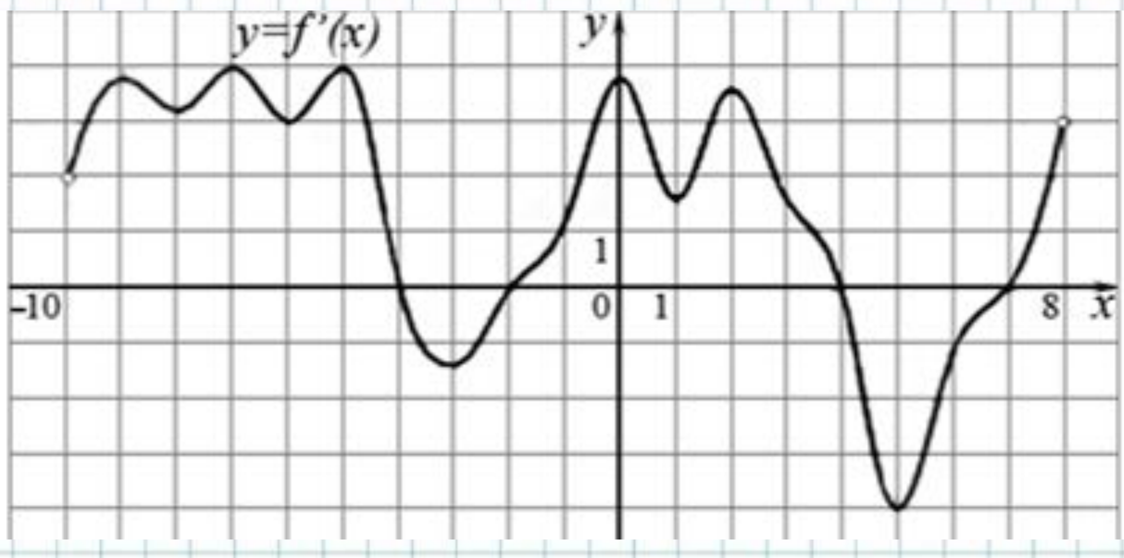
Решение заданий $В_8$ ЕГЭ по математике

Артамонова Л.В.,
учитель математики
МКОУ «Москаленский лицей»

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 8). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−9;6].

- **Решение.**
  Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с плюса на минус. На отрезке [−9;6] функция имеет две точки максимума $x = -4$ и $x = 4$.
  Ответ: 2.

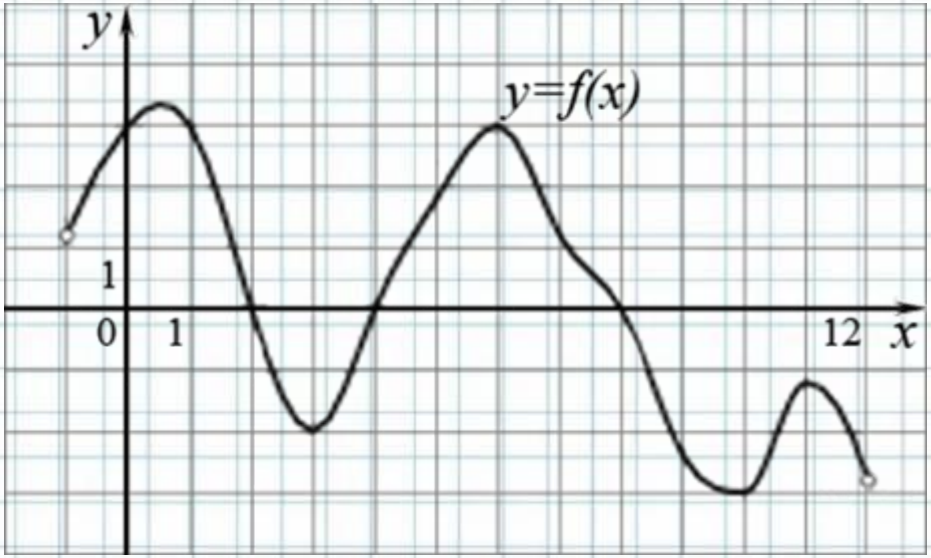


На рисунке изображен график функции y=f(x), определенной на интервале (−1; 12). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

- **Решение.**

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах (0,5; 3), (6; 10) и (11; 12). В них содержатся целые точки 1, 2, 7, 8 и 9. Всего 5 точек.

Ответ: 5.

