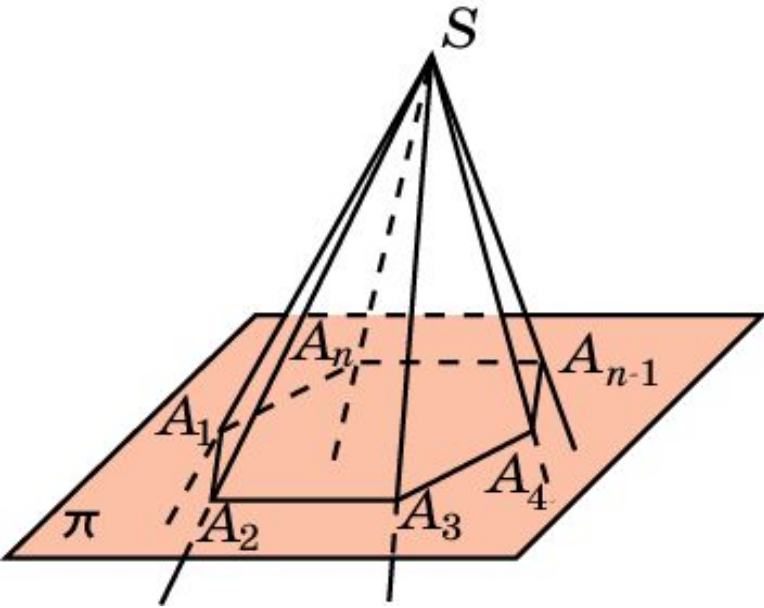


# МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

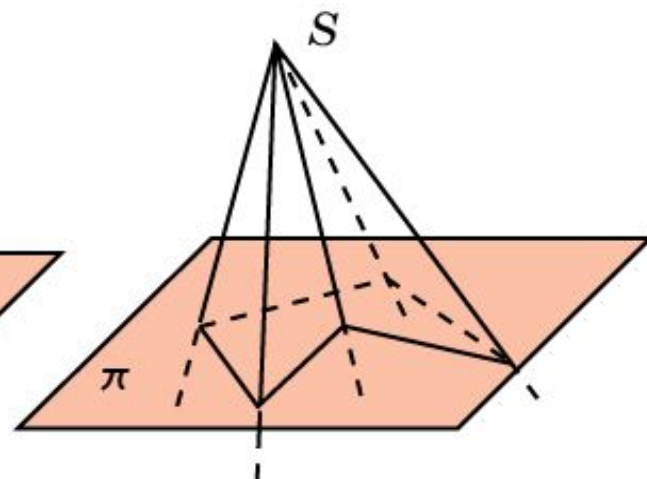
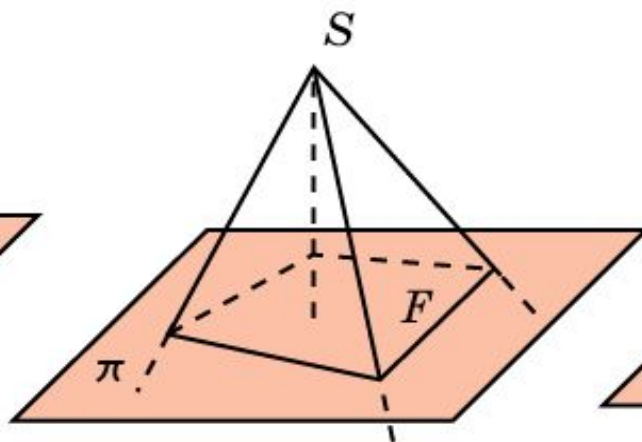
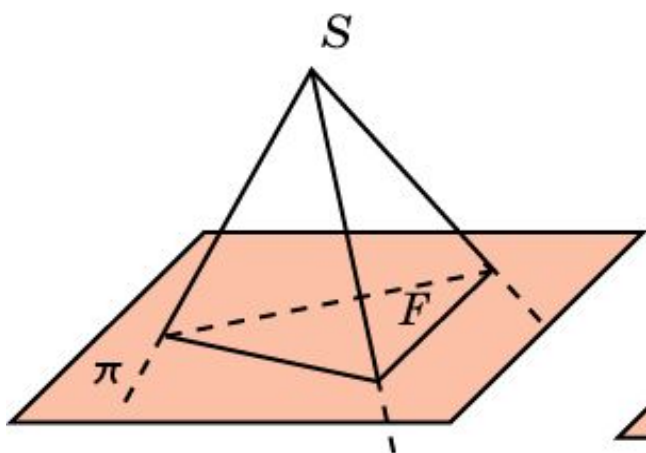


Поверхность, образованную конечным набором плоских углов  $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$  с общей вершиной  $S$ , в которых соседние углы не имеют общих точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины, будем называть **многогранной поверхностью**.

Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется **многогранным углом**. Общая вершина  $S$  называется **вершиной** многогранного угла. Лучи  $SA_1, \dots, SA_n$  называются **ребрами** многогранного угла, а сами плоские углы  $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$  – **гранями** многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами  $SA_1\dots A_n$ , указывающими вершину и точки на его ребрах.

# МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



# ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

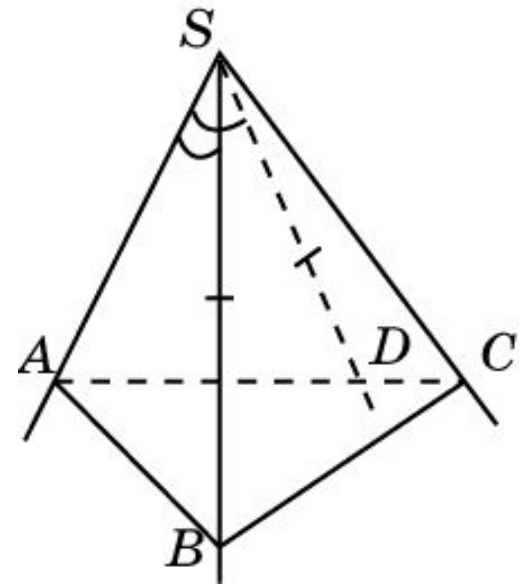
**Теорема.** Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

**Доказательство.** Рассмотрим трехгранный угол  $SABC$ . Пусть наибольший из его плоских углов есть угол  $ASC$ . Тогда выполняются неравенства  $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$ ;  $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$ .

Таким образом, остается доказать неравенство  $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ .

Отложим на грани  $ASC$  угол  $ASD$ , равный  $ASB$ , и точку  $D$  выберем так, чтобы  $SB = SD$ . Тогда треугольники  $ASB$  и  $ASD$  равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно,  $AB = AD$ .

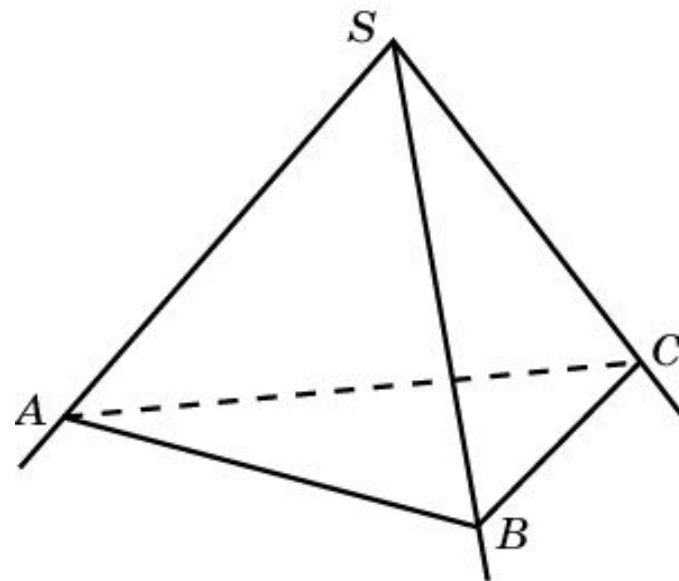
Воспользуемся неравенством треугольника  $AC < AB + BC$ . Вычитая из обеих его частей  $AD = AB$ , получим неравенство  $DC < BC$ . В треугольниках  $DSC$  и  $BSC$  одна сторона общая ( $SC$ ),  $SD = SB$  и  $DC < BC$ . В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно,  $\angle DSC < \angle BSC$ . Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол  $ASD$ , равный углу  $ASB$ , получим требуемое неравенство  $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ .



# ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

**Свойство.** Сумма плоских углов трехгранного угла меньше  $360^\circ$ .

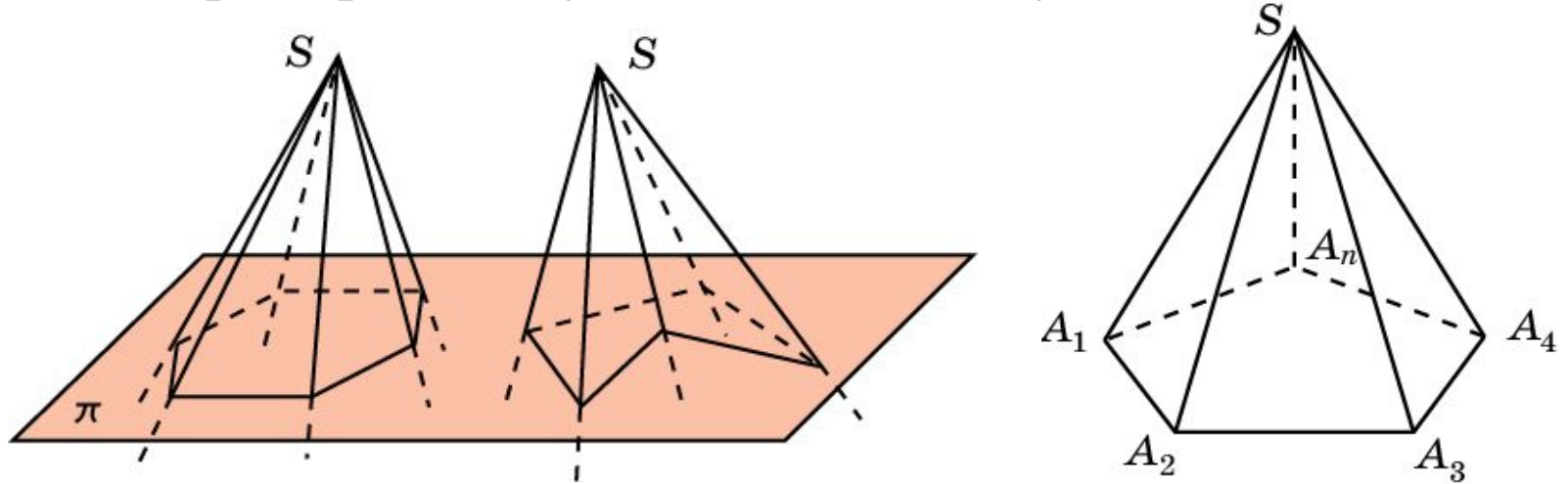
**Доказательство.** Пусть  $SABC$  – данный трехгранный угол. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной  $A$ , образованный гранями  $ABS$ ,  $ACS$  и углом  $BAC$ . В силу доказанного свойства, имеет место неравенство  $\angle BAC < \angle BAS + \angle CAS$ .



Аналогично, для трехгранных углов с вершинами  $B$  и  $C$  имеют место неравенства:  $\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$ ,  $\angle ACB < \angle ACS + \angle BCS$ . Складывая эти неравенства и учитывая, что сумма углов треугольника  $ABC$  равна  $180^\circ$ , получаем  $180^\circ < \angle BAS + \angle CAS + \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \angle ACS = 180^\circ - \angle ASB + 180^\circ - \angle BSC + 180^\circ - \angle ASC$ . Следовательно,  $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 360^\circ$ .

# ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. На рисунке приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.

