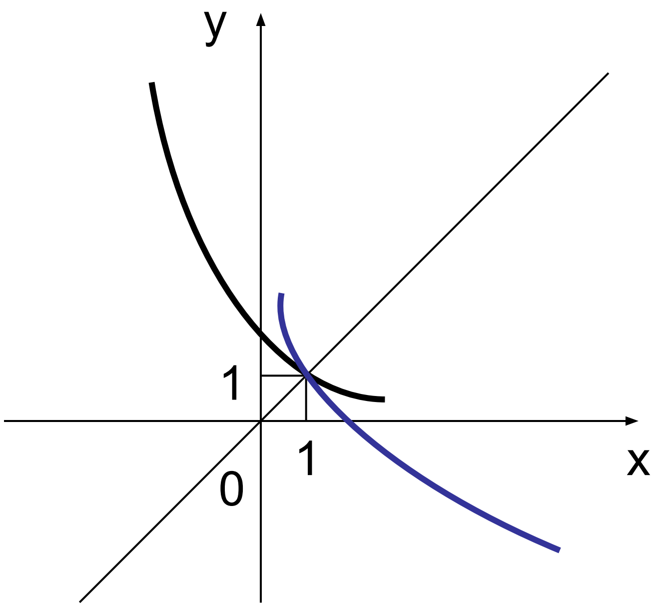
1. D(f)=R
2. E(f)=R
3. возрастающая

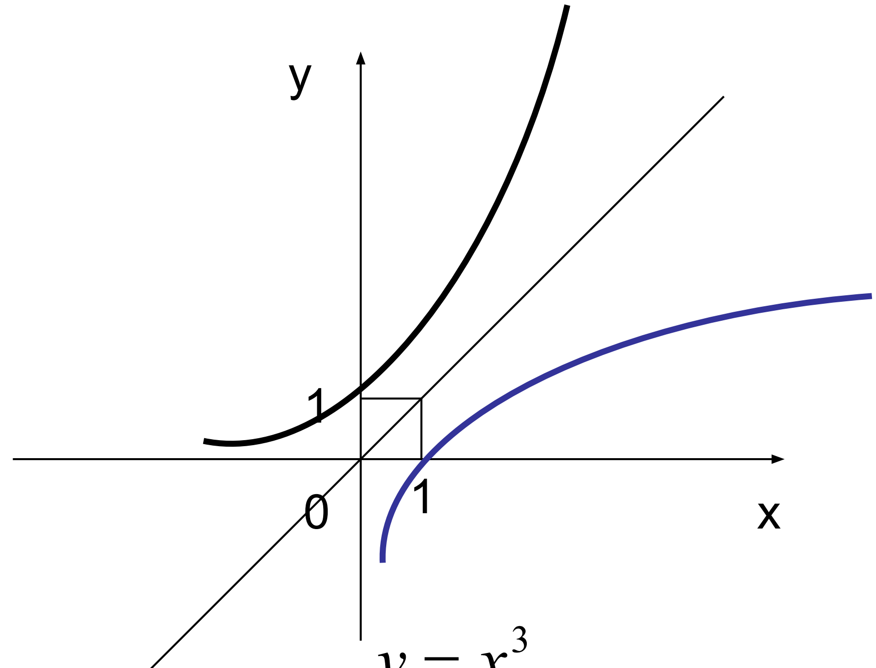
1. D(g)=R
2. E(g)=R
3. возрастающая

1. D(y)=(-∞;0]
2. E(y)=[0;+∞)
3. убывающая

1. D(y)=[0;+∞)
2. E(y)=(-∞;0]
3. убывающая

Построить график функции, обратной данной.





Дано: y = x^3

Построить функцию, обратную к данной.

Решение: $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$