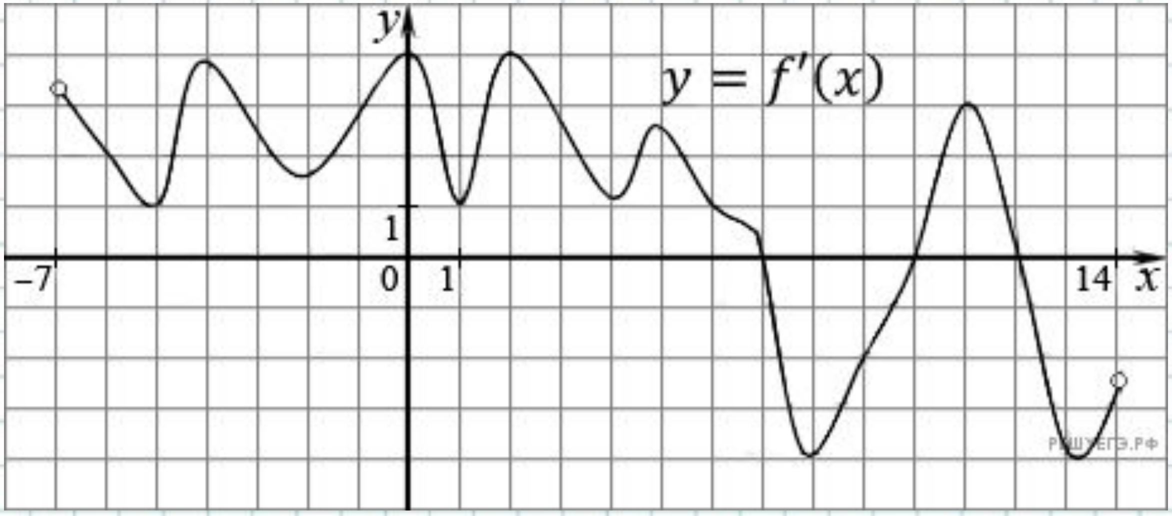


На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−10; 4). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

- **Решение.**
  Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу (−9; −6) длиной 3 и интервалу (−2; 3) длиной 5. Длина наибольшего из них равна 5.
  Ответ: 5.

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].

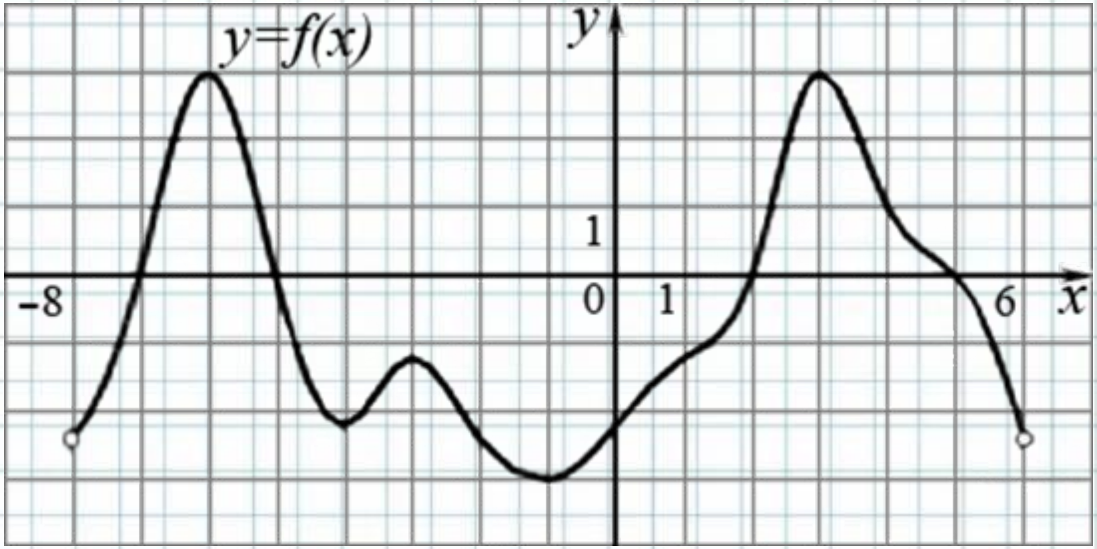
- **Решение.**
Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.
Ответ: 1.
-



На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (−8; 6). Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