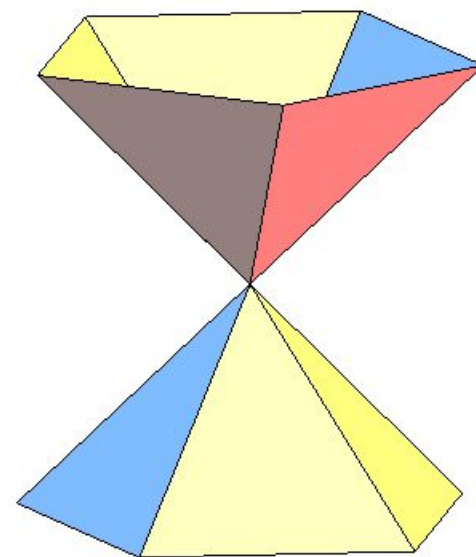
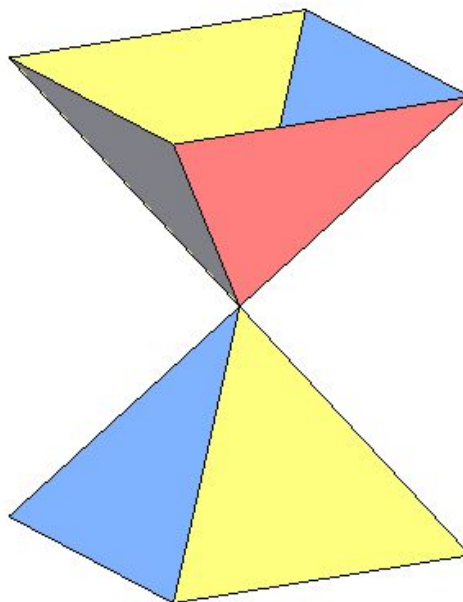
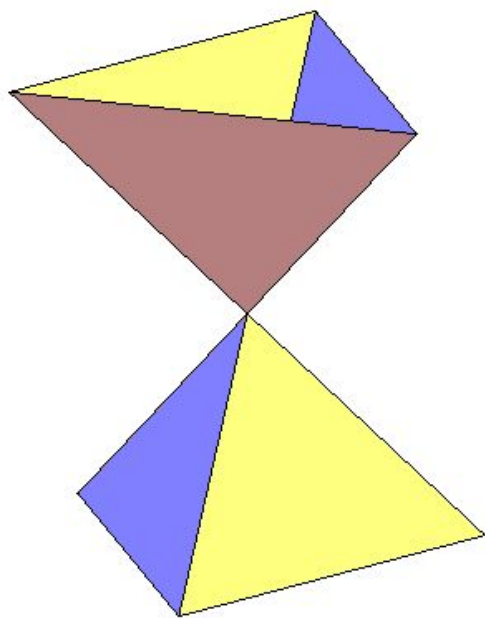


**Свойство.** Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше  $360^\circ$ .

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для трехгранного угла.

# Вертикальные многогранные углы

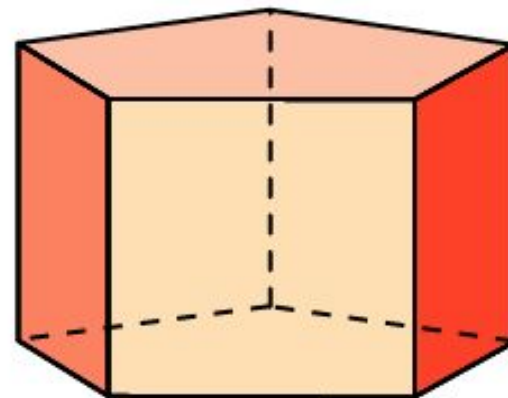
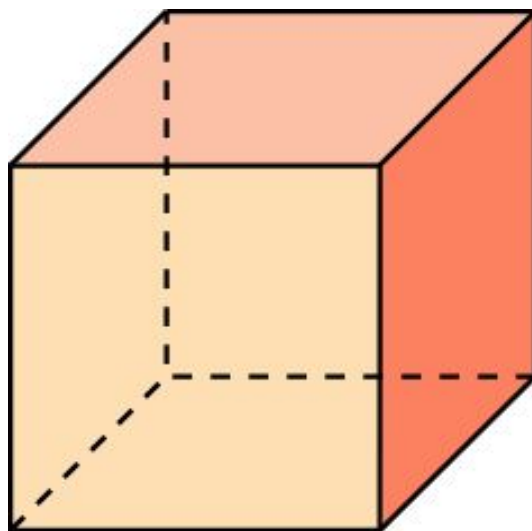
На рисунках приведены примеры трехгранных, четырехгранных и пятигранных вертикальных углов