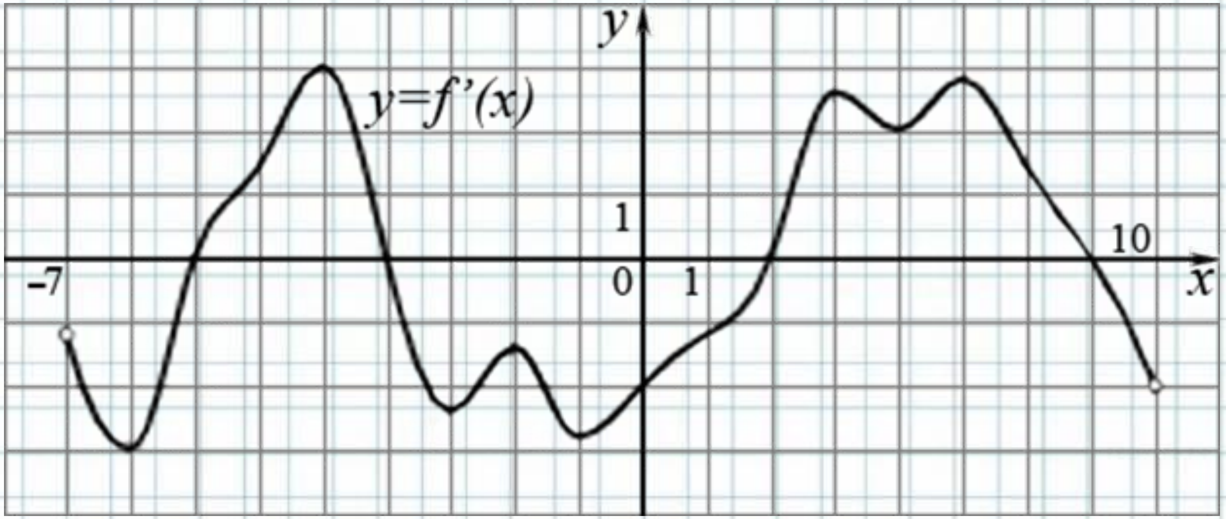
- **Решение.**

Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (−7; −5), (2; 5). Наибольший из них — интервал (2; 5), длина которого 3.



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 10). Найдите количество точек минимума функции *f(x)* на отрезке [−3; 8].

- **Решение.**
  Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке [−3; 8] функция имеет одну точку минимума $x = 4$.
  Ответ: 1.



Прямая $y = 5x + 5$ является касательной к графику функции $8x^2 + 29x + c$. Найдите c.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

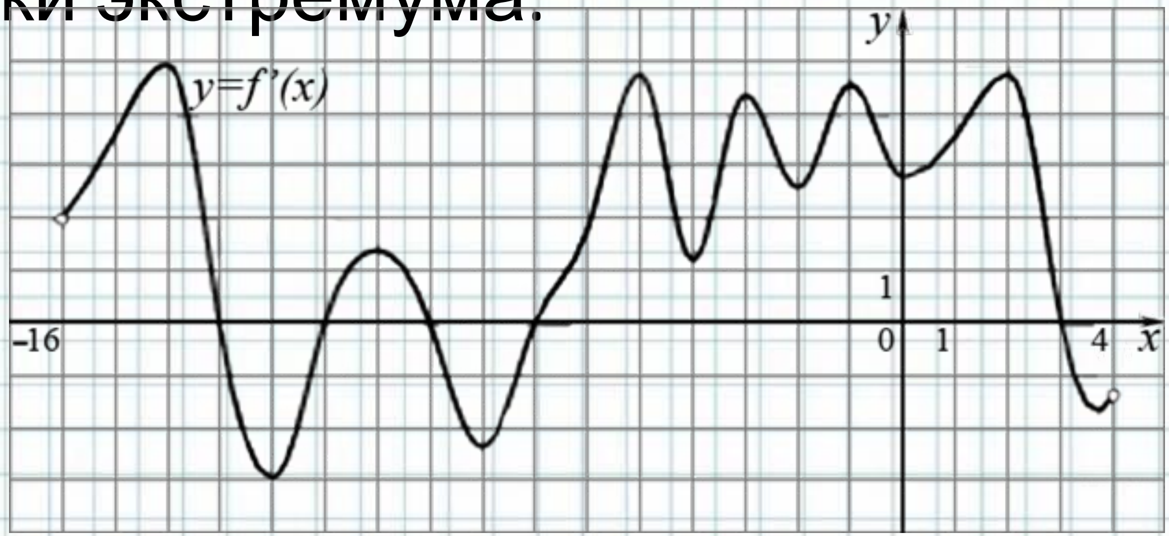
В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 16x + 29 = 5, \\ 8x^2 + 29x + c = 5x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5, \\ 8x^2 + 24x + c - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1,5, \\ c = 23. \end{cases}$$

Таким образом, c = 23.

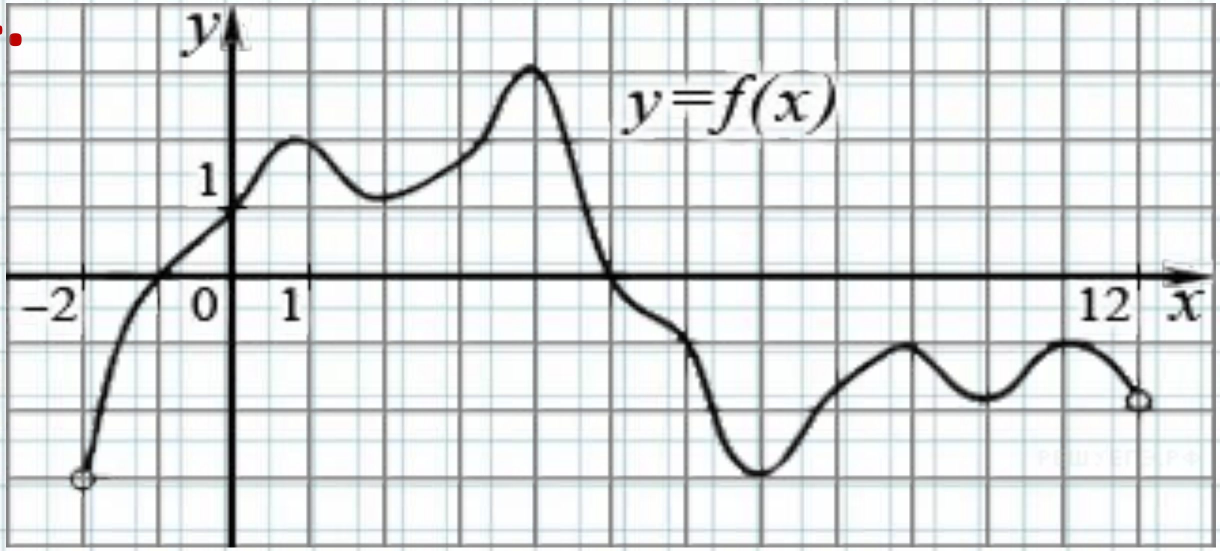
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−16; 4). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−14; 2].

- **Решение.**
  Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулям производной. Производная обращается в нуль в точках −13, −11, −9, −7. На отрезке [−14; 2] функция имеет 4 точки экстремума.
  Ответ: 4.



На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*.

- **Решение.**
  Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.
  Ответ: 44.



Прямая $y = -9x + 5$ является касательной к графику функции $ax^2 + 15x + 11$. Найдите a.

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 15 = -9, \\ ax_0^2 + 15x_0 + 11 = -9x_0 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = -12, \\ -12x_0 + 24x_0 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24, \\ x_0 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

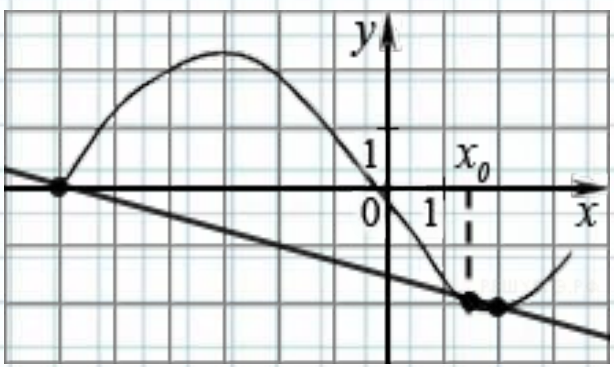
Искомое значение a равно 24.

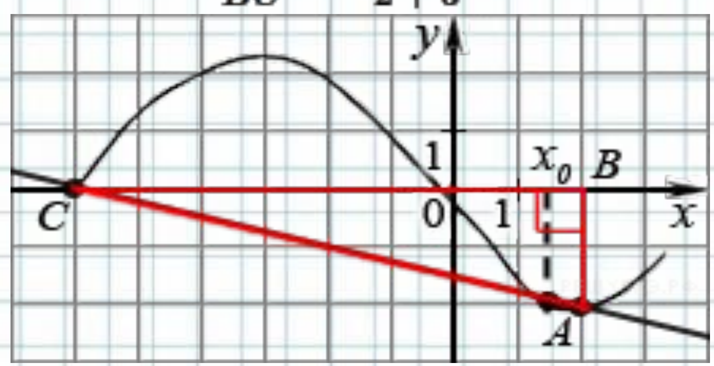
Ответ: 24.