**Теорема.** Вертикальные углы равны.

# Измерение многогранных углов

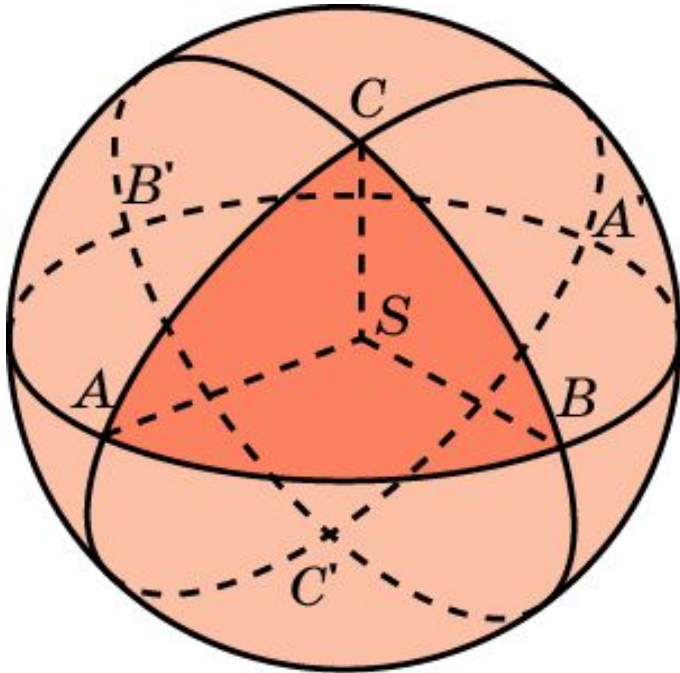
Поскольку градусная величина развернутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна  $180^\circ$ , то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развернутых двугранных углов, равна  $360^\circ$ . Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трехгранный угол куба занимает одну восьмую часть пространства и, значит, его градусная величина равна  $360^\circ : 8 = 45^\circ$ . Трехгранный угол в правильной  $n$ -угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен  $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ , получаем, что трехгранный угол призмы равен  $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$ .





# Измерение трехгранных углов\*

Выведем формулу, выражающую величину трехгранного угла через его двугранные углы. Опишем около вершины  $S$  трехгранного угла единичную сферу и обозначим точки пересечения ребер трехгранного угла с этой сферой  $A, B, C$ .



Плоскости граней трехгранного угла разбивают эту сферу на шесть попарно равных сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам данного трехгранного угла. Сферический треугольник  $ABC$  и симметричный ему сферический треугольник  $A'B'C'$  являются пересечением трех двуугольников. Поэтому удвоенная сумма двугранных углов равна  $360^\circ$  плюс учетверенная величина трехгранного угла, или

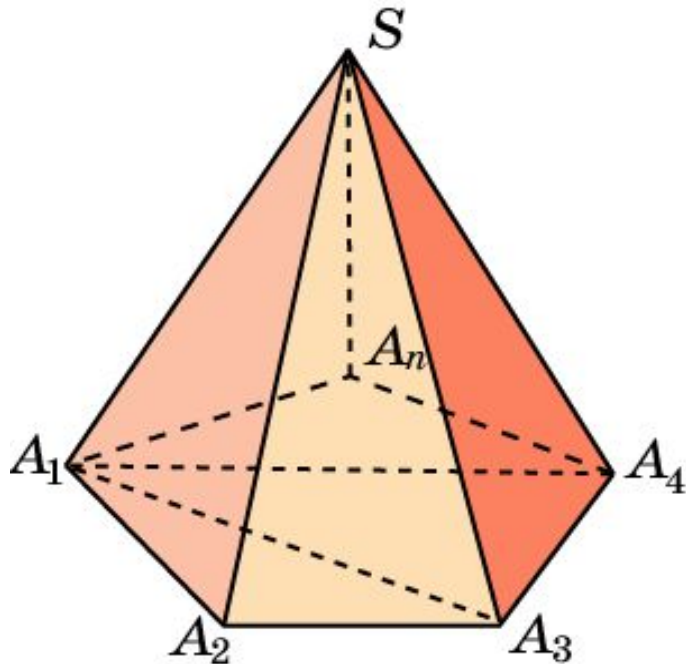
$$\angle SA + \angle SB + \angle SC = 180^\circ + 2 \angle SABC.$$



# Измерение многогранных углов\*

Пусть  $SA_1 \dots A_n$  – выпуклый  $n$ -гранный угол. Разбивая его на трехгранные углы, проведением диагоналей  $A_1A_3, \dots, A_1A_{n-1}$  и применяя к ним полученную формулу, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \dots + \angle SA_n = 180^\circ(n-2) + 2 \angle SA_1 \dots A_n.$$



Многогранные углы можно измерять и числами. Действительно, тремстам шестидесяти градусам всего пространства соответствует число  $2\pi$ . Переходя от градусов к числам в полученной формуле, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \dots + \angle SA_n = \pi(n-2) + 2 \angle SA_1 \dots A_n.$$

# Упражнение 1

Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами:

а)  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $20^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ; в)  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ?

**Ответ:** а) Нет; б) нет; в) да.

## Упражнение 2

Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

**Ответ:** а) Тетраэдр, куб, додекаэдр;  
б) октаэдр;  
в) икосаэдр.

## Упражнение 3

Два плоских угла трехгранного угла равны  $70^\circ$  и  $80^\circ$ . В каких границах находится третий плоский угол?

Ответ:  $10^\circ < \phi < 150^\circ$ .

## Упражнение 4

Плоские углы трехгранного угла равны  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .  
Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в  $45^\circ$ .

Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 5

В трехгранном угле два плоских угла равны по  $45^\circ$ ; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 6

Плоские углы трехгранного угла равны  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ . На его ребрах от вершины отложены равные отрезки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . Найдите двугранный угол между плоскостью угла в  $90^\circ$  и плоскостью  $ABC$ .

Ответ:  $90^\circ$ .



## Упражнение 7

Каждый плоский угол трехгранного угла равен  $60^\circ$ . На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

Ответ:  $\sqrt{6}$  см.

## Упражнение 8

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней.

**Ответ:** Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, делящих двугранные углы пополам.

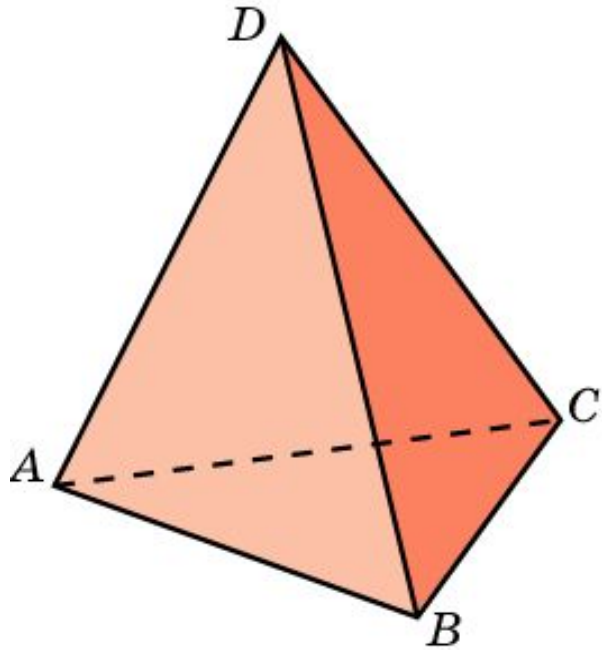
## Упражнение 9

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.

**Ответ:** Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов.

## Упражнение 10

Найдите приближенные значения трехгранных углов тетраэдра.



Для двугранных углов  $\varphi$  тетраэдра имеем:

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 70^\circ 30'.$$

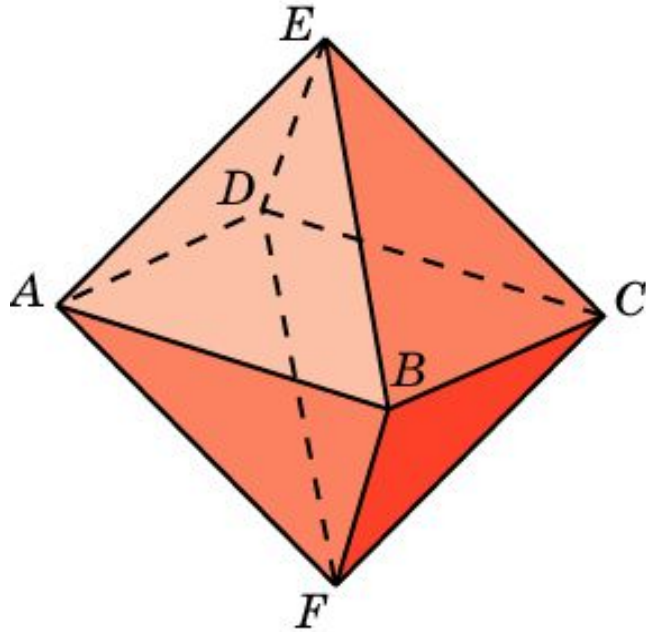
Для трехгранных углов  $\psi$  тетраэдра имеем:

$$\psi = \frac{3\varphi - 180^\circ}{2} \approx 15^\circ 45'.$$

**Ответ:**  $\psi \approx 15^\circ 45'$ .

# Упражнение 11

Найдите приближенные значения четырехгранных углов октаэдра.