На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

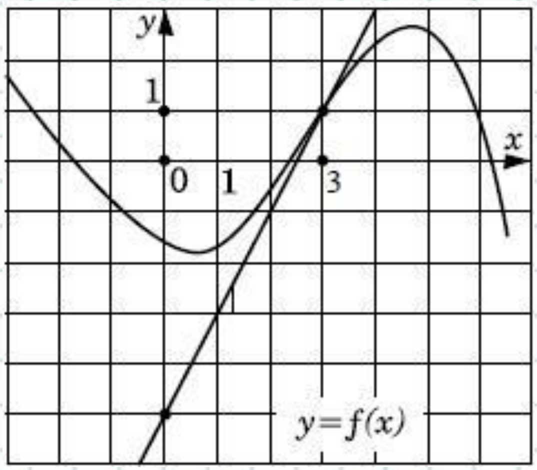
- **Решение.**
  Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (2; −2), B (2; 0), C (−6; 0). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB.

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}(180° - \angle ACB) = -\mathrm{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2+6} = -0{,}25$$





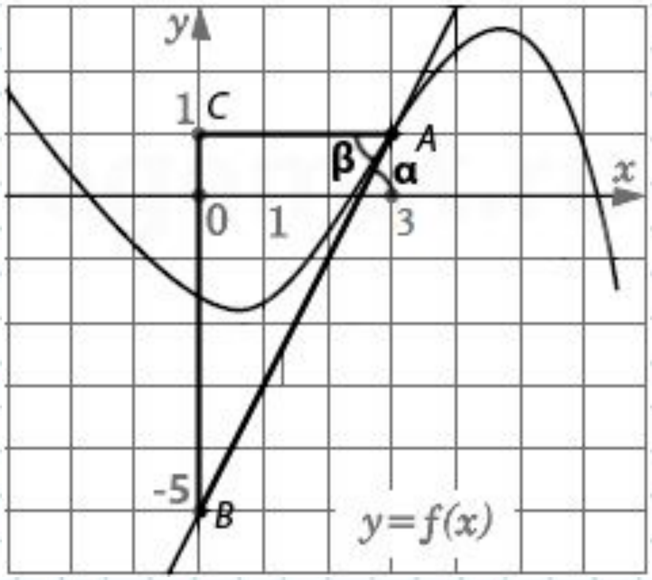
На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке x = 3.



Для решения используем геометрический смысл производной: значение производной функции в точке равняется угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведенной в этой точке. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси x (tg α). Угол α = β, как накрест лежащие углы при параллельных прямых y=0, y=1 и секущей-касательной. Для треугольника ABC

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$f'(3) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$$

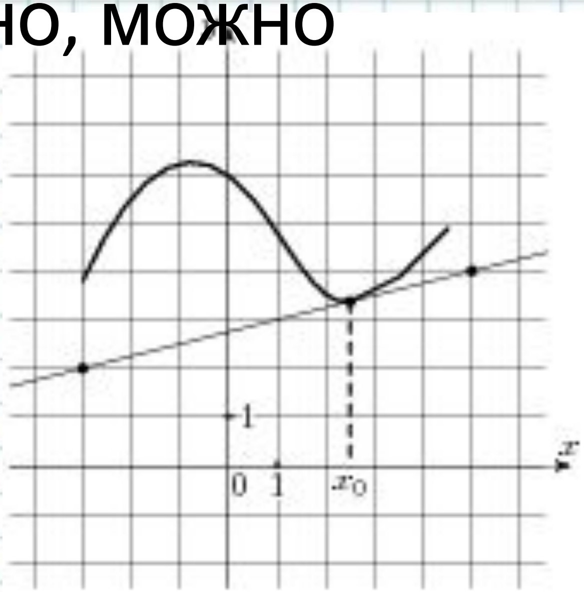


На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.

- По свойствам касательной, формула касательной к функции f(x) в точке x_0 равна
- $y=f'(x_0)\cdot x+b$, b=const
- По рисунку видно, что касательная к функции f(x) в точке x_0 проходит через точки (-3;2), (5,4). Следовательно, можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = f'(x_0)\cdot -3 + b \\ 4 = f'(x_0)\cdot 5 + b \end{cases}$$

$$b = \frac{11}{4},\ f'(x_0) = 0.25$$



Источники

- http://reshuege.ru/
- http://egemat.ru/prepare/B8.html
- http://bankege.ru/