Для двугранных углов  $\varphi$  октаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 109^{\circ}30'.$$

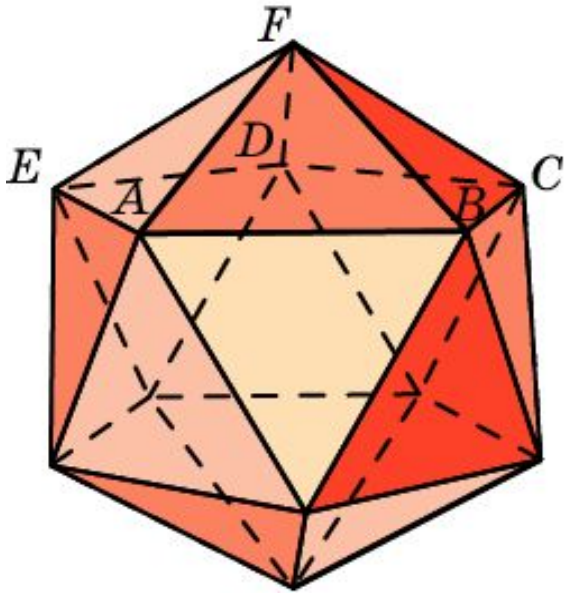
Для четырехгранных углов  $\psi$  октаэдра имеем:

$$\psi = \frac{4\varphi - 180^{\circ} \cdot 2}{2} = 2\varphi - 180^{\circ} \approx 38^{\circ}56'.$$

Ответ:  $\psi \approx 38^{\circ}56'$ .

## Упражнение 12

Найдите приближенные значения пятигранных углов икосаэдра.



Для двугранных углов  $\varphi$  икосаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 138^\circ 11'.$$

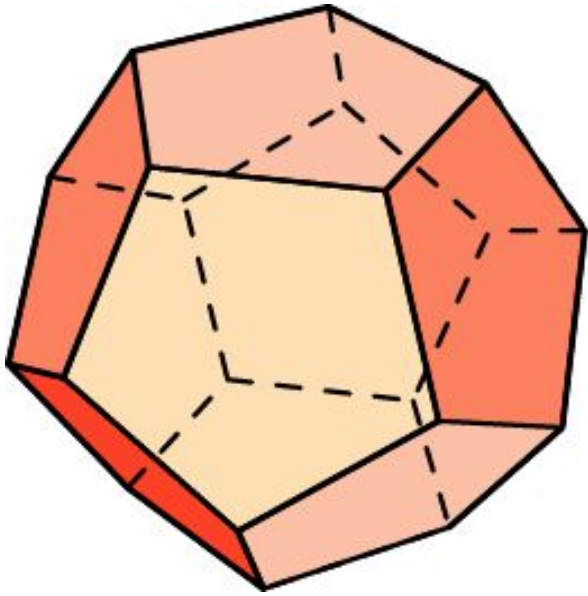
Для пятигранных углов  $\psi$  икосаэдра имеем:

$$\psi = \frac{5\varphi - 180^\circ \cdot 3}{2} \approx 75^\circ 28'.$$

Ответ:  $\psi \approx 75^\circ 28'$ .

## Упражнение 13

Найдите приближенные значения трехгранных углов додекаэдра.



Для двугранных углов  $\varphi$  додекаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ откуда } \varphi \approx 116^\circ 34'.$$

Для трехгранных углов  $\psi$  додекаэдра имеем:

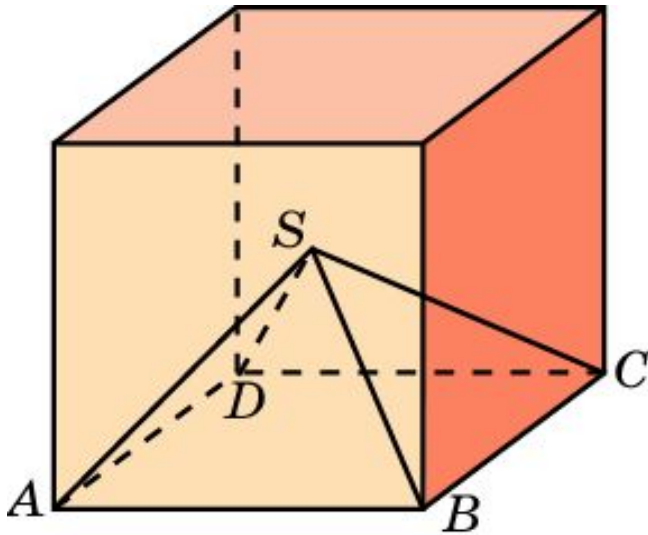
$$\psi = \frac{3\varphi - 180^\circ}{2} \approx 84^\circ 51'.$$

**Ответ:**  $\psi \approx 84^\circ 51'$ .



## Упражнение 14

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Найдите четырехгранный угол при вершине этой пирамиды.

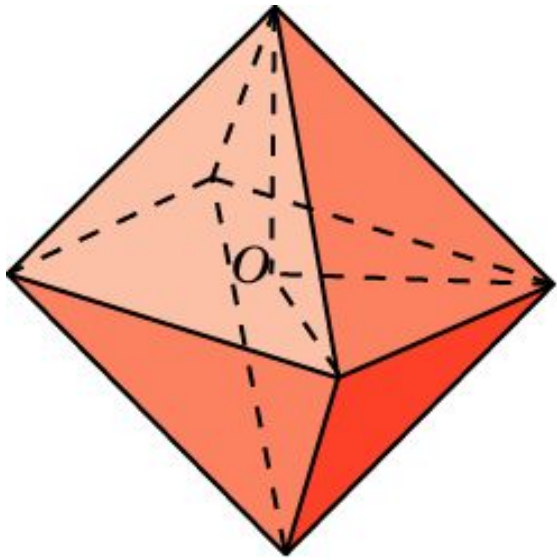


**Решение:** Указанные пирамиды разбивают куб на шесть равных пирамид с вершинами в центре куба. Следовательно, 4-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну шестую часть угла в  $360^\circ$ , т.е. равен  $60^\circ$ .

**Ответ:**  $60^\circ$ .

## Упражнение 15

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, углы при вершине  $90^\circ$ . Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.

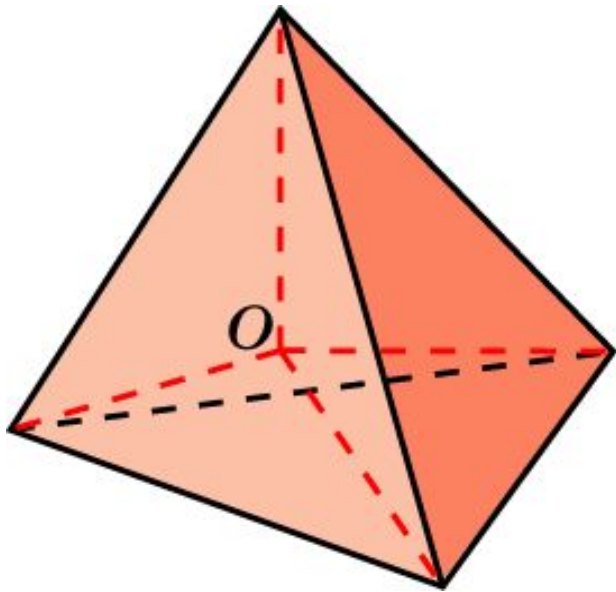


**Решение:** Указанные пирамиды разбивают октаэдр на восемь равных пирамид с вершинами в центре  $O$  октаэдра. Следовательно, 3-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну восьмую часть угла в  $360^\circ$ , т.е. равен  $45^\circ$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

## Упражнение 16

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, а высота  $\frac{1}{3}$ . Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.



**Решение:** Указанные пирамиды разбивают правильный тетраэдр на четыре равные пирамиды с вершинами в центре  $O$  тетраэдра. Следовательно, 3-гранный угол при вершине пирамиды составляет одну четвертую часть угла в  $360^\circ$ , т.е. равен  $90^\circ$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ .